Estructura de la materia 3

NOTAS DE CLASE 10. REPASO. CAMPOS CLASICOS Y PRIMERA CUANTIFICACION

J. Miraglia

Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Argentina.

(Dated: October 22, 2013)

Abstract

faltas dibujos , espanol y bibliografia.

Primera cuantificacion. Estados de Volkov. Invariancia de gauge. Repaso. Radiacion electromagnetica clasica. Campos electricos y magneticos. Densidad de energia. Vector de Poynting. Aproximacion dipolar. Trabajando en una caja y la densidad de estados.

falta (seria interesante re-llamar $\lambda\overrightarrow{k}$ -> $\underrightarrow{k}$ ahorraria mucho espacio). No revise las notas

PACS numbers:

I. PRIMERA CUANTIFICACION

El Hamiltoniano de una particula de carga q sujeto al potencial V y al campo electromagnetico caracterizado por el potencial vector $\overrightarrow{A}$ esta dado por (Goldstein p. 256)

$$H = \frac{1}{2m}(\overrightarrow{p} - q\overrightarrow{A})^2 + qV, \tag{1}$$

Y este es el punto de partida. La Eq(1) nos permite cuantificar el movimiento de una particula segun las reglas de la (primera) cuantificacion (habra una segunda), que asume

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p} &\rightarrow \widehat{\overrightarrow{p}} = \frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}}, \\ \overrightarrow{r} &\rightarrow \overrightarrow{r}, \\ H &\rightarrow \widehat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2}$$

y asi queda la ecuacion conocida

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\overrightarrow{r},t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} - q\overrightarrow{A}\right)^2 + qV\right]\Psi(\overrightarrow{r},t), \tag{3}$$

Desarrollando el cuadrado

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} - q\overrightarrow{A}\right)^2 &= \left(\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}}\right)^2 - \frac{\hbar}{i}q\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} + \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}}\overrightarrow{A}\right) + q^2A^2, \\ &= -\hbar^2\nabla^2_{\overrightarrow{r}} - 2q\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla}_r + q^2A^2, \end{aligned} \tag{4}$$

donde hemos hecho

$$\overrightarrow{\nabla}_r\ \left(\overrightarrow{A}\Psi\right) = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}}\ \Psi + \underbrace{\left(\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}}\cdot\ \overrightarrow{A}\right)}_{=0\ \text{transverse gauge}}\Psi\ . \tag{5}$$

Finalmente podemos reescribir la ecuacion de Schroedinger asi

$$I\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\overrightarrow{r},t) = \left[H_0 + H' + H''\right]\ \Psi(\overrightarrow{r},t), \tag{6}$$

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\overrightarrow{r}} + qV = \text{Hamiltoniano mecanico o de la materia}, \tag{7}$$

$$H' = -\frac{q}{m}\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}_r = \text{interaccion materia-radiacion}, \tag{8}$$

$$H'' = \frac{q^2}{2m}A^2 = \text{Hamiltoniano del campo}, \tag{9}$$

Este es el Hamiltoniano semiclasico en el sentido que las magnitudes $\overrightarrow{A}$ y V son clasicas (campos clasicos) y el electron es puramente cuantico

A. Estados de Volkov

Supongamos una particula libre, autofuncion de H_0 con $V0 = 0$, cuya solucion es una onda plana

$$\psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r}, t) = \psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r}) \exp(-it\ \hbar^2 k^2/2m), \tag{10}$$

$$\text{con} \quad \varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m,$$

$$\psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r}) = \frac{\exp(i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{11}$$

Supongamos que a partir de $t = t_0$, aparece en todo el espacio un potencial vector $\overrightarrow{A}(t)$ (pero $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})$, o sea **independiente** de la posicion). Entonces la solucion del hamiltoniano son los llamados estados de Volkov :

$$\Psi(\overrightarrow{r}, t) = \psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r}) \exp(-iS(t)/\hbar), \tag{12}$$

$$S(t) = \frac{1}{2m} \int_{t_0}^{t} dt\ \left(\hbar \overrightarrow{k} - q\overrightarrow{A}(t)\right)^2, \tag{13}$$

donde hemos supesto que $V = 0$. Luego veremos que V y $\overrightarrow{A}(t)$ estan conectados via un gauge determinado. La demostracion es obvia. El LHS es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\overrightarrow{r}, t) = \Psi(\overrightarrow{r}, t)\ \underbrace{i\hbar \left(\frac{-i}{\hbar}\right)}_{1} \frac{1}{2m} \left(\hbar \overrightarrow{k} - q\overrightarrow{A}(t)\right)^2, \tag{14}$$

mientras que el RHS es

$$H_0 \Psi(\overrightarrow{r}, t) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi(\overrightarrow{r}, t), \tag{15}$$

$$H' \Psi(\overrightarrow{r}, t) = -\frac{q}{m} \frac{\hbar}{i} \overrightarrow{A} \cdot i\overrightarrow{k}\, \Psi(\overrightarrow{r}, t), \tag{16}$$

$$H'' \Psi(\overrightarrow{r}, t) = \frac{q^2}{2m} A^2 \Psi(\overrightarrow{r}, t). \tag{17}$$

Vemos que sumando las Eqs.(15), (16) y (17) iguala el RHS Eq.(14)

B. Invariancia de gauge

En Fisica basica se vio que los campos $\overrightarrow{E}$ y $\overrightarrow{B}$ quedan inalterados si se cambia

$$\overrightarrow{A} \rightarrow \overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\chi, \tag{18}$$

$$V \rightarrow V' = V - \frac{\partial}{\partial t}\chi,$$

donde $\chi(\overrightarrow{r},t)$ es una funcion arbitraria. En efecto

$$\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{\nabla}\times\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{\nabla}\chi\right) = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A} + \underbrace{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{\nabla}\chi}_{0} = \overrightarrow{B}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E'} &= -\overrightarrow{\nabla}V' - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A'} = -\overrightarrow{\nabla}\left(V - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\chi}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{A}+\underbrace{\overrightarrow{\nabla}\chi}\right),\\ &= -\overrightarrow{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{E}.\end{aligned} \tag{20}$$

Por lo tanto hay un espacio infinito de soluciones $\chi(\overrightarrow{r},t)$ tal que permiten hacer

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} = 0 \qquad \text{gauge de Coulomb si } \overrightarrow{A}\neq\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) \tag{21}$$

$$\overrightarrow{\nabla}.\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{\nabla}\chi\right) = 0 \qquad \text{con lo que,}$$

$$\nabla^2\chi = 0 \qquad \text{condicion de } \chi\ , \tag{22}$$

que es un excelente eleccion para tratar campos de radiacion (luz). Se llama a veces transverse gauge. Sin embargo hay muchismas posibilidades aun en el gauge de Coulomb Nos queda ver que impacto tiene la introduccion de $\chi(\overrightarrow{r},t)$ en la ecuacion de Schroedinger.

<u>Problema</u>. Nos preguntamos: *Si $\Psi(\overrightarrow{r},t)$ era la autofuncion de la ecuacion de Schrodinger cuando teniamos $\overrightarrow{A}$. como es la solucion $\Psi'(\overrightarrow{r},t)$ cuando hacemos $\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A}+\overrightarrow{\nabla}\chi$ y $V' = V - \frac{\partial}{\partial t}\chi$* ? Reemplazandolo $\overrightarrow{A'}$ en la ecuacion de Schroedinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi'(\overrightarrow{r},t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} - q\underbrace{[\overrightarrow{A}+\overrightarrow{\nabla}\chi]}_{\overrightarrow{A'}}\right)^2 + q\underbrace{[V-\frac{\partial}{\partial t}\chi]}_{V'}\right]\Psi'(\overrightarrow{r},t). \tag{23}$$

Puede demostrarse que

$$\Psi'(\overrightarrow{r},t) = \Psi(\overrightarrow{r},t)\exp[iq\chi(\overrightarrow{r},t)/\hbar]. \tag{24}$$

O sea la inclusion de $\chi(\overrightarrow{r},t)$ conlleva a una rotacion de la funcion de onda. Tenemos libertad para elejir $\chi(\overrightarrow{r},t)$. Por ejemplo si elijo

$$\chi(\overrightarrow{r},t) = -\overrightarrow{A}(t)\cdot\overrightarrow{r}, \text{ que verifica,} \tag{25}$$

$$\nabla^2\chi(\overrightarrow{r},t) = 0, \tag{26}$$

con lo cual satisface el gauge transversal de acuerdo a la Eq.(22). Los terminos de interes en la Eq.(24)

$$\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A}+\overrightarrow{\nabla}\chi = \overrightarrow{A}+\overrightarrow{\nabla}(-\overrightarrow{A}.\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{A}-\overrightarrow{A} = 0, \tag{27}$$

$$V' = V - \frac{\partial}{\partial t}\chi = 0 - \frac{\partial}{\partial t}(-\overrightarrow{A}.\overrightarrow{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}\right).\overrightarrow{r} = -\overrightarrow{E}(t).\overrightarrow{r}, \tag{28}$$

donde hemos usado el hecho que $.\overrightarrow{E}(t) = -\partial\overrightarrow{E}(t)7\partial t$. Reemplazando en la Eq.(23), resulta

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi'(\overrightarrow{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\overrightarrow{r}} - q\overrightarrow{E}(t).\overrightarrow{r}\right]\Psi'(\overrightarrow{r},t), \tag{29}$$

que se llama forma de la **longitud**, mientras que la Eq(3) se la conoce como la forma de la **velocidad.** Hay una tercera forma que involucra a una expresion determinada del Hamiltoniano que se llama forma de la **aceleracion o fuerza** que veremos mas adelante.

Como trabajamos en MKS, podemos ver que la dimension es correcta, $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}(r)$ es la fuerza que realiza el campo sobre la carga y $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{r}$ es la energia que se suma a la energia cinetica. Mas aun, podriamos haber introducido directamenet el hamiltoniano Eq(29) invocando la inclusion del campo electrico de la misma manera que se introdujo cuando se vio el efecto Stark. En ese caso -recordemos- $\overrightarrow{E} = E\widehat{z} = Cte$, con lo que $q\overrightarrow{E}.\overrightarrow{r} \to eEz$, que es la perturbacion que se usa en el efecto Stark.

C. Radiacion electromagnetica clasica

Las 4 ecuaciones de Maxwell en el vacio son

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = \rho/\varepsilon_0 & \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} \\ \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B} = 0 & \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases}, \tag{30}$$

y los potenciales son

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}, \tag{31}$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}. \tag{32}$$

En el **gauge de Coulomb (temporal)** los potenciales satisfacen

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{33}$$

por lo que las ecuaciones para $\overrightarrow{A}$ y V se reducen a

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{34}$$

$$\nabla^2\overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overrightarrow{A} = -\mu_0\overrightarrow{J}, \tag{35}$$

En ausencia de cargas ($\rho = 0$) y corrientes electricas ($\overrightarrow{J} = 0$), la soluciones de $\overrightarrow{A}$ en una caja de vacio de un campo de luz clasicos de frecuencias ω, o sea

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) &= \overrightarrow{\mathcal{A}}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) + \overrightarrow{\mathcal{A}}^*_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t), & (36)\\
\overrightarrow{\mathcal{A}}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) &= \widehat{\varepsilon}_{\lambda \overrightarrow{k}}\ A_N \exp[i \overrightarrow{k} . \overrightarrow{r} - i\omega t + i\delta_\omega], & (37)\\
\overrightarrow{\mathcal{A}}^*_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) &= \widehat{\varepsilon}^*_{\lambda \overrightarrow{k}}\ A^*_N \exp[-i \overrightarrow{k} . \overrightarrow{r} + i\omega t - i\delta_\omega], & (38)\\
V &= 0. & (39)
\end{aligned}$$

Como pedimos que $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0$ (de (33) con $V = 0$), resulta que $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} \propto \widehat{\varepsilon}_{\lambda \overrightarrow{k}} \cdot \widehat{k}$ con lo que el transverse gauge se satisface ya que los dos versores de polarizacion son ortogonales a $\overrightarrow{k}$

$$\widehat{\varepsilon}_{1 \overrightarrow{k}} \cdot \widehat{k} = \widehat{\varepsilon}_{2 \overrightarrow{k}} \cdot \widehat{k} = \widehat{\varepsilon}_{1 \overrightarrow{k}} \cdot \widehat{\varepsilon}_{2 \overrightarrow{k}} = 0, \tag{40}$$

y los tres forman una terna ortonormal. Si tenemos el transverse gauge $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0$, con $V = 0$, entonces tambien tenemos el gauge de Coulomb. Si pedimos que $\overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}}$ satisfaga la Eq.(35) entonces

$$\omega = c\ k, \tag{41}$$

c es la velocidad de la luz, $[c]$=metro/segundo, k es el numero de onda ($[k]$=1/metro), y $\omega = 2\pi\nu$, ν es la frecuencia $[\omega] = [\nu]$=1/segundo, de modo tal que la energia del foton es $E = \hbar\omega = h\nu$. En general la funcion $\omega = \omega(k)$ representa una relacion de dispersion, y conocemos algunos casos particulares

$$\begin{cases}
\text{fotones} & \hbar\omega = \hbar c\ k & \text{lineal en } k,\\
\text{particulas} & \hbar\omega = \hbar^2\ k^2/2m & \text{cuadratico en } k,\\
\text{plasmones} & \hbar\omega \simeq cte & \text{independiente de } k,\\
\text{fonones} & \hbar\omega \simeq 0 & \text{nulo,}
\end{cases} \tag{42}$$

Fisicamente, podemos decir que

$$\begin{cases}
\widehat{\varepsilon}_{1 \overrightarrow{k}} \text{ y } \widehat{\varepsilon}_{2 \overrightarrow{k}} & \text{son versores de polarizacion}\\
 & \text{(direccion del campo elect. y mag.),}\\
\omega \text{ ó } k \text{ ó } \nu & \text{representa la energia o color ,}\\
\delta_\omega & \text{es la fase aleatoria (si la luz es no ,}\\
 & \text{coherente) deberia ser promediada.}
\end{cases} \tag{43}$$

Nos queda definir el valor de A_N que resultara ser

$$\begin{aligned} A_N &= A_N(\omega) = \sqrt{\frac{\hbar N(\omega)}{2\varepsilon_0 \omega V}}, & (44) \\ N(\omega) &= \text{ numero de fotones con energia } \hbar\omega, & (45) \\ V &= \text{ volumen de la caja de cuantificacion,} & (46) \end{aligned}$$

que la demostraremos en la proxima seccion.

De acuerdo a las expresiones (36) y (37) $\overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}}$ resulta ser real y vale

$$\overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = \widehat{\varepsilon}_{\lambda \overrightarrow{k}}\ 2A_N \cos[\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - \omega t + \delta_\omega]. \tag{47}$$

El espacio de todas las posible estados sera

$$\overrightarrow{A} = \sum_{\lambda \overrightarrow{k}} \overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t), \tag{48}$$

que tienen en cuenta todas los posibles $\overrightarrow{k}$ y $\widehat{\varepsilon}_{\lambda \overrightarrow{k}}$. Es una base.

D. Campos electricos y magneticos

Una vez que esta determinada la magnitud $\overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t)$ nos queda definir los campos electricos y magneticos de acuerdo a sus definiciones.

a) El **campo electrico** es de (31)

$$\overrightarrow{E}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = -\widehat{\varepsilon}_{\lambda \overrightarrow{k}}\ 2\omega A_N \sin[\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - \omega t + \delta_\omega]. \tag{49}$$

Re-identificamos entonces a $\widehat{\varepsilon}_{\lambda \overrightarrow{k}}$ como la direccion del campo electrico (algo bien conocido en optica, el sentido de la polarizacion de los fotones corresponde a la del campo electrico).

b) El **campo magnetico** resulta un poco mas complejo ya que requiere del rotor

$$\overrightarrow{B}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = -(\overrightarrow{k} \times \widehat{\varepsilon}_{\lambda \overrightarrow{k}})\ 2A_N \sin[\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - \omega t + \delta_\omega], \tag{50}$$

donde hemos usado la identidad

$$\overrightarrow{\nabla} \times \widehat{\varepsilon}_{\lambda \overrightarrow{k}} \exp(i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}) = i(\overrightarrow{k} \times \widehat{\varepsilon}_{\lambda \overrightarrow{k}}) \exp(i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}). \tag{51}$$

Confirmamos de la Eq.(**??**) que la direccion del campo magnetico es perpendicular a la del campo electrico, y que ambas estan en fase en el tiempo (estamos en el vacio). Notemos ademas que $\overrightarrow{E}_{\lambda\overrightarrow{k}} \propto \omega$, mientras que $\overrightarrow{B}_{\lambda\overrightarrow{k}} \propto k$ con lo que se encuentra que

$$E_{\lambda\overrightarrow{k}} = cB_{\lambda\overrightarrow{k}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}B_{\lambda\overrightarrow{k}} \tag{52}$$

c) De la fisica elemental se vio que **densidad de energia** o sea la energia U de un campo electromagnetico por unidad de volumen V era

$$\rho(\omega) = \frac{U_{\lambda\overrightarrow{k}}}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\overrightarrow{E}_{\lambda\overrightarrow{k}}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\overrightarrow{B}_{\lambda\overrightarrow{k}}|^2. \tag{53}$$

Reemplazando los campos obtenidos en las Eqs.(49) y (52), tenemos

$$\rho(\omega) = \varepsilon_0|\overrightarrow{E}_{\lambda\overrightarrow{k}}|^2 = 4\varepsilon_0\omega^2 A_N^2 \sin^2[\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - \omega t + \delta_\omega], \tag{54}$$

y es una expresion que depende del tiempo. Se toma el valor medio que se define

$$\langle f \rangle \;=\; \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt, \qquad \text{entonces,} \tag{55}$$

$$\langle \sin^2(\alpha - \omega t)\rangle \;=\; \langle \cos^2(\alpha - \omega t)\rangle = \frac{1}{2}, \tag{56}$$

la densidad de energia es

$$\langle \rho(\omega)\rangle = 2\varepsilon_0\omega^2 A_N^2. \tag{57}$$

Ahora estamos en condiciones de determinar el valor de $A_N(\omega)$. Si en el volumen V hay $N(\omega)$ fotones con energias $\hbar\omega$ entonces obviamente la densidad de energia es

$$\langle \rho(\omega)\rangle = \frac{\hbar\omega}{V}N(\omega). \tag{58}$$

Igualando ecuaciones (57) y (58) podemos determinar el valor de A_N que anticipamos en la Eq.(59), repetimos

$$A_N = A_N(\omega) = \sqrt{\frac{\hbar N(\omega)}{2\varepsilon_0\omega V}}. \tag{59}$$

Nosotros estamos trabajando en el sistema MKS. Pero en muchos libros americanos (el Jackson por ejemplo) se usa el sistema gaussiano, en ese caso hacemos $4\pi\varepsilon_0 \equiv 1$ con lo que

$$A_N = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}. \tag{60}$$

d) Una magnitud interesante que se usa para determinar los flujos de radiacion es el **vector de Poynting,** que se define

$$\overrightarrow{S} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B} \tag{61}$$

veamos primero las unidades

$$[S] = \frac{\text{Ampere}}{\text{Tesla} \times \text{metro}}\frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}}\text{Tesla=} = \frac{\text{Joule}}{\text{metro}^2 \times \text{segundo}}, \tag{62}$$

o sea flujo es de energia por unidad de tempo y area. (para tener una idea, el vector de Poynting debido al sol sobre la tierra es 1.4 kiloWatt/m^2,sumando toda las frecuencias). Reemplazando Eqs(49) y (52) en la Eq.(61) resulta

$$\overrightarrow{S} = \frac{\widehat{k}}{\mu_0}E\overbrace{\frac{E}{c}}^{B} = \widehat{k}\varepsilon_0 cE^2 = \widehat{k}\ 4c\varepsilon_0\omega^2 A_N^2 \sin^2[\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - \omega t + \delta_\omega], \tag{63}$$

donde hemos usado el hecho que

$$\widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}} \times (\overrightarrow{k} \times \widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}}) = \widehat{k}, \tag{64}$$

haciendo un provedio temporal resulta que

$$\langle\overrightarrow{S}\rangle = \widehat{k}\ c\ 2\varepsilon_0\omega^2 A_N^2, \tag{65}$$

hay otra forma mas compactade escribirla y es reemplazar $\langle\rho(\omega)\rangle = 2\varepsilon_0\omega^2 A_N^2(\omega)$ lo que resulta

$$\langle\overrightarrow{S}\rangle = \widehat{k}\ c\,\langle\rho(\omega)\rangle\ \ , \tag{66}$$

y esta es tal vez la expresion mas utilizada del flujo energetico de fotones como si fuese un fluido.

Recordemos que $\overrightarrow{S}$ nos da el flujo energetico. Si estamos interesados en el flujo solo esto es el **numero de particulas** por unidad de tiempo y area $\langle\overrightarrow{F}\rangle$, tenemos que dividir $\langle\overrightarrow{S}\rangle$ por $(\hbar\omega)$, o sea por la energia de las particulas, que da

$$\langle\overrightarrow{F}\rangle = \frac{\langle\overrightarrow{S}\rangle}{\hbar\omega} = \widehat{k}\ \frac{1}{\hbar k}\,\langle\rho(\omega)\rangle\,. \tag{67}$$

Definamos la **presion** de la radiacion :

$$\overrightarrow{P} = \frac{1}{c}\overrightarrow{S} = \widehat{k}\ \ \langle\rho(\omega)\rangle\ .,$$

cuyas unidades son:

$$[P] = \frac{Joule}{m^2 \times seg} \times \frac{seg}{m} = \frac{Newton}{m^2} = [\text{presion}]. \tag{68}$$

(Para tener una idea, la presión del sol a la altura de la Tierra es $5{\times}10^{-6} Nw/m^2$, y toda la tierra recibe una fuerza de 10^8Newtons). Tambien se define el **momento lineal** y para twisted light tambien el **momento angular.**

E. Aproximacion dipolar

Como vemos $\overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}} \propto \exp(\pm i \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})$, donde $k = \omega/c = 2\pi\nu/c$. Debido a que c es muy grande, el momento del foton k puede despreciarse.

Ejemplo: luz amarilla $\nu = 0.5 \times 10^{15} 1/\text{seg}$, $k = 2\pi\nu/c \simeq 0.0005$, Notemos que $\exp(i0.0005) \simeq 1$. Y en general vale para todo el espectro de luz visible e inclusive el ultravioleta.

El valor de k sera importante cuando $kr \gtrsim 1$, o sea $\omega r > c$, o $(2\pi\nu)r > c$, o $\nu > c/(2\pi r)$. para dimensiones atomicas $r \simeq a_0 = 5 \times 10^{-11}$ metros, $c = 3 \times 10^8$ metros/segundos, con lo que $\nu > 10^{20}$ 1/segundo. Que corresponde a los rayos X duros. Si estamos trabajando a nivel de fisica nuclear, los valores de r son digamos 1000 veces mas chicos con lo que la radiacion corresponde a los rayos gamma.

F. Trabajando en una caja y la densidad de estados del foton

Cuando teniamos particulas libres o con paquetes de ondas, las ondas planas **en todo el espacio**, se normalizaba a la delta de Dirac, esto es

$$\int d\overrightarrow{r} \frac{\exp(-i\overrightarrow{k'}.\overrightarrow{r})}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\exp(-i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})}{(2\pi)^{3/2}} = \delta(\overrightarrow{k'} - \overrightarrow{k}). \tag{69}$$

Cuando se trabaja con fotones se trabaja **en una caja**, como ya lo hicimos con electrones en Thomas Fermi. En este caso el concepto seria luego reducido a la densidad que fue al final la magnitud que sobrevivio Aqui no, el volumen es el volumen de todo el espacio de interes y se supone que $L =$ longitud de la caja deberia ser tendido a infinito al final del calculo. Se espera que el resultado no dependa del volumen (y si uno es cuidadose, efectivamente no depende). En realidad las ondas planas aqui se refieren a las exponenciales $\exp(\pm i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})$

que aparecen en las definicion de $\overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t)$. Cuando tenemos una caja los valores de k no se consideran continuos sino que estan -digamos- numerizados. Tomemos una dimension

$$\begin{aligned} \exp(ik_x x) &= \cos(k_x x) + i\sin(k_x x), \qquad \text{con} \;\; k_x = \frac{2\pi}{L} n_x \;, & (70) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{L} n_x x\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{L} n_x x\right), & (71) \end{aligned}$$

y asi con todas las dimensiones. De esta manera numerizamos todos los "colores" posibles, La suma $\sum_{\lambda \overrightarrow{k}}$ en Eq.(48) ahora se reduce a $\sum_{\lambda,\ n_x, n_y, n_z}$ Las deltas de Dirac se transforman en deltas de Kronecker. Veamoslo, en una dimension. Se puede reescribir todo en terminos de $n_x = n_x$y n'_x sabiendo que $k_x = k_x(n_x) = 2\pi n_x/L$, y $k'_x = k'_x(n'_x) = 2\pi n'_x/L$

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{+L/2} dx \frac{\exp(-i\overbrace{2\pi n'_x/L}^{k'_x}\; x)}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\exp(-i\overbrace{2\pi n_x/L}^{k_x}\; x)}{(2\pi)^{1/2}} &= \frac{L}{2\pi}\delta_{n_x, n'_x}, \\ \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{L} \exp[-i2\pi n'_x x/L] \exp[-ik2\pi n_x x/L] &= \delta_{n_x, n'_x}, & (72) \end{aligned}$$

y todo quedo en terminos de n'_x y n_x. En tres dimensiones resulta, compactandolo

$$\int_{Caja} \frac{d\overrightarrow{r}}{V} \exp[-i\overrightarrow{k'}(\overrightarrow{n'}).\overrightarrow{r}] \exp[-i\overrightarrow{k}(\overrightarrow{n}).\overrightarrow{r}] = \delta_{\overrightarrow{n'},\ \overrightarrow{n}}. \qquad (73)$$

Entonces el Volumen reemplaza a $(2\pi)^3$ y la delta de Kronecker $\delta_{\overrightarrow{n'},\ \overrightarrow{n}}$ a la de Dirac $\delta(\overrightarrow{k'} - \overrightarrow{k})$ ya que $\overrightarrow{n'}$ y $\overrightarrow{n}$ son ahoras las variables.

Una cantidad muy importante es la densidad de estados, y esta resulta de la Eq.(71),.

$$\begin{aligned} dn_x &= \frac{L}{2\pi} dk_x, \qquad dn_y = \frac{L}{2\pi} dk_y, \qquad dn_z = \frac{L}{2\pi} dk_z, \\ d\overrightarrow{n} &= \frac{V d\overrightarrow{k}}{(2\pi)^3}, \quad \text{alternativamente si} \;\; k = \omega/c, & (74) \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3 c^3} d\overrightarrow{\omega} = \frac{V}{(2\pi)^3 c^3} \omega^2 d\omega d\Omega_\omega. & (75) \end{aligned}$$

Esta cantidad la usaremos mucho cuando nos referiremos en el calculo de la seccion eficaz a la densidad de estados del foton. Como todo sera independente de V ya que se simplificara. Esta es la razon por la cual se usa directamente $V = 1$.