Estructura de la Materia 4 (2006-1c)
Práctica 7: Invariancia de Gauge.

1. **a)** Muestre que el lagrangiano de Klein-Gordon libre $\mathcal{L}_{KG}$ es invariante ante transformaciones globales del grupo $U(1)$.

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi$$

   b) Encuentre los acoplamientos de 'QED escalar' reemplazando en $\mathcal{L}_{KG}$ la derivada ∂_μ por la derivada covariante D_μ de modo que $\mathcal{L}_{KG}$ sea invariante de gauge local.
   c) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción obtenidos

2. Verifique que el lagrangiano de interacción de una partícula de Dirac con el campo electromagnético

$$\mathcal{L}_{QED} = \overline{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) + q\overline{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x) A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

   es invariante ante una transformación de medida local

$$\begin{cases} \psi(x) \to e^{i\,q\alpha(x)}\psi(x) \\ A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \end{cases}$$

3. Considere el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}_G = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

   donde Φ es un doblete de SU(2) de campos escalares complejos

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

   a) Muestre que $\mathcal{L}_G$ is invariante ante transformaciones de fase globales del grupo $SU(2)$

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{i\,\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}\Phi(x)$$

   b) Muestre que el lagrangiano $\mathcal{L}_L$

$$\mathcal{L}_L = \left(\partial_\mu \Phi + ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot \vec{W}_\mu \Phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu \Phi + ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot \vec{W}_\mu \Phi\right) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 - \frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot \vec{W}^{\mu\nu}$$

   que resulta de la sustitución de ∂_μ por la derivada covariante D_μ en $\mathcal{L}_L$ con

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot \vec{W}_\mu$$

donde $\vec{W}_\mu(x)$ es un campo de gauge de tres componentes, y del agregado de un término de 'gauge puro' en funcion del tensor

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g \vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu \tag{1}$$

es invariante ante transformaciones infinitesimales

$$\begin{cases} \Phi(x) \to (1 + i\,\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2})\,\Phi(x) & (2) \\ \vec{W}_\mu \to \vec{W}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \vec{\alpha} - \vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu & (3) \end{cases}$$

c) Explique porqué los últimos términos de las ecuaciones (1) y (3) están vinculados al caracter no abeliano de SU(2).