Discusión de las Ecs. de Maxwell estáticas y cálculo del campo de una espira de corriente

Física 3 - Bruno N. Scocozza
Universidad de Buenos Aires, Departamento de Física

June 3, 2014

Abstract

1 Discutiendo las Ecs. Maxwell estáticas.

Vamos a resolver el campo magnético generado por una espira de corriente, en el eje. Pero antes vamos a discutir qué se puede ver a ojo, qué se puede LEER y anticipar sobre el campo magnético mirando las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla\cdot\ \mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\ \mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}$$
$$\nabla\cdot\ \mathbf{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla\times\mathbf{E}=0$$

Tanto en electrostática como en magnetostática procedimos de la misma manera:
1) Agluien midió la expresión de la fuerza (E: F. Coulomb , B: F. de Lorentz)
2) De esas fuerzas extrajimos el campo:

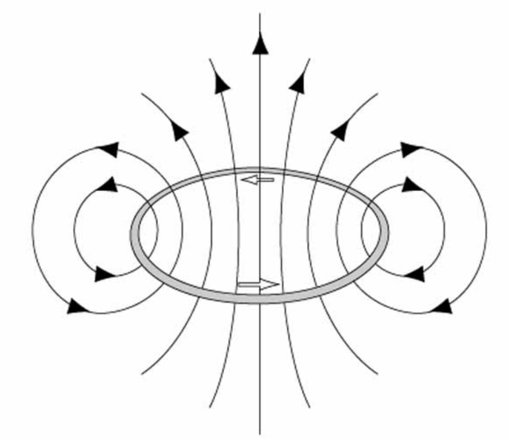
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dq'\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad \mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\mathbf{J}(\overline{r}')\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

3) Y ahora les tomamos el rotor y la divergencia y nos quedan las ecuaciones de arriba.

Algo que les comenté es que dar el rotor y la divergencia de un campo basta para definirlo (si uno da las condiciones de contorno apropiadas) y eso lo pueden ver en el primer capítulo del Griffiths (Ch1 p. 52)

Lo primero que hicimos fue .ver qué cosas podíamos decir mirando las ecuaciones de Maxwell:

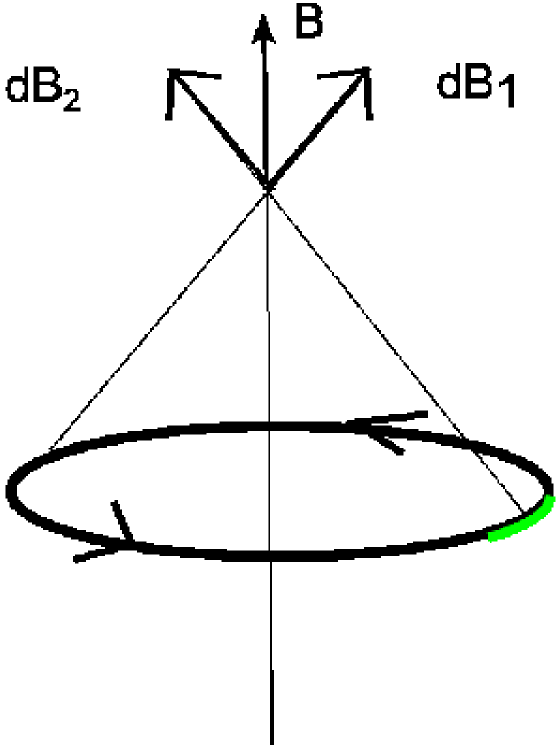
- Las ecuaciones para **E**, están desacopladas de las de **B**. Por ende en un problema que tenga cargas y corrientes simplemente resuelven cada uno y luego suman.
- Como charlamos las primeras clases la divergencia da una noción de cuán radial es el campo en ese punto, y el rotor de cuánto giran las líneas alrededor de ese punto. Así que conceptualmente les dije que tenía sentido que dar esas dos cosas determinara el campo porque es como dar la componente radial y las componentes tangenciales.
  - B: No tiene divergencia y tiene rotor así que las líneas de campo se cierran sobre sí mismas. El campo se dice solenoidal. (Al tener rotor no nulo, no deriva de un potencial escalar)



  - E: Sí tiene divergencia pero no tiene rotor, así que las líneas no son cerradas. El campo se dice irrotacional.
- Si escribimos $\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$, similar a lo que pasa en la ecuación de onda, leemos que donde el potencial tenga curvatura, hay carga.
  - Piensen en el caso del plano infinito cargado: el potencial es una V corta. Sólo hay curvatura en z = 0. Para casos menos sencillos se vuelve más difícil extraer información a ojo, porque no es curvatura 1D, sino 3D porque hay un Laplaciano.

2 Problema de la espira de corriente:

Como siempre los torturo, podemos decir algo de antemano sobre el campo.



Acerca de la dirección pueden usar simetrías para determinar que en el eje apunta en z. Otra manera más intuitiva de verlo, y es la que les sugiero siempre, es pensar que cada diferencial de cable contribuye con un dB, como muestra la figura.

¿Y acerca de la magnitud? Una vez más los invito a usar un poco de experiencia previa (las Guías 1,2,3 que ya hicieron), y un poquito de análisis dimensional:

Mirando la Ley de Biot-Savart ya sé que pongo:

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \mu_0 I (...)\, \widehat{z}$$

Ahora, dijimos monopolos magnéticos no hay, por ende, lo más lento que puede caer el campo es como $1/r^3$. Y por otro lado ustedes ya hicieron mil veces el campo de un anillo, o un aro y lo que les debe haber quedado grabado es el famoso $\dfrac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}$, que además tiene de bueno que no diverge en z = 0, lo cual es esperable. Así que:

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \mu_0 I \frac{(...)}{(R^2+z^2)^{3/2}} \widehat{z}$$

Y lo que faltaría es ajustar las unidades. Miremos la ley de Biot-Savart y sabemos que nos falta multiplicar por alguna distancia^2, así que como R es el parámetro caraterísitco del problema:

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \mu_0 I \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \widehat{z}$$

Muy bien. El hecho es, que solo le erramos por 1/2.

Algunos me van a decir que en realidad esto lo pude hacer porque ya sabía el resultado. En realidad, razoné todo esto antes de hacer el problema, y me pareció intuitivo poner $\dfrac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}$, justamente pensando en todas las veces que resolvimos anillos, aros, etc..

El punto de todo esto es acercarles otra forma de razonar, que les muestras varias cosas: con muy poco se puede hacer bastante; y además, ustedes saben más de lo que creen que saben.

Ahora sí, resolvamos el problema algebráicamente.

NOTA: Esta no es una forma de resolución válida en un parcial.

2.1 Resolución algebráica

Lo primero que hay que hacer, es saber qué siginifica cada término en la expresión de B-Savart, y luego especializarlo en el caso particular de nuestro problema.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{J}(\overline{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$\mathbf{r}$: punto campo. Debe sobrevivir a la integral

$\mathbf{r}'$: punto fuente: observer que dV', y además la corriente $\mathbf{J}$ está evaluada en $\mathbf{r}'$

Hay que adecuar la integral al tipo de distribución que tengamos, en volumen, superficial o lineal, igual que en electrostática.

Así que:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\mathbf{s}' \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$d\mathbf{s}'$: es el diferencial de arco, de la parametrización de la corriente. Es un vector que va en la dirección de la corriente.

Esto se ve bien en la imágen.

En nuestro problema:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (0,0,z) = z\,\widehat{z} \\ \mathbf{r}' &= R\,\widehat{r}' \\ d\mathbf{s}' &= R\,\widehat{\theta}' d\theta' = d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

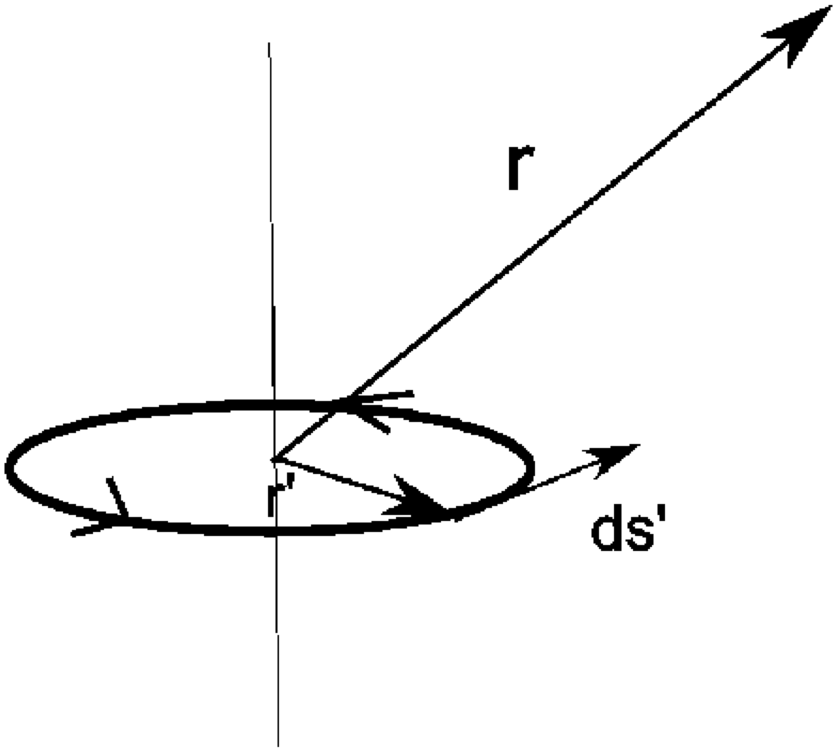
Recuerden dos cosas:

1) $\widehat{r}'(\theta')$ y $\widehat{\theta}'(\theta')$. y

2) $\widehat{r}' \neq \widehat{r}$, $\widehat{\theta}' \neq \widehat{\theta}$, justamente porque uno depende de θ y el otro de θ'.

Sé que la parte difícil/nueva es el $d\mathbf{s}'$, pero no es más que el diferencial de arco de cuando parametrizan el cable $= d\mathbf{r}'$.

A la Mate3:



$$
\begin{aligned}
\gamma(\theta') &= (R\cos\theta', R\sin\theta') = \; R\,\widehat{r}' \\
\gamma'(\theta')d\theta &= (-R\sin\theta', R\cos\theta') = \; R\,\widehat{\theta}'\,d\theta'
\end{aligned}
$$

Metamos todo esto en la integral.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} R\,\widehat{\boldsymbol{\theta}}'\,d\theta' \times \frac{z\widehat{\mathbf{z}} - R\,\widehat{\mathbf{r}}'}{(R^2+z^2)^{3/2}} \\
\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\widehat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

Unas útlimas cosas que no dije en clase: así como el dipolo físico en el caso electrostático consiste de dos cargas de signo opuesto, el dipolo físico MAGNÉTICO es la espira de corriente. Prueben obtener el dipolo ideal a partir de esta última expresión: qué límite(s) hay que tomar?