

Estructura 3

NOTAS DE CLASE 15. Un foton aparece. Bremsstrahlung

J. E. Miraglia,

*Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Argentina.*

(Dated: November 8, 2013)

Abstract

HOJA DE RUTA Identificación del proceso. Regla de oro de Fermi. Densidad de estados finales e integración. Elemento de matriz.

CALCULO EN PRIMER ORDEN PERTURBATIVO. Fórmula diferenciales. Ecuación de Bethe Heitler

APPENDICE. ESTIMACION DEL ELEMENTO DE MATRIZ

OBSERVACIONES

falta altas dibujos , español y bibliografía. Sería conveniente hacer un nuevo ítem que incluya creación y aniquilación y relacionarlo con bremsstrahlung y Compton incorporar cálculo de creación de pares. En esta versión no corregí la creación de pares, quedó de lo viejo

PACS numbers:

I. HOJA DE RUTA

Siguiendo los mismos items que las notas anteriores.

Identificacion del proceso. El decaimiento radiativo consistia de una emision fotonica como consecuencia de una transicion que involucraba estados ligados (los dos, el inicial y final). La captura o recombinacion radiativa considera que el estado inicial esta en el continuo (es decir incide un electron) y finalmente queda atrapado en un estado ligado. El bremsstrahlung (o radiacion de frenado) es un proceso que involucra estados del continuo (los dos, el inicial y el final). Esquematicamente

$$\text{Proyectil} + \text{Blanco} \rightarrow \text{Proyectil} + \text{Blanco} + \hbar\omega, \quad (1)$$

$$\text{Proyectil} = e, e^+, H^+, \bar{p}, \text{iones}[He^{++}, He^+(1s)], \text{ etc} \quad (2)$$

$$\text{Blanco} = \text{atomos, molculas, iones, etc.} \quad (3)$$

O sea que el blanco y proyectil mantienen su identidad y la energia del foton con vector \hat{k} y polarizacion $\hat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}}$ es proveida por parte de la cinetica del proyectil. Lo que determina la energia del foton aqui es, como siempre, el balance de la energia

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \varepsilon_f + \hbar\omega, \\ \frac{(\hbar k_i)^2}{2m} &= \frac{(\hbar k_f)^2}{2m} + \hbar\omega, \end{aligned} \quad (4)$$

y aqui hay un espacio adicional \vec{k}_f (con su densidad de estados $d\vec{k}_f$) que permiten un abanico de posibilidades de $\hbar\omega$. A diferencia de la captura radiativa y la emision espontanea que producen espectros de **lineas**, el bremsstrahlung produce un espectro de **radiacion continua**.

El elemento de matriz interviniente es, como hasta ahora,

$$\left\langle 1_{\lambda\vec{k}} \psi_f | H_{\lambda\vec{k}}^+ | 0_{\lambda\vec{k}} \psi_i \right\rangle = -\frac{q}{m} A_1 \hat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_f \leftarrow \vec{k}_i}. \quad (5)$$

Nos concentraremos en el caso de impacto electronico (la generalizacion a iones pesados es inmediata), donde tenemos

$$\psi_{\vec{k}_i}^{\pm}(r), \quad \text{funcion del continuo inicial} \quad (6)$$

$$\psi_{\vec{k}_f}^{\pm}(r), \quad \text{funcion del continuo final, que verifican} \quad (7)$$

$$\left\langle \psi_{\vec{k}_f}^{\pm}(r) | \psi_{\vec{k}_i}^{\pm}(r) \right\rangle = \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_f), \quad (8)$$

donde $\psi_{\vec{k}_i}^{\pm}(r)$ no necesariamente son funciones hidrogenicas, sino continuos en el potencial de cualquier atomo, ion, o molecula.

Regla de oro de Fermi. El proceso fisico es muy similar al de captura radiativa. La unica diferencia es que ahora el estado final es el continuo; no mas el estado ligado. Siguiendo exactamente la misma notacion y suponiendo que no hay fotones en el medio esto es el vacio, la expresion de partida es exactamente la misma, o sea

$$\frac{d W_{i \rightarrow f}^{\pm}}{dt d \vec{f}} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta [E_f - E_i] \left| \left\langle 1_{\lambda \vec{k}} \psi_f | H_{\lambda \vec{k}}^+ | 0_{\lambda \vec{k}} \psi_i \right\rangle \right|^2, \quad (9)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \delta [(\varepsilon_f + \hbar\omega) - \varepsilon_i] \frac{e^2}{m^2} A_1^2 \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_f \leftarrow \vec{k}_i} \right|^2. \quad (10)$$

Si tuviesemos solo interaccion culombiana, el blanco es una carga puntual, o sea la reaccion

$$q_{\vec{k}_i}^{\pm} + Z^+ \rightarrow q_{\vec{k}_f}^{\pm} + Z^+ + \hbar\omega, \quad (11)$$

donde indicamos con Z es la carga nuclear y q en general indica la carga del proyectil. En el caso de tener electrones incidente resulta que $q = -e$. Las funciones de onda en este caso son conocidas, las de siempre, o sea (repito lo mismo)

$$\psi_{\vec{k}_i}^+(\vec{r}) = \psi_{\vec{k}_i}(\vec{r}) D^+(a_i, \vec{k}_i | \vec{r}), \quad (12)$$

$$\psi_{\vec{k}_f}^-(\vec{r}) = \psi_{\vec{k}_f}(\vec{r}) D^-(a_f, \vec{k}_f | \vec{r}), \quad (13)$$

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{\exp(i \vec{k} \cdot \vec{r})}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (14)$$

$$D^{\pm}(a, \vec{k} | \vec{r}) = \exp(a\pi/2) \Gamma(1 \mp ia) {}_1F_1(\pm ia; 1; \pm ikr - i \vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (15)$$

$$a_i = -Zeqm/k_f \hbar^2 \quad a_f = -Zeqm/k_f \hbar^2, \quad (16)$$

y m es la masa reducida de los sistemas colisionantes. Los elementos de matriz son analiticos y son las integrales de Nordsieck (ver apendice de Notas 1).

Densidad de estados finales e integracion. Aqui comienza la diferencia con la captura radiativa que hace mas complejo este proceso y es en la descripcion del estado final. En la captura radiativa teniamos, en el canal final, solamente el espacio de los fotones. En bremsstrahlung tenemos ademas el espacio de los electrones dispersados $d \vec{k}_f$, esto es

$$d \vec{f} = \underbrace{\sum_{\lambda} \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} d \vec{k}}_{\text{foton}} \underbrace{d \vec{k}_f}_{\text{electron}}, \quad (17)$$

donde con \vec{k} queremos indicar todo el espacio de posibilidades del foton. y con $d\vec{k}_f$ la del electron dispersado. Esto suma 3 dimensiones mas al problema que lo hace mas tedioso. Amen del calculo de los elementos de matriz que involucra funciones hypergeometricas en el mejor de los casos.

Aca tenemos dos alternativas para proceder a calcular la probabilidad. O estamos interesados en el electron dispersado o en el espectro fotonico. Ya que estamos en emision de radiacion nos concentraremos en el espectro fotonico

$$\int d\vec{k}_f \delta[\varepsilon_i - \varepsilon_f - \hbar\omega] = \int d\vec{k}_f \delta\left[\frac{(\hbar k_i)^2}{2m} - \frac{(\hbar k_f)^2}{2m} - \hbar\omega\right], \quad (18)$$

$$= \int d\Omega_f \int dk_f k_f^2 \delta\left[\frac{\hbar^2}{2m}(k_f^2 - k_{f\omega}^2)\right], \quad \text{con,} \quad (19)$$

$$k_{f\omega} = k_f(\omega) = \sqrt{k_i^2 - \frac{2m}{\hbar}\omega} = k_f, \quad (\text{para simplificar}) \quad (20)$$

$$\vec{k}_f \delta[\varepsilon_i - \varepsilon_f - \hbar\omega] = \int d\Omega_f \frac{2m}{\hbar^2} \frac{k_f^2}{2k_f} = \int d\Omega_f \frac{m}{\hbar^2} k_f. \quad (21)$$

Notese que ahora $k_f = k_f(\omega)$, lo que indica que la velocidad de salida del electron depende de la del foton. Reemplazando en la probabilidad, tenemos

$$\frac{d W_{i \rightarrow f}^+}{dt d\Omega_f d\vec{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \left(\frac{m}{\hbar^2} k_f\right) \frac{e^2}{m^2} A_1^2 \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{p} \right\rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2 \quad (22)$$

haciendo $\vec{\omega} = c\vec{k}$,

$$\frac{d W_{i \rightarrow f}^+}{dt d\Omega_f d\vec{\omega}} = \frac{1}{(2\pi)^2 (\hbar c)^3} \mathcal{V} \frac{k_f q^2}{m} \overbrace{\frac{A_1^2}{2\varepsilon_0 \omega \mathcal{V}}} \sum_{\lambda} \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{p} \right\rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2, \quad (23)$$

$$= \frac{k_f}{2\pi} \frac{q^2}{\hbar^2 c^3 \omega m} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\lambda} \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{p} \right\rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2, \quad (24)$$

y como siempre se simplifico en volumen de la caja \mathcal{V} .

Seccion eficaz. En estos casos, la magnitud de interes es la seccion eficaz, con lo que debemos obtenerla dividiendo la probabilidad por el flujo incidente de electrones

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f d\vec{\omega}} = \frac{d W_{i \rightarrow f}^+}{dt d\Omega_f d\vec{\omega}} \frac{1}{J_{in}}, \quad (25)$$

donde J_{in} ya fue calculado en la captura radiativa y es $J_{in} = \hbar k_i / ((2\pi)^3 m)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f d\vec{\omega}} = \frac{(2\pi)^3 m}{\hbar k_i} \frac{k_f}{2\pi \hbar^2 c^3 \omega m} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{p} \right\rangle_{fi} \right|^2, \quad (26)$$

$$= (2\pi)^2 \frac{k_f}{k_i} \frac{1}{\omega \hbar^3 c^3} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{p} \right\rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2. \quad (27)$$

,Ahora pasamos a unidades atomicas que resulta con $q = \pm e$, $\hbar = m = e^2 / 4\pi \epsilon_0 = 1$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f d\vec{\omega}} = \frac{(2\pi)^2 k_f}{\omega c^3 k_i} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{p} \right\rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2. \quad (28)$$

El elemento de matriz. Como hemos indicado el elemento de matriz $\left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{p} \right\rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+}$ para el caso Culombiano puro es analitico. Para otro caso mas general de potencial central $V(r)$, se requiere una fuerte dosis de algebra. Si adoptamos la aproximacion dipolar $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 1$, entonces

$$\langle \vec{p} \rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \int d\vec{r} \psi_{\vec{k}_f}^-(\vec{r}) \left(\frac{1}{i} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right) \psi_{\vec{k}_i}^+(\vec{r}). \quad (29)$$

Las integrales de Nordsieck permiten calcular estos terminos exactamente. Luego se proyecta sobre los $\hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}}$ y posteriormente se integra sobre $d\Omega_f$ y asi obtengo $d\sigma/d\vec{\omega}$ O sea el espectro fotonico que es de interes aqui. Para otros caso centrales pero no Culombianos, el calculo requiere de elementos de matriz *free-free* que involucran integrales complicadas. Seguimos en unidades atomicas.

A. CALCULO EN PRIMER ORDEN PERTURBATIVO

En el Apendice demostramos que a primer orden pertutbativo el elemento $\langle \vec{p} \rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+}$ esta dado por

$$i \langle \vec{p} \rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \vec{k}_i \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_f) + \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\tilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_f)}{k_f^2 - k_i^2 + i\epsilon} (\vec{k}_i - \vec{k}_f) + O(V^2), \quad (30)$$

La primera e interesante conclusion es que el primer termino $O(V^0)$ es la conservacion del momento con lo cual impone $\vec{k}_i = \vec{k}_f$ pero contradice la conservacion de la energia y por lo tanto debe ser nulo. O mas precisamente si $\vec{k}_i = \vec{k}_f$ tenemos una colision elastica y no hay energia para el foton. Fisicamemente nos dice algo muy importante: una partucula libre (ausencia de potencial) no puede emitir fotones.

Lo interesante del desarrollo que hemos hecho es que no necesariamente nos debemos circunscribir a la interaccion culombiana: V puede tener cualquier forma . Esto da lugar a, por ejemplo, atomos, o sea

$$e_{\vec{k}_i}^- + \text{Atomo} \rightarrow e_{\vec{k}_f}^- + \text{Atomo} + \hbar\omega. \quad (31)$$

Vamos a considerar un potencial del tipo de Yukawa para tener una idea del comportamiento de un blanco atomico neutro del tipo

$$V(r) = -Z \frac{\exp(-\lambda r)}{r}, \quad \text{por lo que ,} \quad (32)$$

$$\tilde{V}(\vec{u}) = -Z \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{u^2 + \lambda^2}, \quad (33)$$

donde Z seria la carga nuclear del atomo. Reemplazando la Eq.(33) en (30) y removiendo $+i\epsilon$ ya que sabemos siempre $k_i^2 > k_f^2$ resulta

$$\sum_{\lambda} \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \langle \vec{p} \rangle_{\vec{k}_f \leftarrow \vec{k}_i} \right|^2 = \frac{2^2}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{V}^2(\vec{k}_i - \vec{k}_f)}{(k_f^2 - k_i^2)^2} \sum_{\lambda} \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_f) \right|^2. \quad (34)$$

Y ahora nos queda definir los versores, Seguimos el mismo criterio de siempre

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{k}_i = (0, 0, 1), \quad \text{electron incidente} \\ \hat{k}_f = (\sin \theta_f \cos \varphi_f, \sin \theta_f \sin \varphi_f, \cos \theta_f), \quad \text{electron dispersado} \\ \hat{k} = (\sin \theta, 0, \cos \theta), \quad \text{foton} \\ \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} = (0, 1, 0), \\ \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} = (\cos \theta, 0, -\sin \theta), \end{array} \right. \quad (35)$$

entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{k}_i - \vec{k}_f = (-k_f \sin \theta_f \cos \varphi_f, -k_f \sin \theta_f \sin \varphi_f, k_i - k_f \cos \theta_f), \\ (\vec{k}_i - \vec{k}_f)^2 = k_i^2 + k_f^2 - 2k_i k_f \cos \theta_f, \end{array} \right. , \quad y \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_f) = -k_f \sin \theta_f \sin \varphi_f, \\ \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_f) = -k_i \sin \theta - k_f \cos \theta \sin \theta_f \cos \varphi_f + k_f \sin \theta \cos \theta_f, \end{array} \right. . \quad (37)$$

Nos va a convenir reproducir aca un resultado que se obtiene recurriendo a un programa de algebra

$$I_{\Omega} = \int \underbrace{d\Omega_{\omega}}_{\text{foton}} \int \underbrace{d\Omega_f}_{\text{electron}} \left[\tilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \right]^2 \sum_{\lambda} \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_f) \right|^2, \quad (38)$$

Luego de tedioso calculo resulta ser para el potencial de Yukawa (33)

$$I_{\Omega} = \frac{16\pi Z^2}{3k_f k_i} (L - X), \quad (39)$$

$$L = \log \frac{(k_i + k_f)^2 + \lambda^2}{(k_i - k_f)^2 + \lambda^2}, \quad (40)$$

$$X = \frac{4k_f k_i \lambda^2}{(k_i^2 - k_f^2)^2 + 2\lambda^2(k_i^2 + k_f^2) + \lambda^4}. \quad (41)$$

Obviamente la conservacion de la energia impone $k_f = \sqrt{k_i^2 - 2\omega}$ con lo que la maxima energia sera cuando

$$k_f^2 = k_i^2 - 2\omega_{\max} > 0, \quad (42)$$

$$\omega_{\max} < \frac{k_i^2}{2}. \quad (43)$$

Para el caso extremo en que $\omega = k_i^2/2$, se transformo toda la energia cinetica del electron incidente en la del foton y finalmente quedo "quieto", $k_f = 0$. Reemplazando, tenemos

$$\frac{d\sigma}{\omega^2 d\omega} = \frac{(2\pi)^2 k_f}{\omega c^3 k_i} \frac{2^2}{(2\pi)^3 (k_f^2 - k_i^2)^2} \frac{16\pi Z^2}{3k_f \omega k_i} (L - X) \quad (44)$$

$$= \frac{32 Z^2}{3\omega c^3} \frac{1}{k_i^2} \frac{1}{(2\omega)^2} (L - X) \quad (45)$$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{8 Z^2}{3\omega c^3} \frac{1}{k_i^2} (L - X) \quad (46)$$

A primer orden perturbativo en Z hemos resuelto analiticamente el problema.

Pero esta no es la ecuacion mas famosa. Si consideramos k_i muy grandes, $k_i \gg \lambda$, y para bajos valores de ω entonces podemos aproximar

$$\lambda \ll k_f = \sqrt{k_i^2 - 2\omega} \approx k_i - \frac{\omega}{k_i} + .. \quad (47)$$

con lo que

$$X = \frac{4k_f k_i \lambda^2}{\underbrace{(k_i^2 - k_f^2)^2}_{(2\omega)^2} + \underbrace{2\lambda^2(k_i^2 + k_f^2)}_{\sim 4k_i^2 \lambda^2} + \lambda^4} \simeq 1, \quad (48)$$

$$L = \log \frac{(k_i + k_f)^2 + \lambda^2}{(k_i - k_f)^2 + \lambda^2} \simeq \log \frac{4k_i^2}{(\frac{\omega}{k_i})^2} \simeq 2 \log \frac{2k_i^2}{\omega}. \quad (49)$$

Entonces $d\sigma/d\omega$ se reduce a

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \simeq \frac{16 Z^2}{3\omega c^3} \frac{1}{k_i^2} \left(\log \frac{2k_i^2}{\omega} - \frac{1}{2} \right), \quad (50)$$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \simeq \frac{16 Z^2}{3\omega c^3} \frac{1}{k_i^2} \log \frac{2k_i^2}{\alpha\omega}, \quad (51)$$

donde α es un valor digamos cercano a \sqrt{e} . Y esta es la famosa **ecuacion de Bethe Heitler**.

II. OBSERVACIONES

De aqui podemos decir:

i) Lo hicimos para impacto de electrones donde $m = 1$ en unidades atomicas. Si el proyectil tuviese una masa M (protones por ejemplo $M = 1836.12$) La Eq.(51) deberia dividirse por M^2 .

ii) Si el proyectil tuviese una carga qe , (por ejemplo $q = 2$ para He^{++}) entonces la Eq.(51) deberia multiplicarse por q^2 (primer orden perturbativo)

iii) Su valor es pequeno ($\propto c^{-3}$) pero es un mecanismo que sobrevive en el rango ultravioleta y rayos X

4i) Notese que (cuando $\lambda \rightarrow 0$), $d\sigma/d\omega$ apunta a una divergencia en cuando $\omega \rightarrow 0$, y en esa region es muy parecida a $1/\omega$

5i) En relacion a la Eq.(51), recordemos que $k_i = v$ =velocidad en unidades atomicas. Hay muchisimas formas de escribirla (el Jackson tiene un capitulo dedicado a este tema)

6i) El frenamiento de iones en la materia debida a bremsstrahlung es muy importante a altas energias de impacto. Su importancia es capital en ciencia basica (estrellas, plasma de fusion, PIXE, creacion de pares). Y esta presente en muchos aparatos tecnologicos, (generador de rayos X, radiacion contaminante, reactores de fusion y fision, etc)

Hay fenomenos interesantes, stripping, bremsstrahlung internuclear. Da una dimension distinta a los procesos dinamicos.

III. APPENDICE. ESTIMACION DEL ELEMENTO DE MATRIZ

Hagamos una aproximacion. En el espacio Fourier es

$$i \langle \vec{p} \rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \int d\vec{u} \widetilde{\psi_{\vec{k}_f}^-}^*(\vec{u}) (\vec{u}) \widetilde{\psi_{\vec{k}_i}^+}(\vec{u}), \quad (52)$$

donde como siempre hacemos

$$\widetilde{f}(\vec{u}) = \int d\vec{r} \frac{\exp(-i \vec{u} \cdot \vec{r})}{(2\pi)^{3/2}} f(\vec{r}), \quad (53)$$

$$f(\vec{r}) = \int d\vec{u} \frac{\exp(i \vec{u} \cdot \vec{r})}{(2\pi)^{3/2}} \widetilde{f}(\vec{u}). \quad (54)$$

Ahora podemos expandir las funciones en continuo en forma perturbativa a partir de la onda plana tal como vimos en las primeras clases

$$\widetilde{\psi}_{\vec{k}_i}^+(\vec{u}) = \delta(\vec{k}_i - \vec{u}) + \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_i - \vec{u})}{k_i^2 - u^2 + i\epsilon}, \quad (55)$$

$$\widetilde{\psi}_{\vec{k}_f}^-(\vec{u}) = \delta(\vec{k}_f - \vec{u}) + \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_f - \vec{u})}{k_f^2 - u^2 - i\epsilon}. \quad (56)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_{\vec{k}_f}^{*-}(\vec{u}) \widetilde{\psi}_{\vec{k}_i}^+(\vec{u}) &= \delta(\vec{k}_i - \vec{u})\delta(\vec{k}_f - \vec{u}) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_f)}{k_i^2 - k_f^2 + i\epsilon} \delta(\vec{k}_f - \vec{u}) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_f - \vec{k}_i)}{k_f^2 - k_i^2 + i\epsilon} \delta(\vec{k}_i - \vec{u}) + O(V^2), \end{aligned} \quad (57)$$

Reemplazando en la Eq.(??)

$$i \langle \vec{p} \rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \vec{k}_i \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_f) + \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_f)}{k_f^2 - k_i^2 + i\epsilon} (\vec{k}_i - \vec{k}_f) + O(V^2). \quad (58)$$