Estructura de la Materia 4 (2006-1c)
Práctica 3: Ecuación de Dirac.

1. **a)** Verifique que las matrices $\vec{\alpha}_i$ y β dadas por

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli e I es la identidad en dos dimensiones, satisfacen los requerimientos de la ecuación de Dirac; es decir, son hermíticas, de traza nula y autovalores ± 1, y además satisfacen el álgebra de Dirac:

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} \equiv \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i &= 2\delta_{ij} \quad \alpha_i^2 = 1 \\ \{\alpha_i, \beta\} \equiv \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= 0 \qquad \beta^2 = 1 \end{aligned}$$

b) Muestre que $\beta' \equiv \alpha_2$, $\alpha_1' \equiv -\alpha_1$, $\alpha_2' \equiv \beta$ y $\alpha_3' \equiv -\alpha_3$, satisfacen el álgebra de Dirac.
c) Operando a partir de la ecuación de Dirac, obtenga la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho_{Dirac}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{Dirac} = 0$$

mostrando que $\rho_{Dirac} = \Psi^\dagger \Psi$ y $\vec{J}_{Dirac} = \Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi$.
d) Muestre que definiendo $\gamma^0 \equiv \beta$ y $\gamma^i \equiv \beta\alpha^i$ se verifica

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\, g^{\mu\nu}$$

2. Demuestre que el Hamiltoniano de Dirac no conmuta con el operador de impulso angular orbital $\vec{L}$, pero si lo hace con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, con $\vec{S}$ dado por

$$\vec{S} \equiv \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$$

con

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Muestre que el operador $\vec{S}$ definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares, y además tiene autovalores $\pm\frac{\hbar}{2}$.

3. La ecuación de Dirac para una partícula libre tiene dos soluciones linealmente independientes asociadas al mismo valor de energía-impulso ($\vec{p}$ y E):

$$\Psi(x,t) = u_i(\vec{p}) \;\; e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x} - \frac{i}{\hbar}E\,t} \qquad (i = 1, 2)$$

con

$$u_i(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \chi_i \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\,\chi_i \end{pmatrix} \qquad (i=1,2)$$

en el caso $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} > 0$, y

$$\Psi(x,t) = u_i(\vec{p})\ \ e^{\frac{i}{\hbar}\,\vec{p}\cdot\vec{x} + \frac{i}{\hbar}|E|\,t} \qquad (i=3,4)$$

con

$$u_i(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{-c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|E|+mc^2}\,\chi_i \\ \chi_i \end{pmatrix} \qquad (i=3,4)$$

en el caso $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} < 0$, donde N es una constante de normalización, y

$$\chi_1 = \chi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_2 = \chi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i) Verifique explícitamente que son soluciones.

ii) Verifique que para $\vec{p} = 0$ se recuperan las soluciones en reposo.

iii) Determine el valor de N que define la normalización covariante $u_i^\dagger u_j = \delta_{ij}|E|/mc^2$. Discuta el uso de esta normalización que involucra a la energía en lugar de $u_i^\dagger u_j = \delta_{ij}$

iv) Muestre que el operador de helicidad $\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{P}$ (con $\hat{P} \equiv \vec{P}/|\vec{P}|$), proyección del spin en la dirección de movimiento, conmuta con el Hamiltoniano de Dirac y con el operador de impulso $\vec{P}$, de forma tal que se lo puede agregar a éstos para formar un conjunto completo de observables que conmutan.

v) Verifique que para $\vec{p} = (0,0,p)$, los espinores $u_1(\vec{p})$ y $u_2(\vec{p})$ son autoestados del operador de helicidad con autovalores $\pm\frac{\hbar}{2}$

4. **a)**Muestre que $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ es hermítico, de cuadrado unitario, y que anticonmuta con las cuatro matrices γ de Dirac. γ^5 es conocido como el operador de quiralidad.

   b) Demuestre que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u_i(\vec{p})$ es la misma que la del operador de helicidad, es decir γ^5 *coincide* con el operador de helicidad

$$\gamma^5 u_i(\vec{p}) = (\Sigma\cdot\hat{p})u_i(\vec{p}) \qquad (i=1,2)$$

   c) Verifique que para las antipartículas quiralidad y helicidad son opuestas

$$\gamma^5 u_i(\vec{p}) = -(\Sigma\cdot\hat{p})u_i(\vec{p}) \qquad (i=3,4)$$

5. Vuelva a obtener las soluciones de la ecuación de Dirac para una partícula libre de energía E e impulso $\vec{p}$ a partir de las soluciones en reposo haciendo una transformación de Lorentz.

6. Considere una transformación de Lorentz $x^\mu \to x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ que transforma al espinor Ψ según $\Psi \to \Psi' = S_\Lambda \Psi$ donde $S_\Lambda^{-1}\gamma^\nu S_\Lambda = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$. Sabiendo que para una transformación infinitesimal $\Lambda^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu + \varepsilon^\nu_\mu$ para el operador S se obtiene $S = 1 + \frac{1}{8}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\varepsilon^{\mu\nu}$ muestre que

   (a) $S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$

   (b) $\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} S^{-1}$ con $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$.

   (c) $\bar{\Psi}\Psi$ es invariante Lorentz

   (d) $j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ es un cuadrivector

   (e) $j^5 = \bar{\Psi}\gamma^5\Psi$ es un seudoescalar dado que $[S, \gamma^5] = 0$ para rotaciones y boosts y $S_P = \gamma^0$ es solución de $S_P^{-1}\gamma^\nu S_P = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$ cuando Λ corresponde a una inversión de coordenadas $(t \to t, x \to -x)$.

7. A partir de las soluciones para partícula libre de la ecuación de Dirac con $E > 0$, verifique que en límite no relativista ($E \approx mc^2$) las componentes inferiores (o *débiles*) del espinor de Dirac son de orden v/c respecto de las superiores (o *fuertes*), y que estas últimas tienen la forma de una solución de Schrödinger para partícula libre multiplicadas por un espinor de Pauli de dos componentes.

8. A partir de la sustitución $\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$ y $E \longrightarrow \epsilon_{NR} + mc^2 - q\Phi$ en la ecuación de Dirac, muestre que en el límite no relativista $\epsilon_{NR} - q\Phi << mc^2$, las componentes superiores de las soluciones con $E > 0$ satisfacen la ecuación de Schrödinger-Pauli

$$\left(\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} \right)^2 + q\Phi - \frac{q\hbar}{2mc}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) \Psi = \epsilon_{NR}\Psi$$

9. Analice el problema de la transmisión y reflexión de una partícula de Dirac de energía E ante un escalón de potencial V_0. Muestre que el coeficiente de reflexión puede ser mayor que la unidad en el caso que $V_0 > E + mc^2$, y que en tal situación el coeficiente de transmisión es negativo. Cómo se interpreta ésto?