FISICA 3. Apéndice Matemático.

Resumen de las ecuaciones usadas

2do cuat. 2015

J. E. Miraglia

(Dated: August 10, 2015)

Abstract

SISTEMAS DE COORDENADAS

Cartesianas, esféricas y cilíndricas.Vectores. Formulas que contienen $\overrightarrow{\nabla}$. Operaciones vectoriales simples. Expansiones elementales. Integrales de interés. El teorema de Green. El teorema de Stokes.

EXPRESIONES EXPLICITAS DE LOS OPERADORES

El gradiente. La divergencia. El rotor. El laplaciano. El operador $\overrightarrow{\nabla}$ direccional.

LA FUNCION δ DE DIRAC y Θ DE HEAVISIDE

Funciones δ de Dirac en una y tres dimensiones. La funcion Θ de heaviside. Propiedades. Ecuaciones de Poisson y Green.

DESARROLLOS PARTICULARES.

Para determinar el campo magnético $\overrightarrow{B}$. Para determinar la intensidad magnética $\overrightarrow{H}$. Para demostrar la divergencia nula de $\overrightarrow{A}$. Un truco básico.

PACS numbers:

Miraglia. Fisica 3 (a.2014) 2do cuat. 2015.

I. SISTEMAS DE COORDENADAS

Coordenadas **cartesianas**: $\{x, y, z\}$, $d\overrightarrow{r} = dxdydz$, $x \in \{-\infty, \infty\}$, $y \in \{-\infty, \infty\}$, $z \in \{-\infty, \infty\}$. Los vectores se escriben como $\overrightarrow{F} = F_x \widehat{e}_x + F_y \widehat{e}_y + F_z \widehat{e}_z$, $F_{x/y/z}$, con $F_{x/y/z}(x, y, z)$, y los versores (definidos sempre en la dirección del *crecimiento* de la variable) satisfacen

$$\widehat{e}_x \times \widehat{e}_y = \widehat{e}_z, \qquad \widehat{e}_y \times \widehat{e}_z = \widehat{e}_x, \qquad \widehat{e}_z \times \widehat{e}_x = \widehat{e}_y \ , \tag{1}$$

$$\widehat{e}_x \cdot \widehat{e}_y = \widehat{e}_y \cdot \widehat{e}_z = \widehat{e}_z \cdot \widehat{e}_x = 0 \ , \tag{2}$$

Coordenadas **esféricas**: $\{r, \theta, \varphi\}$, $d\overrightarrow{r} = r^2 \sin\theta \ drd\theta d\varphi$, $r \in \{0, \infty\}$, $\theta \in \{0, \pi\}$, $\varphi \in \{-\pi, \pi\}$. La transformación $\{r, \theta, \varphi\} \longleftrightarrow \{x, y, z\}$ es:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = arc\cos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} , \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} . \tag{3}$$

Los vectores se escriben como $\overrightarrow{F} = F_r \widehat{e}_r + F_\theta \widehat{e}_\theta + F_\varphi \widehat{e}_\varphi$, con $F_{r/\theta/\varphi} = F_{r/\theta/\varphi}(r, \theta, \varphi)$ y los versores satisfacen

$$\widehat{e}_r \times \widehat{e}_\theta = \widehat{e}_\varphi, \qquad \widehat{e}_\theta \times \widehat{e}_\varphi = \widehat{e}_r, \qquad \widehat{e}_\varphi \times \widehat{e}_r = \widehat{e}_\theta \ , \tag{4}$$

$$\widehat{e}_r \cdot \widehat{e}_\theta = \widehat{e}_\theta \cdot \widehat{e}_\varphi = \widehat{e}_\varphi \cdot \widehat{e}_r = 0, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \widehat{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \widehat{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \widehat{e}_y + \cos\theta \widehat{e}_z \\ \widehat{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \widehat{e}_x + \cos\theta \sin\varphi \widehat{e}_y - \sin\theta \widehat{e}_z \\ \widehat{e}_\varphi = -\sin\varphi \widehat{e}_x + \cos\varphi \widehat{e}_y \end{cases} , \tag{6}$$

$$\begin{cases} \widehat{e}_x = \sin\theta \cos\varphi \widehat{e}_r + \cos\theta \cos\varphi \widehat{e}_\theta - \sin\varphi \widehat{e}_\varphi \\ \widehat{e}_y = \sin\theta \sin\varphi \widehat{e}_r + \cos\theta \sin\varphi \widehat{e}_\theta + \cos\varphi \widehat{e}_\varphi \\ \widehat{e}_z = \sin\theta \widehat{e}_r - \sin\theta \widehat{e}_y \end{cases} . \tag{7}$$

Coordendas **cilíndricas**: $\{\rho, \varphi, z\}$, $d\overrightarrow{r} = \rho \ d\rho d\varphi dz$, $\rho \in \{0, \infty\}$, $\varphi \in \{-\pi, \pi\}$, $z \in \{-\infty, \infty\}$. La transformacion $\{\rho, \varphi, z\} \longleftrightarrow \{x, y, z\}$ es:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases} , \tag{8}$$

Miraglia - Física 3 (a.2017) 2do cuat. 2015.

y obviamente $z = z$ permanece inalterado. Los vectores se escriben como $\overrightarrow{F} = F_\rho \widehat{e}_\rho + F_\varphi \widehat{e}_\varphi + F_z \widehat{e}_z$, con $F_{\rho/\varphi/z} = F_{\rho/\varphi/z}(\rho, \varphi, z)$ y los versores satisfacen:

$$
\begin{aligned}
\widehat{e}_\rho \times \widehat{e}_\varphi &= \widehat{e}_z, \quad \widehat{e}_\varphi \times \widehat{e}_z = \widehat{e}_\rho, \quad \widehat{e}_z \times \widehat{e}_\rho = \widehat{e}_\varphi && (9)\\
\widehat{e}_\rho \cdot \widehat{e}_\varphi &= \widehat{e}_\varphi \cdot \widehat{e}_z = \widehat{e}_z \cdot \widehat{e}_\rho = 0, && (10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} \widehat{e}_\rho = \cos\varphi \widehat{e}_x + \sin\varphi \widehat{e}_y \\ \widehat{e}_\varphi = -\sin\varphi \widehat{e}_x + \cos\varphi \widehat{e}_y \end{cases} \qquad y \qquad \begin{cases} \widehat{e}_x = \cos\varphi \widehat{e}_\rho - \sin\varphi \widehat{e}_\theta \\ \widehat{e}_y = \sin\varphi \widehat{e}_\rho + \cos\varphi \widehat{e}_\theta \end{cases}, \tag{11}
$$

y obviamente $\widehat{e}_z = \widehat{e}_z$.

A. Vectores

Recordar que

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB\cos\alpha, \qquad \text{con} \qquad \alpha = \widehat{\overrightarrow{A}\, \overrightarrow{B}}, && (12)\\
\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} &= \begin{vmatrix} \widehat{e}_x & \widehat{e}_y & \widehat{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & A_z \end{vmatrix} = -\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A} = AB\sin\alpha\, \widehat{e} \quad \text{with } \widehat{e} \perp (\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}). && (13)
\end{aligned}
$$

Formulas específicas de interés en el curso serán:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right) &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}, && (14)\\
\overrightarrow{A} \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right) &= \overrightarrow{B} \cdot \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) - \overrightarrow{C} \cdot \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right) \qquad \text{ó}\,, && (15)\\
(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times \overrightarrow{C} &= \overrightarrow{B} \cdot \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) - \overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C}\right), && (16)\\
(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \cdot (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}) &= \overrightarrow{C} \left[\overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{D}\right)\right] - \overrightarrow{D} \left[\overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right)\right] \qquad \text{ó} && (17)\\
&= \overrightarrow{B} \left[\overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}\right)\right] - \overrightarrow{A} \left[\overrightarrow{B} \cdot \left(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}\right)\right]. && (18)
\end{aligned}
$$

Miraglia. Fisica 3 (a.20). 2do cuat 2015.

B. Formulas que contienen $\overrightarrow{\nabla}$

Que contienen el **gradiente,**

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}(u+v) &= \overrightarrow{\nabla}u + \overrightarrow{\nabla}v, && (19)\\
\overrightarrow{\nabla}(u\,v) &= v\overrightarrow{\nabla}u + u\overrightarrow{\nabla}v, && (20)\\
\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}) &= (\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{A} + (\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}) + \overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}), && (21)
\end{aligned}
$$

el operador $(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{Y}$ será definido luego.

Que contienen la **divergencia,**

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}) &= \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B}, && (22)\\
\overrightarrow{\nabla}\cdot(u\,\overrightarrow{A}) &= (\overrightarrow{\nabla}u)\cdot\overrightarrow{A} + u(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}), && (23)\\
\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) &= \overrightarrow{B}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}) - \overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}), && (24)\\
\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}) &= 0. \qquad !! && (25)
\end{aligned}
$$

Que contienen el **rotor,**

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}) &= \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}, && (26)\\
\overrightarrow{\nabla}\times(u\,\overrightarrow{A}) &= (\overrightarrow{\nabla}u)\times\overrightarrow{A} + u(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}), && (27)\\
\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) &= (\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{A} - (\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B} - \overrightarrow{B}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}) + \overrightarrow{A}\,(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B}), && (28)\\
\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}) &= \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}) - \nabla^2\overrightarrow{A}, && (29)\\
\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}u) &= 0 \qquad !! && (30)
\end{aligned}
$$

y que contienen el **Laplaciano,**

$$
\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\overrightarrow{\nabla}u\cdot\overrightarrow{\nabla}v \;.. \qquad (31)
$$

Miraglia. Fisica 3 (a.20). 2do cuat. 2015.

C. Operaciones vectoriales simples

Que contienen el **gradiente,**

$$\vec{\nabla}\, r = \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \tag{32}$$

$$\vec{\nabla}\, r^n = n r^{n-1}\hat{r} = n r^{n-2}\vec{r}\ , \quad n>0\ , \tag{33}$$

$$\vec{\nabla}\, \frac{1}{r^n} = -n\frac{\hat{r}}{r^{n+1}} = -n\frac{\vec{r}}{r^{n+2}}, \quad n>0\ , \tag{34}$$

$$\vec{\nabla}\, \frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}\ , \tag{35}$$

$$\vec{\nabla}\, \frac{1}{r^2} = -2\frac{\hat{r}}{r^3} = -2\frac{\vec{r}}{r^4}\ , \tag{36}$$

$$\vec{\nabla}\, (\vec{A}.\vec{r}) = \vec{A}\ , \tag{37}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} = -\frac{\vec{r}-\vec{x}}{|\vec{r}-\vec{x}|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{x}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \tag{38}$$

que contienen la **divergencia,**

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = 0\ , \tag{39}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3\ , \tag{40}$$

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{A}}{r^3} - 3\frac{\left(\vec{A}\cdot\vec{r}\right)}{r^5}\vec{r}\ , \tag{41}$$

que contienen el **rotor,**

$$\vec{\nabla}\times\vec{r} = 0\ , \tag{42}$$

y que contienen el **laplaciano,**

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}), \quad \text{ecuación Poisson}\ . \tag{43}$$

$$(\nabla^2+k^2)\frac{e^{\pm i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}), \quad \text{ecuación de Green}\ . \tag{44}$$

D. Expansiones elementales

$$\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|} \underset{\substack{R\to\infty\\(R>>r)}}{\to} \frac{1}{R} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^3} + \frac{1}{2R^3}\left[\frac{3(\vec{R}\cdot\vec{r})^2}{R^2} - r^2\right] + O\left(\frac{1}{R^4}\right)\ , \tag{45}$$

$$\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|^3} \underset{\substack{R\to\infty\\(R>>r)}}{\to} \frac{1}{R^3} + \frac{3\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^4} + O\left(\frac{1}{R^5}\right)\ . \tag{46}$$

Miraglia. Física 3 (a 20). 2do cuat. 2015.

E. Integrales de interés

$$
\begin{aligned}
\oint_{C_1} \overrightarrow{dl}_1 &= 0, && (47)\\
\oint_{C_1} \overrightarrow{dl}_1 \cdot \overrightarrow{r} &= 0, && (48)\\
\oint_{C_1} \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{dl}_1 &= 2A, \qquad / \; A = \textbf{area encerrada,} && (49)\\
\oint_{C_1} \frac{\overrightarrow{dl}_1 \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|^3} &= \overrightarrow{\nabla} \times \oint_{C_1} \frac{\overrightarrow{dl}_1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|}, && (50)\\
\oint_{C_1} \frac{\overrightarrow{dl}_1 \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|^3} &= 0, && (51)\\
\int_{V_1} d\overrightarrow{r}_1 \frac{\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}_1) \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|^3} &= \overrightarrow{\nabla} \times \int_{V_1} d\overrightarrow{r}_1 \frac{\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}_1)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|}. && (52)\\
\int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}\; f^* \left(\overrightarrow{\nabla} f\right) &= \int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}\; f^* \left(\nabla^2 f\right) + \int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}\; \left|\overrightarrow{\nabla}\, f\right|^2 . && (53)
\end{aligned}
$$

F. El teorema de Green

Si la superficie $\mathcal{S}$ es el borde del volumen $\mathcal{V}$ y $d\overrightarrow{s} = ds\,\widehat{n}$, con $\widehat{n}$ normal a la superficie, entonces vale (en lo que sigue $\iint_{\bigcirc\mathcal{S}}$ es la integral sobre la superficie cerrada $\mathcal{S}$)

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}\; \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}\right) &= \iint_{\bigcirc\mathcal{S}} \underbrace{ds\,\widehat{n}}_{d\overrightarrow{s}} \cdot \overrightarrow{A}\;, \qquad \text{de la divergencia,} && (54)\\
\int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}\; \left(\overrightarrow{\nabla}\, f\right) &= \iint_{\bigcirc\mathcal{S}} d\overrightarrow{s}\; f\;, \qquad \text{del gradiente,} && (55)\\
\int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}\; \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right) &= \iint_{\bigcirc\mathcal{S}} d\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{A}, \qquad \text{del rotor, y} && (56)
\end{aligned}
$$

G. El teorema de Stokes

Si la curva c es el contorno de S y que $d\overrightarrow{l}$ y $\widehat{n}$ satisfacen la regla de la mano derecha, entonces vale

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} d\overrightarrow{s} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right) &= \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{l}\,, \qquad \text{y una variación muy util será,} && (57)\\
\iint_{\mathcal{S}} d\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{\nabla} f &= \oint_{\mathcal{C}} f\; d\overrightarrow{l}\;. && (58)
\end{aligned}
$$

Miraglia. Física 3 (a 20). 2do cuat. 2015.

II. EXPRESIÓN EXPLÍCITA DE LOS OPERADORES

A. El gradiente

En Coordenadas **cartesianas** (x, y, z),

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial x} f,\ \frac{\partial}{\partial y} f,\ \frac{\partial}{\partial z} f\right) \ , \tag{59}$$

en Coordenadas **esféricas** (r, θ, φ),

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial r} f\ \widehat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} f\ \widehat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} f\ \widehat{e}_\varphi \ , \tag{60}$$

y en Coordenadas **cilíndricas** (ρ, φ, z),

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial \rho} f\ \widehat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} f\ \widehat{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f\ \widehat{e}_z \ . \tag{61}$$

B. La divergencia

En Coordenadas **cartesianas** (x, y, z),

$$\vec{F} = F_x\widehat{e}_x + F_y\widehat{e}_y + F_z\widehat{e}_z \ , \quad \text{con} \quad F_{x/y/z} = F_{x/y/z}(x, y, z) \ , \tag{62}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot (F_x, F_y, F_z) \ , \tag{63}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}F_x + \frac{\partial}{\partial y}F_y + \frac{\partial}{\partial z}F_z \ , \tag{64}$$

en Coordenadas **esféricas** (r, θ, φ),

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\ F_\theta\right) +, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}F_\varphi \ , \tag{65}$$

y en Coordenadas **cilíndricas** (ρ, φ, z)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho F_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}F_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}F_z \ . \tag{66}$$

C. El rotor

En coordenadas **cartesianas**: $\vec{F} = F_x\widehat{e}_x + F_y\widehat{e}_y + F_z\widehat{e}_z$, con $F_{x/y/z} = F_{x/y/z}(x, y, z)$,

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \widehat{e}_x & \widehat{e}_y & \widehat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{B} = (B_x, B_y, B_z) \ , \tag{67}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y, -\frac{\partial}{\partial x}F_z + \frac{\partial}{\partial z}F_x, \frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x\right) \ , \tag{68}$$

Miraglia. Física 3 (s.20). 2do cuat. 2015.

en Coordenadas **esféricas**: $\overrightarrow{F} = F_r \widehat{e}_r + F_\theta \widehat{e}_\theta + F_\varphi \widehat{e}_\varphi$, con $F_{r/\theta/\varphi} = F_{r/\theta/\varphi}(r, \theta, \varphi)$,

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \widehat{e}_r & r\widehat{e}_\theta & r\sin\theta \widehat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi \end{vmatrix} = \overrightarrow{B}, \tag{69}$$

y en Coordenadas **cilíndricas**: $\overrightarrow{F} = F_\rho \widehat{e}_\rho + F_\varphi \widehat{e}_\varphi + F_z \widehat{e}_z$, con $F_{\rho/\varphi/z} = F_{\rho/\varphi/z}(\rho, \varphi, z)$,

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \widehat{e}_r & \rho\widehat{e}_\varphi & \widehat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{B}. \tag{70}$$

D. El Laplaciano

En Coordenadas **cartesianas** (x, y, z),

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f, \tag{71}$$

en coordenadas **esféricas** (r, θ, φ),

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial}{\partial r} f) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f + \frac{\cot\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} f, \tag{72}$$

y en Coordenadas **cilíndricas** (ρ, φ, z),

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f, \tag{73}$$

Ocacionalmente opera sobre vectores. Por ejemplo $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$$\nabla^2 \overrightarrow{F} = (\nabla^2 F_x, \nabla^2 F_x, \nabla^2 F_x) = \overrightarrow{vector}. \tag{74}$$

E. El operador $\overrightarrow{\nabla}$ direccional

Pueden operar sobre escalares o vectores. En cartesianas es muy simple y valen, para **escalares,**

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) f &= \left[(A_x, A_y, A_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] f, \\ &= \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) f, \end{aligned} \tag{75}$$

Miraglia. Física 3 (a.20)-2do cuat. 2015.

para **vectores,**

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}=\left[\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)B_x,\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)B_y,\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)B_y\right], \tag{76}$$

para **producto,**

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(f\vec{B}\right)=f\left[\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)B_x,\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)B_y,\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)B_y\right]+\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)f. \tag{77}$$

III. LA FUNCION δ DE DIRAC Y Θ DE HEAVISIDE

A. En una dimensión

Se define la funcion δ de Dirac de infinitas maneras; la mas rústica es:.

$$\delta(x)=\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\;\delta_\varepsilon(x)=\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\begin{cases}1/\varepsilon, & \text{para } |x|<\varepsilon/2\\ 0, & \text{para } |x|>\varepsilon/2\end{cases}. \tag{78}$$

Otras definiciones de interés son

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2+x^2)}=\frac{2}{\pi^2}\frac{\varepsilon^3}{(\varepsilon^2+x^2)^2}\;,.. && (79)\\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}=\frac{\varepsilon}{\pi}\frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{x^2}\;,... && (80)\\ &= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}e^{-|x|/\varepsilon}=\frac{1}{2\varepsilon}e^{-(x/\varepsilon)^2}\;,..., && (81)\end{aligned}$$

y muchisimas mas. La δ esta normalizada

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\;\delta(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\;\delta(x-x_0)=1\;. \tag{82}$$

La propiedad mas importante es que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\;\delta(x-x_0)f(x) &= f(x_0),\quad \text{ó} && (83)\\ \int_a^b dx\;\delta(x-x_0)f(x) &= \begin{cases}f(x_0) & \text{si } x_0\in[a,b]\\ 0 & \text{si } x_0\notin[a,b]\end{cases}. && (84)\end{aligned}$$

Miraglia. Física 3(á20). 2do cuat. 2015.

Otras propiedades de interés son

$$\delta(x-x_0)f(x) = f(x_0) \ , \tag{85}$$

$$x\delta(x) = 0 \ , \tag{86}$$

$$\delta(x) = \delta(-x) \ , \tag{87}$$

$$\delta(x_1-x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta(x-x_1)\delta(x-x_2) \ , \tag{88}$$

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x), \qquad \text{si } c = cte, \tag{89}$$

$$\delta(g(x)) = \sum_j \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i), \ \text{ tal que } \ g'(x_i) = 0 \ . \tag{90}$$

También hay una definición muy usada en el contexto de la transformada de Fourier,

$$\delta(x) = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\ \delta_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{\pm ikx-\varepsilon|k|} \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{\pm ikx} \ , \tag{91}$$

$$\delta'(x) = \delta^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{\pm ikx} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{\pm ikx}(\pm i)k, \tag{92}$$

$$(-1)^n f^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta^{(n)}(x)f(x) \ . \tag{93}$$

La funcion escalón (*step function*) ó Θ de Heaviside en su forma mas rustica se define así

$$\Theta(x) = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\Theta_\varepsilon(x) = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\begin{cases} 0, & \text{para } x < -\varepsilon/2 \\ \frac{2x+\varepsilon}{2\varepsilon}, & \text{para } |x| < \varepsilon/2 \\ 1, & \text{para } x > \varepsilon/2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{para } x = 0 \\ 1, & \text{para } x > 0 \end{cases} \tag{94}$$

Las propiedades mas importantes son

$$\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x) \tag{95}$$

$$\Theta(x-x_0) = \int_{-\infty}^{x} dx\ \delta(x-x_0) \tag{96}$$

B. En 3 dimensiones

Las extensiones son obvias. En coordenadas **cartesianas,**

$$\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \ , \tag{97}$$

Miraglia. Fisica 3 (a.2015) 2do cuat. 2015.

en **esféricas**

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\ , \tag{98}$$

y en **cilíndricas**

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{\rho}\delta(r-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)\ , \tag{99}$$

En todos los casos, satisfacen

$$\int d\vec{r}\ \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=1\ . \tag{100}$$

En 3 dimensiones la $\delta(\vec{r})$ tiene la siguiente representación integral

$$\delta(\vec{r})=\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\delta_\varepsilon(\vec{r})=\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{(\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}-\varepsilon|k|)}\overset{!}{=}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{101}$$

C. Ecuación de Poisson

El resultado mas importante es

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{r})\qquad\text{ecuación de Poisson.} \tag{102}$$

Hay una generalización que se utilza en la determinación de la función de Green en teoría electromagnética (no lo veremos)

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\frac{\exp^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}=-4\pi\delta(\vec{r})\ . \tag{103}$$

La demostración de la ecuación de Poisson es muy simple. Partiendo de la identidad

$$\frac{e^{-\epsilon r}}{r}=\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{d\vec{k}}{k^2+\epsilon^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{104}$$

Operando $\nabla^2_{\vec{r}}$ a ambos términos

$$\nabla^2_{\vec{r}}\frac{e^{-\epsilon r}}{r}=\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{d\vec{k}}{k^2+\epsilon^2}\underbrace{\nabla^2_{\vec{r}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{(i\vec{k})^2e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}\ , \tag{105}$$

$$=-\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{d\vec{k}\,(k^2\overbrace{+\epsilon^2-\epsilon^2}^{0})}{k^2+\epsilon^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \tag{106}$$

$$=-\underbrace{\frac{1}{2\pi^2}(2\pi)^3}_{4\pi}\delta(\vec{r})+\epsilon^2\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\frac{d\vec{k}}{k^2+\epsilon^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{e^{-\epsilon r}/r},$$

$$\left(\nabla^2_{\vec{r}}-\epsilon^2\right)\frac{e^{-\epsilon r}}{r}=-4\pi\delta(\vec{r}). \tag{107}$$

Tomando el limite cuando $\epsilon\to 0$, se llega a la ecuacion de Poisson.

Miraglia. Fisica 3 (a.20). 2do cuat. 2015.

IV. DESARROLLOS PARTICULARES

Para determinar el campo magnéticos $\overrightarrow{\mathrm{B}}$

Si $\vec{F}_1 = \vec{A}_1 \times \vec{B}$, $\vec{F}_2 = \vec{A}_2 \times \vec{B}$ y $\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = 0$ (son perpendiculares) entonces vale

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_1 \times \vec{A}_1}{A_1^2} + \frac{\vec{A}_1 \cdot \left[(\vec{F}_2 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_1\right]}{A_1^2 A_2^2} \tag{108}$$

Para determinar la intensidad magnética $\vec{H}$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{M} \times \vec{G}) \;=\; & -\vec{\nabla}(\vec{M} \cdot \vec{G}) + 2(\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{M} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{M}) \\ & + \vec{M}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}) + \vec{M} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}). \end{aligned} \tag{109}$$

Si $\vec{M} = \vec{M}(\vec{x})$ no depende de las variables de derivación de $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}$:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times (\vec{M} \times \vec{G}) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}(\vec{M} \cdot \vec{G}) + \vec{M}\,(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{G}) + \vec{M} \times (\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{G}). \tag{110}$$

Si además $\vec{G} = \vec{G}(\vec{r})$ y tiene la siguiente expresión

$$\vec{G}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|}, \tag{111}$$

entonces $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{G} = 0$, y $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{G} = -\nabla^2_{\vec{r}} 1/|\vec{x} - \vec{r}| = +4\pi\delta(\vec{x} - \vec{r})$, con lo que queda

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \left(\vec{M}(\vec{x}) \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}|}\right) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(\vec{M}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}|}\right) + 4\pi\delta(\vec{x} - \vec{r})\vec{M}(\vec{r}). \tag{112}$$

Para demostrar la divergencia nula de $\vec{A}$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} = \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|}, \tag{113}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} = \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{J}(\vec{x})}_{0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} + \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_{x} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|}. \tag{114}$$

Si $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ (caso estacionario), y sabiendo que

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} = -\frac{\vec{r} - \vec{x}}{|\vec{r} - \vec{x}|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|}, \qquad \text{entonces,} \tag{115}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} = -\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} \;. \tag{116}$$

El truco básico

Miraglia. Física 3 (a 20). 2do cuat. 2015.

En varias situaciones vamos a estar interesado en calcular

$$f(\vec{r}) = \int_{\infty} d\vec{x}\ \vec{A}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \right) \ , \tag{117}$$

donde el ∞ indica que tenemos que integrar en todo el espacio. Usando (23)

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \left(\vec{A}(\vec{x}) \frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \right) = \vec{A}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \right) + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right) \ , \tag{118}$$

(117) queda

$$f(\vec{r}) = \int_{\infty} d\vec{x} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \left(\vec{A}(\vec{x}) \frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \right) - \int_{\infty} d\vec{x} \frac{\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right)}{|\vec{r}-\vec{x}|} \ , \tag{119}$$

y usando Gauss

$$f(\vec{r}) = \iint_{\bigcirc \mathcal{S}\infty} ds \ \frac{\left[\widehat{n} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right]}{|\vec{r}-\vec{x}|} + \int_{\infty} d\vec{x} \frac{\left[-\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right]}{|\vec{r}-\vec{x}|} \ . \tag{120}$$

Y aquí simpre tenemos dos caminos.

Primer camino: si $\vec{A}(\vec{x})$ es no nulo dentro de un cierto volumen $\mathcal{V}$ cuya superficie es $\mathcal{S}$ entonces

$$f(\vec{r}) = \iint_{\bigcirc \mathcal{S}} ds \ \frac{\left[\widehat{n} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right]}{|\vec{r}-\vec{x}|} \ + \ \int_{\mathcal{V}} d\vec{x} \frac{\left[-\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right]}{|\vec{r}-\vec{x}|}, \tag{121}$$

así la cantidad $\left[\widehat{n} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right]$ se asociará a una distribución superficial de cargas eléctricas o de polos magnéticos, y $\left[-\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right]$ se interpretará como una distribución volumétrica de cargas o polos.

El segundo camino consiste en mantener la integral hasta el infinito con lo que alli: $\vec{A}(\vec{x}) = 0$ y por lo tanto la primera integral del RHS se anula. Sobrevive la segunda. En ese caso $\vec{A}(\vec{x})$ tendrá un rango limitado por la Θ de Heaviside y el $\vec{\nabla}_{\vec{x}}$ (derivada) generara (de acuerdo a (95)) una función δ de Dirac en la superficie, que reproducirá el término $\left[\widehat{n} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right]$ superficial anteriormente mencionado. Ambas estrategias son equivalentes.

Miraglia Fisica 3 (& 20). 2do cuat. 2015.