Introducción a la Cosmología

Guía 7: *Inflación*

Problema 1: Considere la densidad lagrangiana de una teoría de campos que consiste en un campo escalar real φ sobre un espacio-tiempo de métrica $g_{\mu\nu}$; es decir,

$$\sqrt{-g}\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + (m^2 + \xi R)\varphi^2 + \lambda\varphi^4\right],$$

donde R es el escalar de curvatura del espacio-tiempo y g representa el determinante de la métrica, $g = \det(g_{\mu\nu})$. Calcule la ecuación de movimiento del campo escalar (ecuación de Klein-Gordon) para una métrica genérica y, luego, evalúe dicha ecuación en el caso en el cual tanto la métrica $g_{\mu\nu}$ como el campo φ tienen configuraciones isótropas y homogéneas.

Problema 2: Para la densidad lagrangiana del problema anterior, calcule el tensor de energía-momentos asociado al campo φ en el caso $\xi = 0$. Haga esto de dos maneras diferentes; primero, considerando la definición

$$T_\mu^\nu \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\varphi}\partial_\mu\varphi + \delta_\mu^\nu\mathcal{L}$$

y luego considerando la definición

$$\widetilde{T}_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}.$$

Compare ambos resultados.

Problema 3: A partir de la siguiente densidad lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{3}{4}M^4\left(1 - e^{-\sqrt{8\pi G/3}\varphi}\right)^2,$$

donde M es una constante con unidades de energía, discuta la validez del régimen de *slow-roll approximation* en función de la forma del potencial y de las condiciones iniciales para el inflatón.

Problema 4: Considere el caso en el que el inflatón es simplemente un campo libre (sin potencial de auto-interacción $V(\varphi)$ ni acoplamiento con el escalar de curvatura) de masa m. Esto es, considere el caso $\lambda = 0$, $\xi = 0$ en la densidad lagrangiana del problema 1. Para este caso, calcule el número de e-foldings en términos del valor que el campo inflatón toma en el momento en el que comienza inflación ($t = t_i$) y en el momento que finaliza inflación ($t = t_f$).

Problema 5: Pruebe que el problema del horizonte y el problema de la platitud se resuelven si $\dot{a}(t_i) \lesssim \dot{a}(t_0)$, donde t_i y t_0 son el instante de inicio de inflación y el instante actual respectivamente. Asumiendo que la temperatura al inicio de la era decelerada es cercana a la temperatura de Planck pruebe que, para que se cumpla esta condición, inflación debe tener un mínimo de unos 70 e-foldings.

Problema 6: Muestre que la condición

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1$$

corresponde a pedir que el universe se encuentre en una fase acelerada. Asimismo, muestre que esto equivale a la condición

$$\omega \equiv \frac{p}{\rho} < -\frac{1}{3}$$

sobre la densidad de energía, ρ, y la presión, p.

Problema 7: Considere una teoría de gravedad generalizada cuya acción tiene la forma

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda + M^{-2}R^2)$$

donde M es una constante de acoplamiento con unidades de energía. La teoría de la Relatividad General de Einstein corresponde al caso particular $M^{-2} = 0$. Escriba las ecuaciones de campo para esta teoría y verifique que, si $\Lambda = 0$, estas ecuaciones no admiten la métrica de de Sitter como solución.