Estructura de la Materia 4

Ejercicios Adicionales: Formulación covariante.

Ejercicio 1:

1. Demuestre que el operador de derivación temporal junto con el gradiente son componentes de un operador diferencial cuadrivectorial contravariante.

2. Usando que la contracción de dos magnitudes cuadritensoriales da por resultado otra magnitud cuadritensorial, decida cuáles de las siguientes expresiones corresponden a invariantes relativistas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi$$

   en donde ϕ es el potencial escalar y $\mathbf{A}$ es el potencial vector.

Ejercicio 2:
Considere un campo electromagnético producido por una cuadricorriente de componentes j_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$).

1. Justifique por qué la siguiente expresión:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

   en donde A_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) son las componentes del respectivo cuadripotencial, define un cuadritensor antisimétrico.

2. Muestre que las siguientes ecuaciones:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$$

corresponden a las ecuaciones de Maxwell en gauge de Lorentz.

3. Deduzca que si un cuadritensor es simétrico y otro cuadritensor es antisimétrico respecto del intercambio de dos de sus índices, entonces la contracción de éstos necesariamente es nula. Use este resultado y el ítem anterior para demostrar que las ecuaciones de Maxwell implican la conservación de la carga.

Ejercicio 3: Dado el cuadritensor de campo $F_{\mu\nu}$, considere el cuadritensor de campor *dual*, dado por

$$^\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

1. Encuentre explícitamente las componentes de este cuadritensor en términos de los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{B}$.

2. Muestre que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ son invariantes relativistas.

3. Concluya que si los campos eléctrico y magnético son perpendiculares en un sistema inercial lo son respecto de cualquier otro sistema.

4. Demuestre que si la intensidad del campo eléctrico en un sistema de referencia es mayor que la del campo magnético es así también en cualquier otro sistema inercial.

Ejercicio 4: Una partícula de masa (en reposo) m y carga e se encuentra en presencia de un campo electromagnético externo cuyo potencial escalar es ϕ y cuyo potencial vector es $\mathbf{A}$.

1. Muestre que las ecuaciones de movimiento que se deducen a partir del siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\phi$$

son las ecuaciones de Lorentz:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

2. Demuestre que las tres componentes de la fuerza de Lorentz son las componentes espaciales de un cuadrivector. Encuentre explícitamente la componente temporal.

3. Demuestre que el lagrangiano es un invariante relativista. Para ello muestre que se lo puede reescribir como suma de contracciones cuadritensoriales.

4. A partir del ítem anterior, deduzca las siguientes ecuaciones de movimiento:
$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F_{\mu\nu} p^\nu$$
y muestre que son consistentes con los resultados anteriores.