Introducción a la Cosmología

Guía 1: *Ecuaciones de Friedmann*

Problema 1: Considere el ansatz de una métrica espacialmente homogénea e isótropa,

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right],$$

y considere el tensor de energía-momento de un fluido ideal de densidad de energía ρ y presión p, $T^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(\rho, -p, -p, -p)$. A partir de las ecuaciones de Einstein obtenga qué ecuaciones deben satisfacer N y a. Muestre que se puede asumir $N = 1$ sin pérdida de generalidad, y que en ese caso el factor de escala satisface las ecuaciones de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{1}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \tag{2}$$

donde $\dot{f} = df/dt$. Proponga una interpretación física para la primera de estas dos ecuaciones. Verifique que añadir el término de constante cosmológica $\Lambda g_{\mu\nu}$ al lado derecho de las ecuaciones de Einstein corresponde a añadir el término $\Lambda/3$ al lado derecho de las dos ecuaciones de Friedmann.

Problema 2: Muestre que las ecuaciones de Friedmann implican

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) + \frac{k}{a^2},$$

donde $H = \dot{a}/a$ es la llamada función de Hubble. Muestre también que las ecuaciones de Friedmann son equivalentes al sistema formado por (1) y

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \tag{3}$$

Discuta la interpretación física de esta última ecuación y su límite no relativista. Pruebe a partir de ella que, si la ecuación de estado del fluido tiene la forma $p = w\rho$, donde w es una constante, entonces $\rho = \rho_* a^{-3(1+w)}$, donde ρ_* es una constante.

Problema 3: Considere las siguientes ecuaciones de estado: (i) $p = 0$ (fluido tipo polvo), y (ii) $p = \rho/3$ (fluido tipo radiación). Discuta la interpretación física de cada una de ellas y encuentre la solución correspondiente, $a(t)$, de las ecuaciones de Friedmann con $\Lambda = 0$ y $k = 0$.

Problema 4: Obtenga la solución, $a(t)$, de las ecuaciones de Friedmann con Λ genérica y $k = 0$ correspondientes a la ecuación de estado $p = -\rho$.

Problema 5: Considere las ecuaciones de Friedmann sin constante cosmológica. Determine la densidad de energía crítica, $\rho_c(t)$, para la cual el universo es plano ($k = 0$). Pruebe que para $\rho > \rho_c$ el universo es cerrado ($k = 1$) y para $\rho < \rho_c$ el universo es abierto ($k = -1$).

Problema 6: Considere las ecuaciones de Friedmann sin constante cosmológica y con una ecuación de estado de la forma $p = w\rho$, donde w es una constante. Pruebe que para $w > -1/3$ un universo cerrado recolapsa después de alcanzar un radio máximo, mientras que un universo plano o abierto se expande sin límite. Estudie el comportamiento del factor de escala para $w \leq -1/3$.

Problema 7: Obtenga el tensor de energía-momento correspondiente al campo electromagnético (tensor de Maxwell) en un espacio-tiempo curvo y calcule su traza. Discuta el resultado en relación a la ecuación de estado de radiación (problema 3) y a la ecuación de estado de un gas de bosones sin masa.

Problema 8: Obtenga el tensor de energía-momento de un campo escalar φ (Klein-Gordon) en un espacio-tiempo curvo, y evalúelo en una configuración homogénea ($\varphi = \varphi(t)$). Suponiendo que durante un lapso de tiempo considerable el campo mantiene una densidad de energía cinética $(\dot{\varphi})^2/2$ desdeñable en comparación con su densidad de energía potencial $V(\varphi)$, obtenga la ecuación de estado del fluido que emularía la presencia de este campo en el espacio-tiempo. Compare este resultado con lo visto en el problema 4. Luego considere la ecuación de Klein-Gordon para un campo homogéneo formulada sobre la geometría de Robertson-Walker y verifique que dicha ecuación contiene un término que puede ser interpretado como un término de fricción.

Problema 9: Considere un universo que se expande de acuerdo con la ley $a(t) \propto t^\lambda$, con $0 < \lambda < 1$. A partir del valor actual de la función de Hubble, $H_0 = H(t_0)$, obtenga una cota para la edad del universo. Discuta cómo la hipótesis de una dinámica radicalmente distinta en el universo muy temprano podría invalidar esta cota.

Problema 10: Muestre que las ecuaciones de Friedmann con un fluido tipo polvo ($p = 0$) admiten una solución estática (a constante) en presencia de una constante cosmológica (tal como lo pensó Einstein) o, equivalentemente, de un fluido con las características del estudiado en el problema 4 (tal como lo pensó Schrödinger). Muestre, no obstante, que esta solución es inestable ante perturbaciones del campos gravitatorio.

Problema 11: Además de la solución de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, existen muchas otras soluciones a las ecuaciones de Einstein que tienen una interpretación cosmológica. Entre ellas, existen soluciones que describen universos homogéneos pero no isótropos, tales como los que pertenecen a la denominada clasificación de *universos tipo Bianchi*, o el llamado *universo de Kantowski-Sachs*. En 1949, Gödel obtuvo una solución a las ecuaciones de Einstein que describe un universo homogéneo pero no isótropo. La peculiaridad más sobresaliente del *universo de Gödel* es que, en él, es posible viajar al pasado y regresar al punto de partida. Describa qué haría usted si viviera en un universo de Gödel.