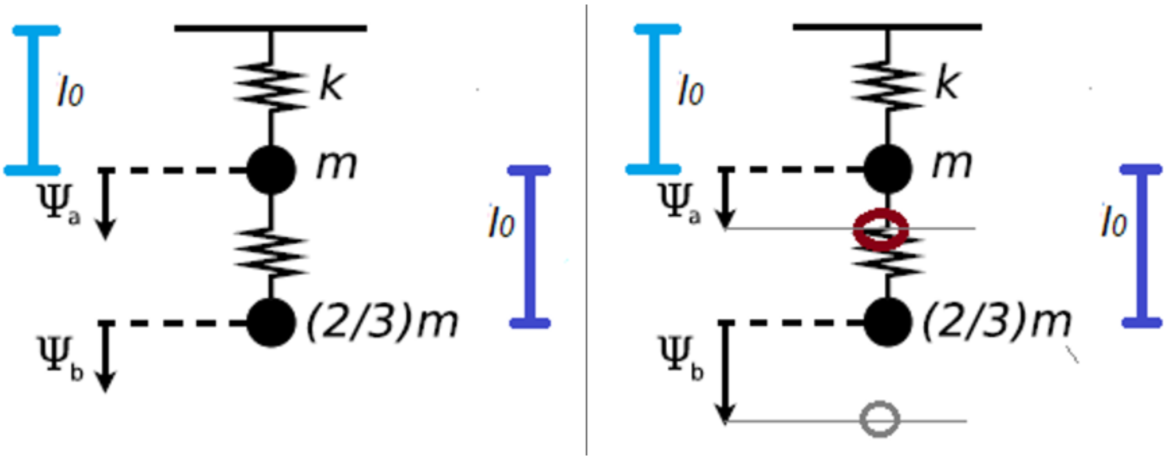
Guía 2
Problema 1 (oscilaciones longitudinales)
Parte a:



Planteo la ec. de Newton para la masa a:

$$-k(l_0+\psi_a-l_0)+k(l_0+\psi_b-\psi_a-l_0)=m_a\ddot{\psi}_a$$

Planteo la ec. de Newton para la masa b:

$$-k(l_0+\psi_b-\psi_a-l_0)=m_b\ddot{\psi}_b$$

Reescribiéndolas:

$$-k\psi_a+k(\psi_b-\psi_a)=m\ddot{\psi}_a \quad \leftrightarrow \quad -2k\psi_a+k\psi_b=m\ddot{\psi}_a$$

$$-k(\psi_b-\psi_a)=\frac{2}{3}m\ddot{\psi}_b \quad \leftrightarrow \quad +k\psi_a-k\psi_b=\frac{2}{3}m\ddot{\psi}_b$$

Reescribiéndolas nuevamente:

$$-2\frac{k}{m}\psi_a+\frac{k}{m}\psi_b=\ddot{\psi}_a$$

$$+\frac{3}{2}\frac{k}{m}\psi_a-\frac{3}{2}\frac{k}{m}\psi_b=\ddot{\psi}_b$$

Se puede llevar a la forma matricial:

$$-\underbrace{\begin{pmatrix} 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{3}{2}\frac{k}{m} & \frac{3}{2}\frac{k}{m} \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}}\cdot\begin{pmatrix}\psi_a\\ \psi_b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ddot{\psi}_a\\ \ddot{\psi}_b\end{pmatrix}$$

Definiendo

$$\omega_0^{\,2}=\frac{k}{m}$$

queda:

$$-\boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\psi}_a \\ \ddot{\psi}_b \end{pmatrix}$$

$$-{\omega_0}^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\psi}_a \\ \ddot{\psi}_b \end{pmatrix}$$

<u>Buscando los *modos normales de oscilación* del sistema</u>.
Cada <u>*modo normal de oscilación*</u> se define:

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} \cos(\omega t + \phi)$$

Todas las masas se mueven con la misma frecuencia ω y la misma fase ϕ.
Proponiendo este tipo de solución:

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} \cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{\psi}_a \\ \dot{\psi}_b \end{pmatrix} = -\omega \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} \ddot{\psi}_a \\ \ddot{\psi}_b \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} \cos(\omega t + \phi)$$

Reemplazando en:

$$-\boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\psi}_a \\ \ddot{\psi}_b \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad -\boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix}}$$

Para obtener $\begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix}$ y ω^2 hay que resolver un problema de autovectores y autovalores.
Es decir:

$$[\boldsymbol{\mathcal{M}} - \omega^2 \mathbf{I}] \cdot \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como siempre, para obtener soluciones no triviales, hay que pedir:

$$\boxed{det[\boldsymbol{\mathcal{M}} - \omega^2 \mathbf{I}] = 0}$$

En este cado:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} = {\omega_0}^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$det[\boldsymbol{\mathcal{M}} - \omega^2 \mathbf{I}] = 0 \quad \rightarrow \quad det\begin{bmatrix} 2{\omega_0}^2 - \omega^2 & -{\omega_0}^2 \\ -\frac{3}{2}{\omega_0}^2 & \frac{3}{2}{\omega_0}^2 - \omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

El polinomio característico queda:

$$(2{\omega_0}^2 - \omega^2)\left(\frac{3}{2}{\omega_0}^2 - \omega^2\right) - \frac{3}{2}{\omega_0}^4 = 0$$

$$\rightarrow \quad \omega^4 - \frac{3}{2}{\omega_0}^2\omega^2 - 2{\omega_0}^2\omega^2 + 3{\omega_0}^4 - \frac{3}{2}{\omega_0}^4 = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\omega^4 - \frac{7}{2}{\omega_0}^2\omega^2 + \frac{3}{2}{\omega_0}^4 = 0}$$

$$\omega_\pm^2 = \left(\frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{6}{4}}\right){\omega_0}^2 = \left(\frac{7}{4} \pm \frac{5}{4}\right){\omega_0}^2$$

Quedando:

$${\omega_1}^2 = \frac{1}{2}{\omega_0}^2$$

$${\omega_2}^2 = 3{\omega_0}^2$$

Calculemos el autovector correspondiente a ${\omega_1}^2 = \frac{1}{2}{\omega_0}^2$:

$$\left[\boldsymbol{\mathcal{M}} - \frac{1}{2}{\omega_0}^2\mathbf{I}\right] \cdot \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2{\omega_0}^2 - \frac{1}{2}{\omega_0}^2 & -{\omega_0}^2 \\ -\frac{3}{2}{\omega_0}^2 & \frac{3}{2}{\omega_0}^2 - \frac{1}{2}{\omega_0}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2}{\omega_0}^2 & -{\omega_0}^2 \\ -\frac{3}{2}{\omega_0}^2 & {\omega_0}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lógicamente, ambas filas son linealmente dependientes, por lo cual, la única ecuación no trivial es:

$$\frac{3}{2}{\omega_0}^2 C_a - {\omega_0}^2 C_b = 0 \quad \rightarrow \quad C_b = \frac{3}{2}C_a$$

el autovector correspondiente a ${\omega_1}^2 = \frac{1}{2}{\omega_0}^2$ queda:

$$\begin{pmatrix} C_a \\ \frac{3}{2}C_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} C_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{2}C_a}_{A}$$

(los autovectores están definidos a menos de una constante arbitraria)

El modo normal con frecuencia $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{k}{m}}$ (ya que ${\omega_1}^2 = \frac{1}{2}{\omega_0}^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{m}$), tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \psi_a^1 \\ \psi_b^1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

Calculemos el autovector correspondiente a ${\omega_2}^2 = 3{\omega_0}^2$:

$$[\boldsymbol{\mathcal{M}} - 3{\omega_0}^2\mathbf{I}] \cdot \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2{\omega_0}^2 - 3{\omega_0}^2 & -{\omega_0}^2 \\ -\frac{3}{2}{\omega_0}^2 & \frac{3}{2}{\omega_0}^2 - 3{\omega_0}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} -{\omega_0}^2 & -{\omega_0}^2 \\ -\frac{3}{2}{\omega_0}^2 & -\frac{3}{2}{\omega_0}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, ambas filas son linealmente dependientes, por lo cual, la única ecuación no trivial es:

$$-{\omega_0}^2 C_a - {\omega_0}^2 C_b = 0 \quad \rightarrow \quad C_b = -C_a$$

el autovector correspondiente a ${\omega_1}^2 = 3{\omega_0}^2$ queda:

$$\begin{pmatrix} C_a \\ -C_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} C_a$$

(los autovectores están definidos a menos de una constante arbitraria)

El modo normal con frecuencia $\omega_2 = \sqrt{3\frac{k}{m}}$ (ya que ${\omega_2}^2 = 3{\omega_0}^2 = 3\frac{k}{m}$), tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \psi_a^2 \\ \psi_b^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi)$$

La <u>solución más general</u> se escribe como una <u>combinación lineal</u> de los modos normales del sistema

$$\boxed{\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2)}$$

Donde A_1, ϕ_1, A_2, ϕ_2 dependen de las condiciones iniciales del problema.

Parte b:
Imponiendo condiciones iniciales. Se dice que el sistema parte de reposo, con lo cual

$$\dot{\psi}_a(0) = 0$$
$$\dot{\psi}_b(0) = 0$$

derivando:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_a \\ \dot{\psi}_b \end{pmatrix} = -\omega_1 A_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) - \omega_2 A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2)$$

Evaluando:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_a(0) \\ \dot{\psi}_b(0) \end{pmatrix} = -\omega_1 \underbrace{A_1 \operatorname{sen}(\phi_1)}_{0} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \omega_2 \underbrace{A_2 \operatorname{sen}(\phi_2)}_{0} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al ser ambos vectores linealmente independientes, ambos coeficientes son cero

Con lo cual:

$$A_1 \operatorname{sen}(\phi_1) = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}(\phi_1) = 0$$

Sin pérdida de generalidad se puede tomar:

$$\phi_1 = 0$$

Ya que si tomamos $\phi_1 = \pi$

$$A_1 \cos(\omega_1 t + \pi) = A_1 \cos(\omega_1 t) \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t) \underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{0} = \underbrace{-A_1}_{\tilde{A}_1} \cos(\omega_1 t)$$

Análogamente,

$$A_2 \operatorname{sen}(\phi_2) = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}(\phi_2) = 0$$

Sin pérdida de generalidad se puede tomar:

$$\phi_2 = 0$$

Con lo cual:

$$\phi_1 = 0, \ \phi_2 = 0$$

Quedando, en este caso:

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t)$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} \psi_a(0) \\ \psi_b(0) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo cual:

$$2A_1 + A_2 = A_0$$

$$3A_1 - A_2 = 0$$

Despejando:

$$A_2 = 3A_1$$

$$2A_1 + A_2 = A_0 \quad \rightarrow \quad 5A_1 = A_0$$

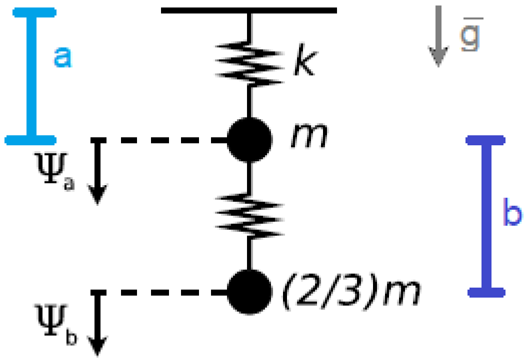
$$\rightarrow \quad A_1 = \frac{A_0}{5}$$

$$\rightarrow \quad A_2 = \frac{3A_0}{5}$$

Juntando todo:

$$\boxed{\begin{pmatrix}\psi_a \\ \psi_b\end{pmatrix} = \frac{A_0}{5}\begin{pmatrix}2 \\ 3\end{pmatrix}\cos(\omega_1 t) + \frac{3A_0}{5}\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}\cos(\omega_2 t)}$$

Parte c: caso con gravedad: hay que hallar primero la <u>posición de equilibrio</u> de ambas masas.



Es decir, se sabe que en el equilibrio:

$$-k(a - l_0) + m_a g + k(b - l_0) = 0$$

$$m_b g - k(b - l_0) = 0$$

Así por ejemplo la primera masa:

$$-k(a + \psi_a - l_0) + m_a g + k(b + \psi_b - \psi_a - l_0) = m \cdot \ddot{\psi}_a$$

Usando: $-k(a - l_0) + m_a g + k(b - l_0) = 0$

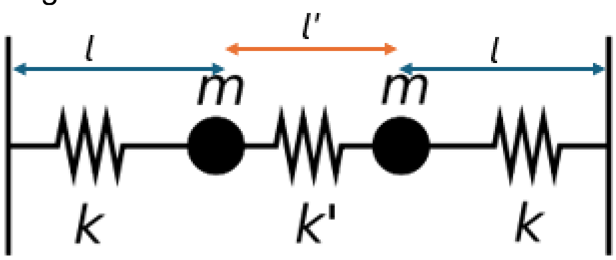
queda

$$\boxed{-k\psi_a + k(\psi_b - \psi_a) = m \cdot \ddot{\psi}_a}$$

Queda para ustedes seguir el ejercicio.

Problema 3: Oscilaciones transversales

En general:



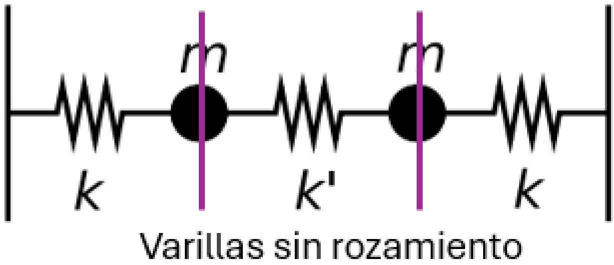
$l' \neq l$

Ya que:

$$-k(l - l_0) + k'(l' - l_0) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad (l - l_0) = \frac{k'}{k}(l' - l_0)$$

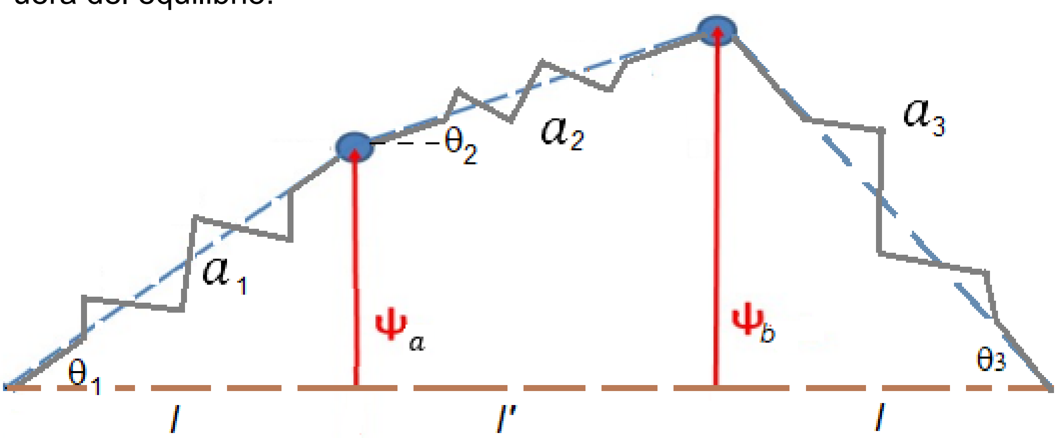
(condición de equilibrio)

Otra posibilidad:



Masas enhebradas en varillas sin rozamiento. En ese caso, la condición $l' = l$ es posible.

Fuera del equilibrio:



(con $l > l_0$ y $l' > l_0$)

Planteo la ec. de Newton en *y* para la masa *A*:

$$-k(a_1 - l_0) \cdot sen(\theta_1) + k'(a_2 - l_0) \cdot sen(\theta_2) = m \cdot \ddot{\psi}_A$$

haciendo las aproximaciones de "pequeñas oscilaciones"

$$a_1 = \sqrt{l^2 + {\psi_A}^2} \cong l\left(1 + \frac{{\psi_A}^2}{2l^2}\right) \cong l$$

y

$$a_2 = \sqrt{(l')^2 + (\psi_B - \psi_A)^2} \cong l'\left(1 + \frac{(\psi_B - \psi_A)^2}{2l'^2}\right) \cong l'$$

además

$$sen(\theta_1) \cong tan(\theta_1) = \frac{\psi_A}{l}$$

y

$$sen(\theta_2) \cong tan(\theta_2) = \frac{\psi_B - \psi_A}{l'}$$

queda:

$$-k(\frac{l - l_0}{l}) \cdot \psi_A + k'(\frac{l' - l_0}{l'}) \cdot (\psi_B - \psi_A) = m \cdot \ddot{\psi}_A$$

análogamente planteo la ec. de Newton en *y* para la masa *B*:

$$-k'(a_2 - l_0) \cdot sen(\theta_2) - k(a_3 - l_0) \cdot sen(\theta_3) = m \cdot \ddot{\psi}_B$$

haciendo aproximaciones análogas

$$a_3 = \sqrt{l^2 + {\psi_B}^2} \cong l$$

además

$$sen(\theta_3) \cong tan(\theta_3) = \frac{\psi_B}{l}$$

quedando:

$$-k'(\frac{l' - l_0}{l'}) \cdot (\psi_B - \psi_A) - k(\frac{l - l_0}{l}) \cdot \psi_B = m \cdot \ddot{\psi}_B$$

Juntando ambas ecuaciones:

$$-k\left(\frac{l - l_0}{l}\right) \cdot \psi_A + k'\left(\frac{l' - l_0}{l'}\right) \cdot (\psi_B - \psi_A) = m \cdot \ddot{\psi}_A$$

$$-k'\left(\frac{l' - l_0}{l'}\right) \cdot (\psi_B - \psi_A) - k\left(\frac{l - l_0}{l}\right) \cdot \psi_B = m \cdot \ddot{\psi}_B$$

Ahora bien, estas ecuaciones pueden reescribirse como:

$$-\left[\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{l - l_0}{l}\right) + \left(\frac{k'}{m}\right)\left(\frac{l' - l_0}{l'}\right)\right] \cdot \psi_A + \frac{k'}{m}\left(\frac{l' - l_0}{l'}\right) \cdot \psi_B = \ddot{\psi}_A$$

$$+\frac{k'}{m}\left(\frac{l' - l_0}{l'}\right) \cdot \psi_A - \left[\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{l - l_0}{l}\right) + \left(\frac{k'}{m}\right)\left(\frac{l' - l_0}{l'}\right)\right] \cdot \psi_B = \ddot{\psi}_B$$

se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que escrito en notación matricial:

$$-\begin{pmatrix} \left[\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{l - l_0}{l}\right) + \left(\frac{k'}{m}\right)\left(\frac{l' - l_0}{l'}\right)\right] & -\frac{k'}{m}\left(\frac{l' - l_0}{l'}\right) \\ -\frac{k'}{m}\left(\frac{l' - l_0}{l'}\right) & \left[\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{l - l_0}{l}\right) + \left(\frac{k'}{m}\right)\left(\frac{l' - l_0}{l'}\right)\right] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\psi}_A \\ \ddot{\psi}_B \end{pmatrix}$$

Definiendo, para reducir la notación,

$$\omega_0{}^2 = \left(\frac{l - l_0}{l}\right) \cdot \frac{k}{m}$$

y

$$Q = \frac{k'\left(\frac{l' - l_0}{l'}\right)}{k\left(\frac{l - l_0}{l}\right)}$$

Reescribiéndola, queda:

$$-\omega_0{}^2 \begin{pmatrix} Q+1 & -Q \\ -Q & Q+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\psi}_A \\ \ddot{\psi}_B \end{pmatrix}$$

Bibliografía útil:

- "Ondas", F. Crawford, Volumen 3 del Berkeley Physics Course, Reverté, 1971
- "F2: Ondas", Ricardo A. Depine, https://bit.ly/F2Depinev02