

Estructura de la Materia 4 (2006-1c)

Práctica 6: Modelo de quarks

1. Una transformación $SU(3)$ arbitraria se puede escribir como

$$\Psi'(x) = U(\epsilon^a) \Psi(x) = e^{i\epsilon^a \frac{\lambda_a}{2}} \Psi(x) \quad a = 1, \dots, 8$$

donde ϵ^a son ocho parámetros reales que caracterizan la transformación, y λ_a son el análogo de las matrices de Pauli pero para $SU(3)$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Verifique que λ_1 , λ_2 , y λ_3 , generan rotaciones en el espacio de isospín.

b) Verifique que $I_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$, $U_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7)$, y $V_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5)$ son los operadores de subida y de bajada para isospín, u-espín, y v-espín.

c) Muestre que los generadores λ_a satisfacen relaciones análogas a las de las matrices de Pauli de $SU(2)$

| $SU(2)$ | $SU(3)$ |
|--|--|
| $tr \sigma_i = 0$ | $tr \lambda_a = 0$ |
| $tr \sigma_i \sigma_j = 2\delta_{ij}$ | $tr \lambda_a \lambda_b = 2\delta_{ab}$ |
| $[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}] = i \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}$ | $[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}$ |

donde las constantes de estructura f_{abc} son antisimétricas ante el intercambio de pares de índices ($f_{123} = 1$, $f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}$)

2. Usando las funciones de onda de sabor y espín simétrica, muestre que la probabilidad de hallar un quark u en un protón con el espín orientado en la dirección del espín del protón es $5/9$, mientras que la de hallarlo con el espín orientado en la dirección opuesta es $1/9$. Repita el cálculo para un quark d. Indique qué se puede decir respecto de la polarización de los quarks en un neutrón.

3. Muestre que con las funciones de onda de protón y neutrón totalmente antisimétricas se predice $\mu_n/\mu_p = -2$, y que el momento magnético del protón es negativo, en total contradicción con los resultados experimentales, mientras que con las simétricas se obtienen los valores correctos.
4. Generalizando la simetría SU(2) a SU(3), obtenga las funciones de onda del octete simétrico utilizando los operadores de subida y bajada. Discuta la existencia de las partículas Σ^0 y Λ^0 , que corresponden a un mismo octete, y tienen los mismos valores de extrañeza S=-1 y componente de isospín $I_3=0$. ¿En qué se diferencian entonces? ¿Cómo reflejan sus respectivas funciones de onda de SU(3) esta diferencia?
5. A partir de las funciones de onda del Λ en las representaciones $\mathbf{8}_A$ y $\mathbf{8}_S$: $\Lambda_A = 1/\sqrt{12} [2(ud-du)s + (us-su)d + (sd-ds)u]$ y $\Lambda_S = \frac{1}{2} [-(us+su)d + (ds+sd)u]$.
 - a) Combine éstas con las funciones de espín adecuadas para obtener la función de onda SU(6) completamente simétrica del Λ .
 - b) Calcule el momento magnético del Λ ($m_u=m_d=360$ MeV, $m_s=540$ MeV).
 - c) ¿Quién lleva el espín del Λ ? Para ello calcule cuál es la probabilidad que, al tomar un quark al azar de un Λ con espín up, se obtenga un $u^\uparrow, u^\downarrow, d^\uparrow, d^\downarrow, s^\uparrow$ ó un s^\downarrow .