Introducción a la Cosmología

Guía 6: *Anisotropías del CMB*

Problema 1: Asumiendo que la radiación de fondo es perfectamente isótropa, obtenga la distribución angular de su temperatura según un observador no comóvil con el flujo de Hubble.

Problema 2: Considere un universo espacialmente plano dominado por polvo. Obtenga la evolución de pequeñas perturbaciones de este universo en la aproximación newtoniana.

Problema 3: Sea P una distribución de probabilidad sobre funciones en la 2-esfera. Dada una tal función f y dados $l \in \mathbb{N}$, $m \in \{-l, \ldots, l\}$ sea $a_{lm}(f)$ el coeficiente (l, m) de la expansión de f en armónicos esféricos. Pruebe que si P es isótropa entonces

$$\langle a^*_{lm} a_{l'm'} \rangle_P = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l$$

para todo l, m, l', m', donde C_l es un número real no negativo.

Problema 4: Las cantidades que se miden para estimar los coeficientes C_l asociados a la anisotropía de la temperatura del CMB son

$$\bar{C}_l(\delta T) = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} a^*_{lm}(\delta T) a_{lm}(\delta T).$$

La diferencia cuadrática media entre $\bar{C}_l$ y C_l se denomina *variancia cósmica*. Asumiendo que la distribución de probabilidad para la anisotropía de la temperatura del CMB es gaussiana, pruebe que la variancia cósmica es

$$\langle (\bar{C}_l - C_l)^2 \rangle = \frac{2}{2l+1} C_l^2,$$

y por lo tanto es importante a multipolos pequeños. *Ayuda*: use que para una distribución de probabilidad gaussiana se tiene $\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \langle x_1 x_2 \rangle \langle x_3 x_4 \rangle + \langle x_1 x_3 \rangle \langle x_2 x_4 \rangle + \langle x_1 x_4 \rangle \langle x_2 x_3 \rangle$ (teorema de Wick).

Problema 5: A partir del efecto Sachs-Wolfe pruebe que

$$\frac{\delta T}{T_0}(\eta_0, 0, \hat{n}) + \phi(\eta_0, 0) = \frac{\delta T}{T_0}(\eta_r, \hat{n}(\eta_0 - \eta_r), \hat{n}) + \phi(\eta_r, \hat{n}(\eta_0 - \eta_r)),$$

donde η_r es el tiempo conforme de recombinación y ϕ es el potencial gravitatorio. Escribiendo el lado derecho de esta ecuación como una integral de Fourier, teniendo en cuenta que $(\delta T/T_0)_{\mathbf{k}}(\eta_r, \hat{n}) \simeq -(2/3)\phi_{\mathbf{k}}(\eta_r)$ para $k\eta_r \ll 1$ y asumiendo que el potencial gravitatorio en el instante de recombinación tiene el espectro de Harrison-Zel'dovich,

$$\langle \phi^*_{\mathbf{k}}(\eta_r)\phi_{\mathbf{k}'}(\eta_r)\rangle = (2\pi)^3 P(k)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \qquad P(k) = N^2/k^3,$$

pruebe que para $l \ll 100$ se tiene

$$l(l+1)C_l \simeq \frac{8\pi^2}{9} N^2 T_0^2,$$

y por lo tanto $l(l+1)C_l$ es aproximadamente constante en este límite.