Estructura 3

NOTAS DE CLASE 17. El cuerpo negro y los coeficientes de Einstein.

J. E. Miraglia.

Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Argentina.

(Dated: November 15, 2013)

Abstract

IMPORTANCIA

FORMULACION. Ley de Boltzman. ley de Plank. El cuerpo negro.

COEFICIENTES DE EINSTEIN

falta dibujos , espanol y bibliografia.

PACS numbers:

I. IMPORTANCIA

Cuando uno comienza cuantica en su forma mas elemental (gralmente en en el contexto de fisica moderna) la primer clase esta dedicada al cuerpo negro. Se calcula el llamado espectro de Rayleigh-Jeans se encuentra que esta en desacuerdo con los experimentos. Algunos libros hablan de la "catastrofe del ultravioleta" (ya no se usa). Se propone el postulado de Plank, se introduce su constante h y de alli en mas se ingresa a la mecanica cuantica.

A esa altura de la carrera no quedaba claro, que es realmente el cuerpo negro. Tipicas frases que se invocan eran : "todo cuerpo a una determinada temperatura emite esta radiacion"¨, "radiacion termica",.. "superficie que absorve toda la radiacion que incide", "cavidad electromagnetica", etc. **Pero que es un cuerpo negro?** A esta altura de lo que conocemos sobre teoria de la radiacion-materia estamos en condiciones de encontrar la interpretacion fisica de un cuerpo negro. Resulta interesante (epico digamos) entender en la ultima clase lo que se planteo en la primera.

Una consecuencia de este tema fue estudiado por Einstein bajo el nombre de *detail balancing*. La derivacion de Einstein es diferente a la que presentamos aca. Aca nos interesara ver la conexion con la teoria de Plank y el equilibrio termodinamico (lo haremos en una forma algo forzada). Lo que resulta extraordinario es que Einstein lo considero un postulado porque todavia no se conocian las ecuaciones especificas que involucraban la emision (espontanea) y absorcion.

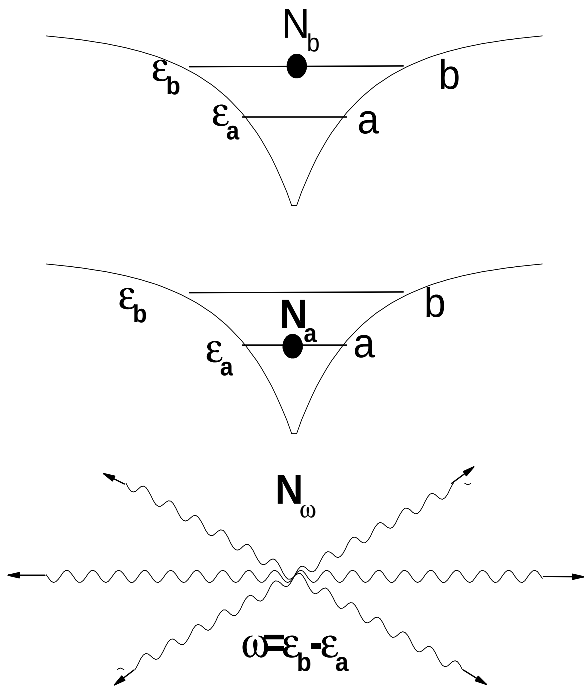
A. FORMULACION

Consideremos una caja de volumen $\mathcal{V}$ con un gran numero de atomos variados que emiten y absorben radiacion (que ahora sabemos son fotones). Este sistema de atomos lo podemos considerar en equilibrio a una cierta temperatura T. Que sabemos de la Fisica clasica?

1- Si hacemos un pequenio agujero en la caja de volumen $\mathcal{V}$, la radiacion electromagnetica que emerge corresponde a la **cuerpo negro**.

2- El numero total de atomos en cada estado de energia debe estar distribuido de acuerdo a la estadistica de **Maxwell Boltzman** correspondiente a la temperatura T.

3- Como el sistema esta en **equilibrio**, el numero total de atomos en cada nivel de energia debe permanecer constante. Esquematicamente lo vemos en la figura.



Vamos a suponer que los atomos o iones interactuan solamente via emision y absorcion de fotones, segun lo hemos visto en las notas anteriores. El sistema esta en un banio de fotones que incluyen todas las frecuencias. Supongamos dos estados cualquiera de un cierto atomo (*two state system*, luego lo generalizaremos). Llamemos (trabajaremos en unidades atomicas)

$$
\begin{aligned}
N_a &= \text{ numero de atomos en el estado } a, \\
n_a &= \frac{N_a}{\mathcal{V}} = \text{ densidad de estado } a, \\
E_a &= \text{ Energia del estado } a, \text{ caracterizado por la funcion } \psi_a, \\
N_b &= \text{ numero de atomos en el estado } b, \\
n_b &= \frac{N_b}{\mathcal{V}} = \text{ densidad de estado } b, \\
E_b &= \text{ Energia del estado } b, \text{ caracterizado por la funcion } \psi_b,
\end{aligned}
$$

y ademas que

$$E_b > E_a \quad \text{tal que } \omega_{ba} = \omega = E_b - E_a > 0, \quad \text{y} \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
N_{\lambda\vec{k}} &= N_\omega = \text{ numero de fotones con energia } \hbar\omega \text{ en } \mathcal{V}, \\
n_\omega &= \frac{N_\omega}{\mathcal{V}} = \text{ densidad de esos fotones.}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Por simplicidad llamaremos directamente $\omega_{ba} = \omega$.

Plantiemos la equivalencia basica. Conocemos la probabilidad de transicion por unidad de tiempo de que el sistema estando en el estado a, absorba un foton de energia $\omega = \omega_{ba}$ y sea fotoexcitado al estado b: de las ecuaciones de foto excitacion resulta (en a.u.)

$$\frac{d\,W^{-}_{b\leftarrow a}}{dt\;d\overrightarrow{f}} = 2\pi\delta\left[(\varepsilon_a+\omega)-\varepsilon_b\right]\overbrace{\left(\frac{2\pi N_\omega}{\omega\mathcal{V}}\right)}^{A^2_{N_\omega}}\left|\widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}}\cdot\langle\overrightarrow{p}\rangle^2_{ba}\right|, \tag{3}$$

$$= N_\omega\frac{d\,W^{0}_{b,a}}{dt\;d\overrightarrow{f}}, \quad . \tag{4}$$

El proceso inverso es la probabilidad de transicion por unidad de tiempo de que el sistema estando en el estado b, emita un foton de energia $\omega_{ba} = \omega$ y caiga al estado $a-$fotoemision. La ecuacion es simplemente.

$$\frac{d\,W^{+}_{a\leftarrow b}}{dt\;d\overrightarrow{f}} = 2\pi\delta\left[\varepsilon_b-(\varepsilon_a+\omega_{ba})\right]\overbrace{\left(\frac{2\pi(N_\omega+1)}{\omega V}\right)}^{A^2_{N_\omega+1}}\left|\widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}}\cdot(\overrightarrow{p})_{ab}\right|^2,$$

$$= (N_\omega+1)\frac{d\,W^{0}_{b,a}}{dt\;d\overrightarrow{f}}. \tag{5}$$

Ahora plantiemos la *Master equation* (obviemos por ahora $d\overrightarrow{f}$)

$$\begin{aligned}\frac{dN_a}{dt} &= \frac{d\,W^{+}_{a\leftarrow b}}{dt}N_b - \frac{d\,W^{-}_{b\leftarrow a}}{dt}N_a,\\ &= \left[(N_\omega+1)N_b - N_\omega N_a\right]\frac{d\,W^{0}_{b,a}}{dt},\\ &= \left[N_\omega(N_b-N_{a)}+N_b\right]\frac{d\,W^{0}_{b,a}}{dt},\end{aligned} \tag{6}$$

y similarmente

$$\begin{aligned}\frac{dN_b}{dt} &= \frac{d\,W^{-}_{b\leftarrow a}}{dt}N_a - \frac{d\,W^{+}_{a\leftarrow b}}{dt}N_b,\\ &= \left[N_\omega N_a-(N_\omega+1)N_b\right]\frac{d\,W^{0}_{b,a}}{dt},\\ &= \left[N_\omega(N_a-N_b)-N_b\right]\frac{d\,W^{0}_{b,a}}{dt}.\end{aligned} \tag{7}$$

La primera relacion importante es que de (6) y (7)

$$\frac{dN_b}{dt}+\frac{dN_a}{dt} = 0, \tag{8}$$

que era de esperar en un estado de un sistema **cerrado**. Nada se pierde en el sistema a, b via ω.

Ahora si, supongamos que estamos en el **equilibrio** entonces podemos poner

$$\frac{dN_b}{dt} = 0, \quad \text{y} \quad \frac{dN_a}{dt} = 0, \tag{9}$$

de lo que resulta la misma ecuacion

$$\begin{aligned} N_b &= N_\omega(N_a - N_b), && (10) \\ \frac{N_a}{N_b} &= \frac{1 + N_\omega}{N_\omega}. && (11) \end{aligned}$$

Ahora usemos el hecho que la densidad de estados esta regido por la estadistica de **Mawxell-Boltzman (**clasica**),** $N(\varepsilon) \propto \exp[-\varepsilon/kT]$

$$\begin{aligned} \frac{N_a}{N_b} &= \frac{n_a}{n_b} = \frac{\exp[-\varepsilon_a/kT]}{\exp[-\varepsilon_b/kT]}, \\ &= \exp[-(\varepsilon_a - \varepsilon_b)/kT] = \exp[(\varepsilon_b - \varepsilon_a)/kT], \\ &= \exp(\omega_{ba}/kT) = \exp(\omega/kT). && (12) \end{aligned}$$

Reemplazando en (11)

$$\begin{aligned} \frac{n_a}{n_b} &= \frac{N_a}{N_b} = \frac{1 + N_\omega}{N_\omega} = \exp[\omega/kT], \\ N_\omega &= \frac{1}{\exp(\omega/kT) - 1}. && (13) \end{aligned}$$

(notar el -1 en el denominador!). Si $\omega \to 0, N_\omega \to \infty$, y si $\omega \to \infty, N_\omega \to \exp(-\omega/kT) \to 0$. Recordemos que estamos trabajando en unidades atomicas por lo que $\omega \equiv \hbar\omega$.

Ahora tenemos que tener en cuenta la densidad de fotones en particular elemento de volumen en el espacio $\overrightarrow{k}$ de fotones. Esto significa fisicamente pasar al continuo de ω con todo lo que eso implica. Esto es considerar que hay infinitos estados excitados de modo tal que las transiciones formen un continuo (que es la base del **cuerpo negro).** El numero total de fotones en $\mathcal{V}$ sera (recuperemos ahora $d\overrightarrow{f}$)

$$\begin{aligned} N &= \int N_\omega \, d\overrightarrow{f} = \int N_\omega \underbrace{\frac{\overbrace{2}^{polariz.\lambda} \ \mathcal{V}}{(2\pi)^3} d\overrightarrow{k}}_{d\overrightarrow{f}} = \int N_\omega \frac{2\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \frac{d\overrightarrow{\omega}}{c^3}, && (14) \\ &= \frac{2\ \mathcal{V}}{(2\pi)^3 c^3} \int d\omega\ \omega^2 N_\omega \underbrace{\int d\Omega_\omega}_{4\pi} = \frac{8\pi\ \mathcal{V}}{(2\pi)^3 c^3} \int d\omega\ \omega^2 N_\omega, && (15) \\ \frac{N}{\mathcal{V}} &= n^{Tot} = \frac{8\pi}{(2\pi)^3 c^3} \int d\omega\ \omega^2 N_\omega = \int d\omega \frac{dn_\omega^{Tot}}{d\omega} && (16) \end{aligned}$$

La cantidad de fotones entre ω y $\omega + d\omega$ en la caja $\mathcal{V}$ es dn_ω^{Tot}

$$\frac{dn_\omega^{Tot}}{d\omega} = \frac{\omega^2 N_\omega}{\pi^2 c^3}$$

Reemplazando (13) resulta

$$\frac{dn_\omega^{Tot}}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp(\omega/kT) - 1} \tag{17}$$

La energia de cada estado es $\hbar\omega = \omega$ en unidades atomicas, con lo que la densidad de energia total (integrados angularmente por unidad de volumen) es

$$\rho(\omega) = \omega\frac{dn_\omega^{Tot}}{d\omega} = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp(\omega/kT) - 1}. \tag{18}$$

Que no es otra cosa que la **ley de Plank.** Ahora queda entendido el cuerpo negro en el que la emision espontanea es determinante en este analisis.

Y de alli sale todo lo que se vio en fisica moderna. Por ejemplo si queremos ver toda la energia del cuerpo negro o sea integrando todas las frecuencias tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon^{Tot} &= \int_0^\infty d\omega\ \rho(\omega) = \int_0^\infty d\omega\ \omega\frac{dn_\omega^{Tot}}{d\omega} = \int_0^\infty d\omega\frac{\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp(\omega/kT) - 1}, \\ &= \frac{\pi^2}{15c^3}k^4\ T^4 = \quad Cte\ T^4, \end{aligned} \tag{19}$$

que no es otra cosa que la ley de Stephen Boltzman. Y sigue Fisica 4

B. COEFICIENTES DE EINSTEIN

Verificamos entonces la propiedad de los cuerpos negros (o mejor el gas de fotones) basandones en la formalismo de la interaccion materia-radiacion. Einstein lo hizo al reves. Propuso la siguiente *master equation* (BJ168)

$$\frac{dN_{a\to b}}{dt} = N_a B_{a\to b}\rho(\omega) \tag{20}$$

$$\frac{dN_{b\to a}}{dt} = N_b B_{b\to a}\rho(\omega) + N_b A_{b\to a} \tag{21}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{dN_{a\to b}}{dt} &= \text{ numeros de atomos que hacen la transicion} \\ &\quad\ a \to b \text{ en la unidad de tiempo,} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_{b\to a}}{dt} &= \text{ numeros de atomos que hacen la transicion} \\ &\quad\ b \to a \text{ en la unidad de tiempo,} \end{aligned} \tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
N_a &= \text{ numeros de atomos en el estado } a, \\
N_b &= \text{ numeros de atomos en el estado } b,
\end{aligned}
$$

y $\rho(\omega)$ es la densidad energetica de fotones que ya vimos

Los coeficientes $B_{a\to b}, B_{b\to a}$ y $A_{b\to a}$ son los coeficientes de Einstein. Notese que $A_{b\to a}$ es la emision expontanea, no bien formalisada por entonces. Proponiendo

1- Equilibrio,

$$dN_{a\to b} = dN_{b\to a}. \tag{24}$$

2- Maxwell Boltzman

$$\frac{N_a}{N_b} = \exp[-(\varepsilon_b - \varepsilon_a)/kT]. \tag{25}$$

3- y Plank

$$\rho(\omega) = n_\omega \hbar\omega = \overbrace{\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}}^{\rho_1(\omega)} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} = \frac{\rho_1(\omega)}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \tag{26}$$

demuestra que

$$
\begin{aligned}
B_{a\to b} &= B_{b\to a}, && (27) \\
A_{b\to a} &= B_{b\to a} \frac{\hbar\omega^3}{\underbrace{\pi^2 c^3}_{\rho_1(\omega)}} = B_{b\to a}\rho_1(\omega), && (28)
\end{aligned}
$$

expresiones que se utilizan mucho en plasmas astrofisicos.