

# FISICA 3. Electricidad. 2do. cuatrimestre 2015

J. Miraglia

(Dated: September 14, 2015)

## Abstract

### LEY DE COULOMB.

Distribuciones de carga. Campo eléctrico. Potencial eléctrico. La fuerza eléctrica es conservativa. Ley de Gauss. Ecuaciones de Poisson y Laplace. Líneas de campo.

### EXPANSION MULTIPOLAR

Monopolo, dipolo y cuadrupolo. Dipolo en un campo eléctrico. Interacción carga-dipolo. Interacción dipolo-dipolo. Dipolo inducido. Interacción dipolo-inducido dipolo-inducido. Lennard Jones.

### ENERGIA ELECTROSTATICA

De un sistema de cargas puntuales. De una distribución continua. Autoenergía.

### CONDUCTORES IDEALES. CAPACITORES

Propiedades. Método de las imágenes. Sistema de conductores. Capacitores de placas paralela. Energía acumulada dentro de un capacitor de placas paralelas.

### DIELECTRICOS

Propiedades. Modelo Simple. Electrostatica macroscópica. Medios lineales isótropos y homogéneos (LIH). Efecto de bordes. Energía electrostática en presencia de dieléctricos. Sobre la ley de Coulomb en medios LIH. Ecuaciones de Poisson y Laplace en medios dieléctricos LIH. Condición de contorno de dos medios dieléctricos. Clausius Mosotti.

### MATERIALES OHMICOS Y CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

Ley de Ohm microscópica. Modelo de Drude. Corriente eléctrica. Velocidad de desplazamiento. Ley de Ohm macroscópica y microscópica. Variación de la resistividad con la temperatura. Circulación del campo eléctrico. Fuerza electromotriz. Ley de Joule. Leyes de Kirchhoff. Materiales Eléctricos.

(falta, incluir figuras y tablas, corregir, poner acentos)

PACS numbers:

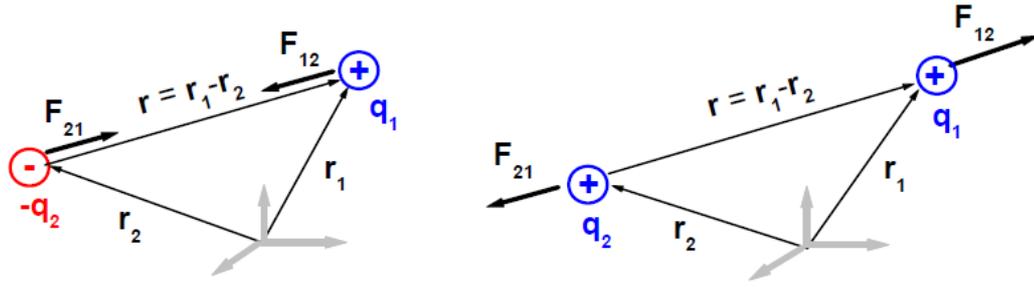


FIG. 1:

### I. LEY DE COULOMB (1785)

Se encuentra experimentalmente (y es una ley) que la fuerza con la que se atraen (o repelen) dos cargas puntuales en reposo (electrostática) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La fuerza que sufre la partícula "1" ( $q_1$  en  $\vec{r}_1$ ) debido a la "2" ( $q_2$  en  $\vec{r}_2$ ) está dada por

$$\vec{F}_{12} = k_e q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \quad \text{Ley de Coulomb} \quad (1)$$

$$= k_e q_2 q_1 \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad \text{con } \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (2)$$

$$k_e = 8.988 \times 10^9 \frac{K m^3}{C^2 s^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \text{constante eléctrica,} \quad (3)$$

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2} = \text{permitividad eléctrica del vacío,} \quad (4)$$

$$[q] = \text{Coulomb} = 6.245 \times 10^{18} e \quad (5)$$

$$e = \text{carga del electrón,} \quad (6)$$

con lo que introducimos una nueva unidad: el Coulomb (pasamos de MKS a MKSC). En consecuencia la fuerza que sufre la partícula "2" debido a la "1" ( $\vec{r}_1 \longleftrightarrow \vec{r}_2$ ) está dado por

$$\vec{F}_{21} = k_e q_2 q_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\vec{F}_{12}, \quad (7)$$

Se desprende que:

- $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ , por lo que se satisface el **ppio. de acción y reacción**.
- Si el signo( $q_1 q_2$ )=+1, las partículas se repelen;  $\vec{F}_{12} \parallel \hat{r}$ , y  $\vec{F}_{21} \parallel (-\hat{r})$
- Si el signo( $q_1 q_2$ )=-1, las partículas se atraen;  $\vec{F}_{12} \parallel (-\hat{r})$ , y  $\vec{F}_{21} \parallel \hat{r}$

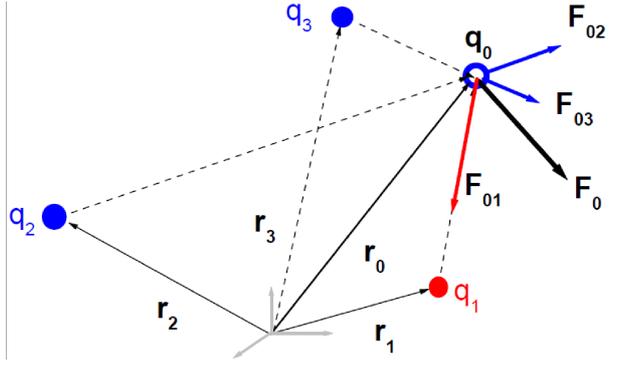


FIG. 2:

- Comparando con la gravitación

$$\vec{F}_{21} = Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Ks^2}, \quad (8)$$

$G$  es entonces 20 órdenes de magnitud más grande que  $k_e$ !. Más aún; si comparamos la interacción eléctrica con la gravitatoria en un sistema electrón-protón ( $m_p = 1836m_e$ ,  $m_e = 9.1094 \times 10^{-31}K$ ); La eléctrica resulta ser 39 órdenes de magnitud mayor!

**Principio de conservación de la carga eléctrica:** En un sistema aislado, la carga total se conserva (será importante para la ecuación de continuidad), es decir

$$q_{tot} = \sum_i q_i = \text{constante (suma algebraica)}. \quad (9)$$

**Principio de superposición:** La fuerza  $\vec{F}_0$  que sobre una partícula ( $q_0$  en  $\vec{r}_0$ ) ejerce un sistema de partículas ( $q_i$  en  $\vec{r}_i$ ) está dado por (suma vectorial):

$$\vec{F}_0 = \sum_i \vec{F}_{0i} = \sum_i k_e q_0 q_i \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3}. \quad (10)$$

### A. Distribuciones de carga

Para determinar la fuerza que ejerce cualquier cuerpo continuo sobre una carga puntual ( $q_0$  en  $\vec{r}_0$ ) nos conviene dividir el cuerpo en pequeños diferenciales centrados en  $\vec{r}_i$  con carga  $dq_i$  y usar el principio de superposición:

$$\vec{F}_0 = \sum_i k_e q_0 (dq_i) \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3}. \quad (11)$$

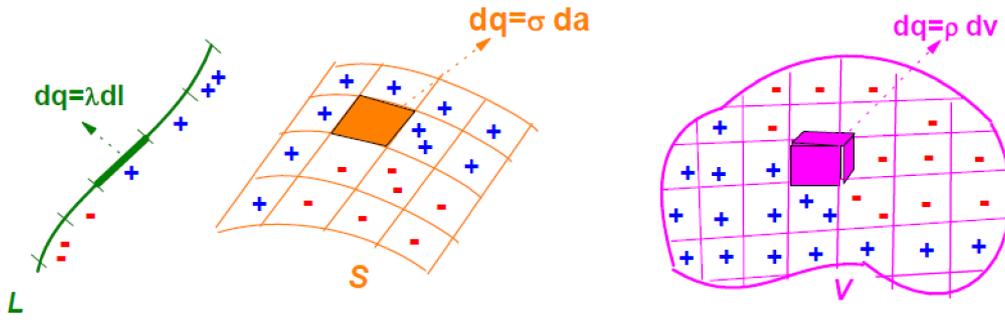


FIG. 3:

Pasando al cálculo diferencial, podemos especificar si el cuerpo es:

- volumétrico,  $dq_i = \rho d\vec{r}'$ , con  $\rho$  densidad volumétrica de carga  $[\rho] = C/m^3$ ,
- superficial,  $dq_i = \sigma d^2a$ , con  $\sigma$  densidad superficial de carga  $[\sigma] = C/m^2$ ,
- lineal,  $dq_i = \lambda dl$ , con  $\lambda$  densidad lineal de carga  $[\lambda] = C/m$ . Resumiendo

$$dq' = \left\{ \begin{array}{l} d^3r' \rho(r') \\ d^2a' \sigma(a') \\ dl' \lambda(l') \end{array} \right\} \quad (12)$$

En el límite la suma se transforma en una integral,  $\sum_i \rightarrow d\vec{r}'$  (variable continua) por lo que

$$\vec{F}_0 = k_e q_0 \int \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} d^3r' \rho(r') \\ d^2a' \sigma(a') \\ dl' \lambda(l') \end{array} \right\}}_{dq''} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3}, \quad (13)$$

donde hemos considerado una posible variación espacial ( $\vec{r}'$ ,  $a'$  ó  $l'$ ) de la densidad de carga.

Si estamos interesados en calcular la interacción entre cuerpos continuos, hacemos lo mismo: dividimos los dos cuerpos en pequeños diferenciales, usamos el principio de superposición y pasamos a la integral. Para el caso de dos volúmenes tendremos que la fuerza que sobre el cuerpo "1" (con  $\rho_1$ ) le ejerce el "2" (con  $\rho_2$ ), está dado por (como en gravitación)

$$\vec{F}_{12} = k_e \int \int \underbrace{d^3r_1 \rho_1(\vec{r}_1)}_{dq_1} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \underbrace{\rho_2(\vec{r}_2) d^3r_2}_{dq_2}. \quad (14)$$

Retrocediendo, si en lugar de cuerpos continuos tuvieramos una partícula puntual "a" ( $q_a$  en

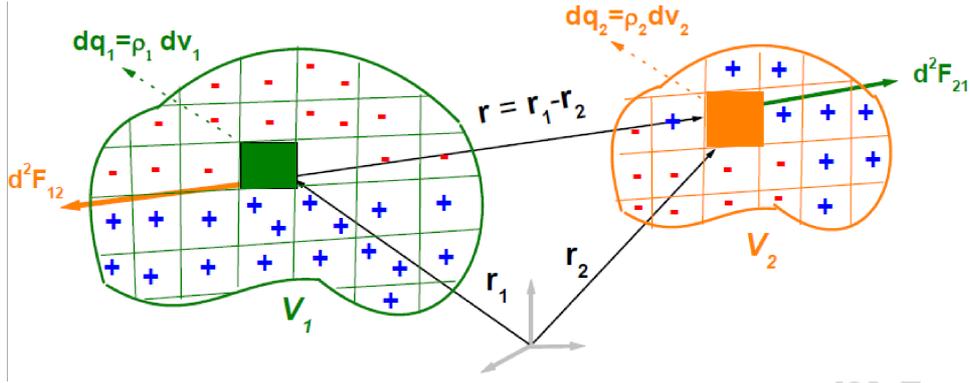


FIG. 4:

$\vec{r}_a$ ) y otra "b" ( $q_b$  en  $\vec{r}_b$ ), las distribuciones pueden escribirse como

$$\rho_1(\vec{r}_1) = q_a \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_a) \quad \text{y} \quad \rho_2(\vec{r}_2) = q_b \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_b), \quad (15)$$

usando la propiedad de la delta, obtenemos

$$\vec{F}_{12} = k_e q_a q_b \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3}, \quad (16)$$

que es la Ley de Coulomb original (1). La densidad de carga de las partículas puntuales son representadas por las funciones  $\delta$ .

## B. Campo eléctrico

Vimos que la fuerza que sufre la partícula ( $q$  en  $\vec{r}$ ) debido a la "1" ( $q_1$  en  $\vec{r}_1$ ) está dada por

$$\vec{F} = k_e q q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}. \quad (17)$$

Definimos el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = k_e q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}, \quad (18)$$

$\vec{E}$  es un vector y sus unidades son  $[E] = N/C = K \text{ m}/(s^2C)$ . Luego podemos escribir que

$$\vec{F} = q \vec{E}, \quad (19)$$

en forma similar al caso gravitatorio:  $\vec{F} = m \vec{g}$ , donde  $\vec{g}$  era el campo gravitatorio. Si en lugar de una partícula puntual ( $q_1$  en  $\vec{r}_1$ ), tuviesemos una distribución continua, debemos

proceder como en el caso anterior. Esto es: dividir el cuerpo en pequeños diferenciales centrados en  $\vec{r}'_i$  con carga  $dq_i$  y usar el principio de superposición, y llegamos a

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \int \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} d^3r' \rho(r') \\ d^2a' \sigma(a') \\ dl' \lambda(l') \end{array} \right\}}_{dq'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \text{campo eléctrico.} \quad (20)$$

El límite en (18) conlleva un concepto físico importante: la carga tiene que ser lo suficientemente pequeña para no distorsionar las distribuciones que ocasionan el campo  $\vec{E}$ . Por esa razón a  $q$  se la llama carga de prueba (*test charge*).

### C. Potencial eléctrico

Usando ecuaciones del Apéndice, resulta que (20) puede reescribirse así:

$$\vec{E} = k_e \int d^3r' \rho(\vec{r}') \overbrace{\left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]}^{-\nabla_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}, \quad (21)$$

$$= -\nabla_{\vec{r}} V(\vec{r}), \quad (22)$$

$$V(\vec{r}) = k_e \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \text{potencial eléctrico,} \quad (23)$$

$V(\vec{r})$  es el potencial eléctrico, es un escalar y sus unidades son  $[V] = \text{Voltios} = m^2 K / (s^2 C)$ . Con lo cual podemos redefinir las unidades del campo como  $[E] = N/C = V/m$ . Valen las siguientes relaciones

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q\vec{\nabla}_{\vec{r}} V(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} [qV(\vec{r})] = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} U(\vec{r}), \quad (24)$$

$$U(\vec{r}) = qV(\vec{r}) = \text{energía potencial eléctrica,} \quad [U] = \text{Joule} = Km^2/s^2. \quad (25)$$

Otra forma de definir el potencial eléctrico  $V = U/q$  (que será importante cuando veamos la batería) es: energía (trabajo) por unidad de carga. Como siempre, si las distribuciones de cargas son superficiales o lineales vale la sustitución (20) en (23), o sea

$$V(\vec{r}) = k_e \int \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} d^3r' \rho(r') \\ d^2a' \sigma(a') \\ dl' \lambda(l') \end{array} \right\}}_{dq''} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (26)$$

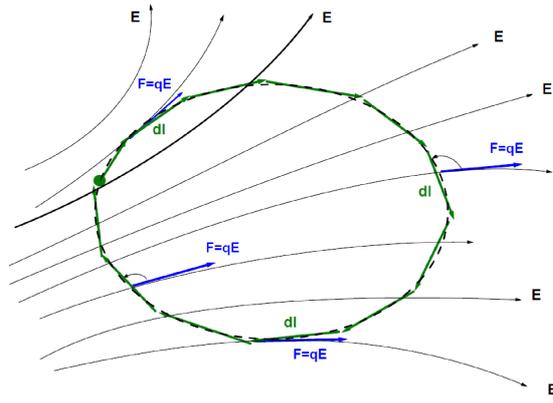


FIG. 5:

D.

E. **La fuerza eléctrica es conservativa**

Si  $\vec{E} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}V(\vec{r})$ , entonces (ver Apéndice)

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{E} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times [-\vec{\nabla}_{\vec{r}}V(\vec{r})] = 0. \quad (27)$$

Si el  $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{E} = 0$ , usando el teorema de Stokes

$$0 = \iint_S d^2a \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \frac{1}{q} \oint_C (q\vec{E}) \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (28)$$

Si  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ , implica que el trabajo a lo largo de una curva cerrada es nulo, que es la definición básica de una fuerza conservativa. Nos ahorramos así la introducción pedestre de realizar un trabajo cuasiestacionario como se hace en los cursos básicos.

F. **Ley de Gauss**

Se define  $d\phi_E = \vec{E} \cdot \hat{n} d^2a =$  diferencial de flujo eléctrico, entonces el flujo en una determinada superficie  $\mathcal{S}$  es simplemente

$$\phi_E = \iint_S d\phi_E = \iint_S d^2a \vec{E} \cdot \hat{n} = \quad \text{flujo electrico} , \quad (29)$$

(analogía con los fluidos:  $\vec{E} \rightarrow \vec{v} =$  velocidad local del fluido, por lo que  $d\phi_v = \vec{v} \cdot$

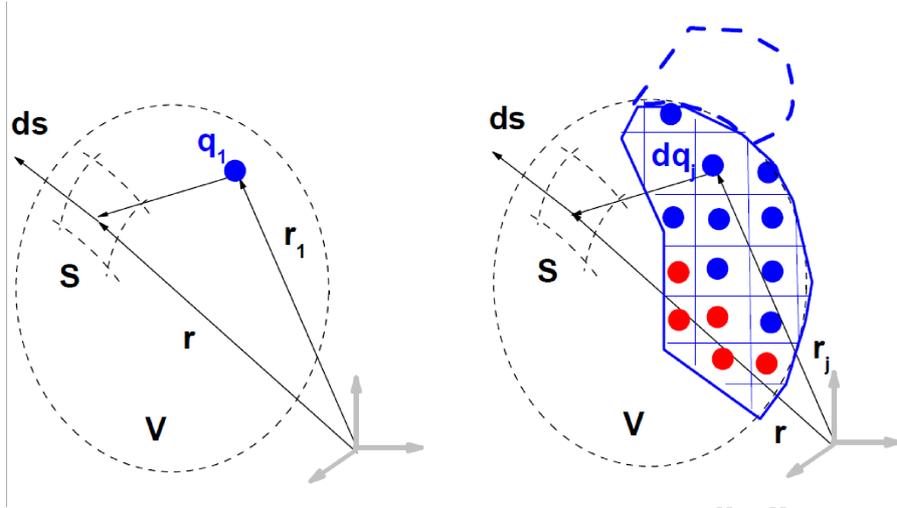


FIG. 6:

$\hat{n} d^2a = m^3/\text{seg} = \text{caudal}$ ). Vamos a demostrar la ley de Gauss en dos etapas. Primero consideremos una partícula puntual de carga  $q_1$  en la posición  $\vec{r}_1$ . El campo eléctrico  $\vec{E}_1$  generado por esa partícula es por Coulomb

$$\vec{E}_1 = k_e q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = -k_e q_1 \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \text{ entonces} \quad (30)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{E}_1 = -k_e q_1 \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = -k_e q_1 \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \quad (31)$$

$$= 4\pi k_e q_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{q_1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \quad (32)$$

donde hemos usado la propiedad del laplaciano de la función  $\delta$  (ver Apéndice, teorema de Poisson) y la relación entre  $k_e$  y  $\epsilon_0$  dado por la relación (3). Tomemos cualquier superficie cerrada  $\mathcal{S}$  que encierra un volumen  $\mathcal{V}$ , hagamos la integral sobre dicho volumen, y usemos el teorema de la divergencia

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{E}_1 = \int_{\mathcal{V}} d^3r \frac{q_1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) = \begin{cases} q_1/\epsilon_0, & \text{si } q_1 \text{ dentro de } \mathcal{V} \\ 0, & \text{si } q_1 \text{ fuera de } \mathcal{V} \end{cases} \quad (33)$$

$$= \iint_{\mathcal{S}} d^2a \vec{E} \cdot \hat{n} \quad (\text{Teorema de la divergencia}) \quad (34)$$

con lo que

$$\epsilon_0 \iint_{\mathcal{S}} d^2a \vec{E} \cdot \hat{n} = q_{enc} = \begin{cases} q_1, & \text{si } q_1 \text{ dentro de } \mathcal{V} \\ 0, & \text{si } q_1 \text{ fuera de } \mathcal{V} \end{cases} \quad (35)$$

Ahora generalicemoslo para cualquier cuerpo continuo. Como siempre, discreticemoslo en pequeños volúmenes con cargas  $dq_j = d^3r \rho(r_j)$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j dq_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j), \quad (36)$$

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{j \text{ dentro de } \mathcal{V}} dq_j \quad (37)$$

Tomado el límite, pasamos de  $\Sigma_j$  a la integral  $\int_{\mathcal{V}}$  con  $dq_j = d^3r \rho(\vec{r}')$ . entonces llegamos a

$$\boxed{\epsilon_0 \iint_{\circ \mathcal{S}} d^2a \vec{E} \cdot \hat{n} = q_{enc} = \int_{\mathcal{V}} d^3r' \rho(\vec{r}') \quad \text{Ley de Gauss ,}} \quad (38)$$

( $\circ \mathcal{S}$  significa superficie que encierra a  $\mathcal{V}$ ). Por  $q_{enc}$  nos referimos a la suma de las cargas que están sólo **dentro** de  $\mathcal{V}$ . Y ésta es la famosa ecuación de Gauss que se utiliza para calcular campos eléctricos cuando la simetría del caso es simple: esférica, cilíndrica o planar.

Usando nuevamente el teorema de la divergencia, tenemos

$$\epsilon_0 \iint_{\circ \mathcal{S}} d^2a \vec{E} \cdot \hat{n} = \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\mathcal{V}} d^3r' \rho(\vec{r}'). \quad (39)$$

Como vale para cualquier volumen que consideremos, entonces podemos decir que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$ . Las ecuaciones fundamentales del campo electrostático son entonces

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} & \text{Ecuación de la divergencia,} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 & \text{Ecuación del rotor.} \end{aligned}} \quad (40)$$

### G. Ecuaciones de Poisson y Laplace

Combinando la ecuación de de la divergencia  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$  con la del rotor nulo que implica  $\vec{E} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} V$ , y sabiendo  $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} = \nabla_{\vec{r}}^2$ , llegamos a la ecuación de Poisson

$$\boxed{\nabla_{\vec{r}}^2 V = -\rho/\epsilon_0, \quad \text{Ecuación de Poisson .}} \quad (41)$$

(para simplificar, de aquí en más omitiremos  $\vec{r}$  cuando sea posible: se entiende por ejemplo que  $\nabla^2 = \nabla_{\vec{r}}^2$ ). En los lugares donde no hay carga presente  $\rho = 0$ , la ecuación se reduce a

$$\boxed{\nabla^2 V = 0, \quad \text{Ecuación de Laplace .}} \quad (42)$$

Que debe resolverse con condiciones de contorno sobre una superficie cerrada, y la solución es única.

- Si en dicha superficie se impone  $V$ , las condiciones se denominan condiciones de Dirichlet.

- Si en dicha superficie se impone  $\partial V / \partial n$  ( $\hat{n}$  la dirección normal a la superficie, esencialmente el campo eléctrico) se denominan condiciones de Neuman y también la solución es única.

Se puede imponer condiciones mixtas. Las condiciones no pueden ser redundantes.

### H. Líneas de campo

Es una curva imaginaria que se dibuja de tal manera que su dirección en cualquier punto coincida con la dirección del campo eléctrico. Tiene una semejanza con las líneas de fluido. Se encuentra que:

- Las líneas de campo NO se cruzan.
- Nacen en las cargas positivas (fuentes) y mueren en las negativas (sumideros). [Analogía con los fluidos: canillas y rejillas].
- El campo es más intenso donde se juntan las líneas de campo [velocidad de salida del fluido es mayor cuando se estrangula una manguera]. Esto resulta de aplicar la ley de Gauss. de la figura resulta que

$$\iint_{\circ S} d^2 a \vec{E} \cdot \hat{n} = 0 = \vec{E}_1 \cdot \vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{S}_2 + \underbrace{\vec{E}_3 \cdot \vec{S}_3}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{S_2}{S_1} \quad (43)$$

con lo que si  $S_2 > S_1 \Rightarrow E_1 > E_2$ .

- Las líneas equipotenciales (igual valor de  $V$ ) son perpendiculares a las líneas de campo. La demostración es simple; hagamos un desarrollo de Taylor del potencial en el punto  $\vec{r} = \vec{r}_0$

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= V(\vec{r}_0) + (x - x_0) \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{\vec{r}_0} + (y - y_0) \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{\vec{r}_0} + (z - z_0) \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{\vec{r}_0} + \dots, \\ &= V(\vec{r}_0) + \vec{\delta}_r \cdot \vec{\nabla} V = V(\vec{r}_0) + \vec{\delta}_r \cdot \vec{E}, \end{aligned} \quad (44)$$

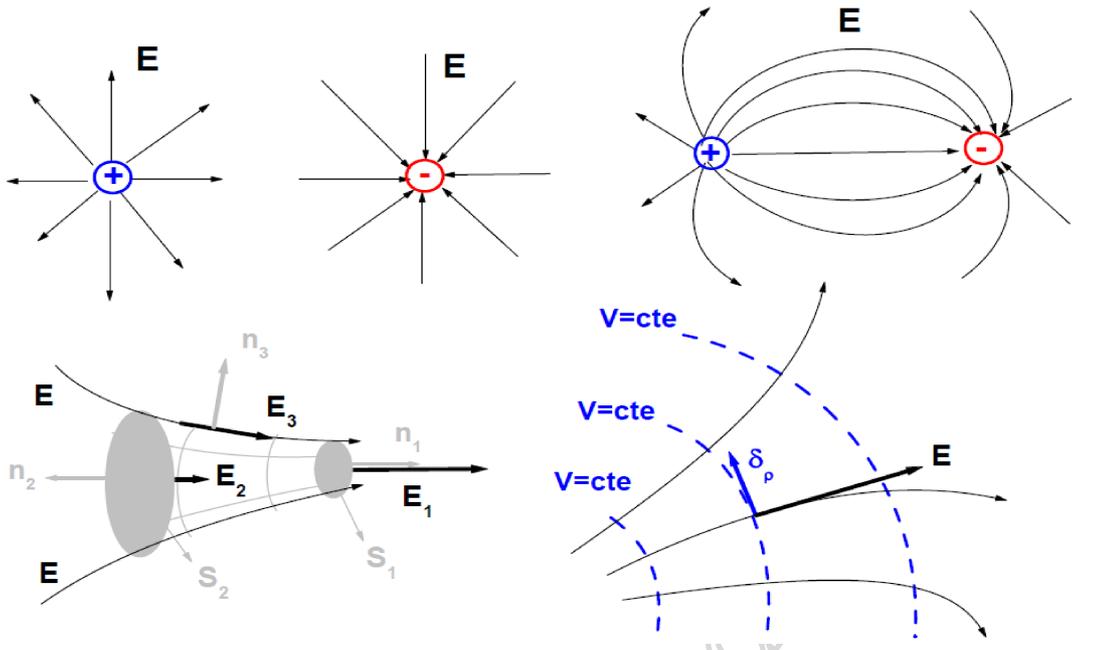


FIG. 7:

si  $\vec{\delta}_r$  es perpendicular a  $\vec{E}$  entonces  $\vec{\delta}_r \cdot \vec{E} = 0$  y entonces:  $V(\vec{r}_0) = V(\vec{r})$  (dirección equipotencial).

## II. EXPANSIÓN MULTIPOLAR

Usando las expansiones del Apéndice para grandes distancias se muestra que, para cualquier distribución de carga, a grandes distancias ( $r \rightarrow \infty$ ) su potencial se comporta como

$$V(\vec{r}) = k_e \int d^3r' \rho(r') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (45)$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} k_e \int d^3r' \rho(r') \left[ \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2 r^2\} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \right], \quad (46)$$

$$(47)$$

$$\boxed{V(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} k_e \frac{q}{r} + k_e \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + k_e \frac{\vec{r} \times \vec{Q} \times \vec{r}}{2r^5} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)}, \quad (48)$$

donde  $r$  es mucho mayor que las dimensiones del cuerpo en cuestión, y

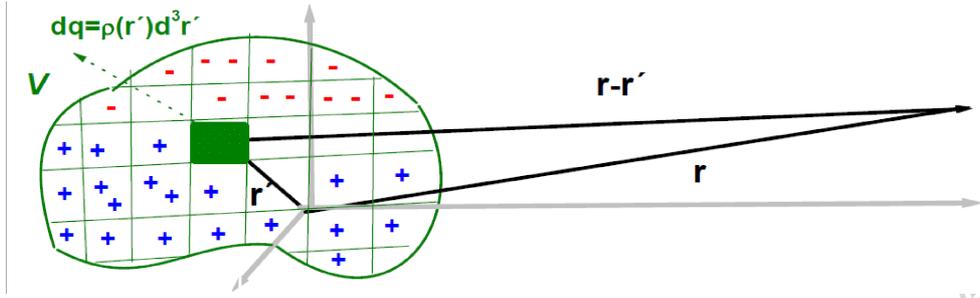


FIG. 8:

$$q = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \quad \text{monopolo ,} \quad (49)$$

$$\vec{p} = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \quad \text{dipolo ,} \quad (50)$$

$$Q_{i,j} = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] \quad \text{cuadrupolo .} \quad (51)$$

Este último termino resulta de hacer

$$\begin{aligned} 3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2 r^2 &= 3 \left( \sum_i x_i x'_i \right)^2 - r'^2 \sum_i x_i^2 \\ &= \sum_{ij} (3x_i x'_i x_j x'_j - r'^2 x_i x_j \delta_{ij}) = \sum_{ij} x_i (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) x_j \end{aligned} \quad (52)$$

donde por conveniencia hemos usado la notación  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ , y  $\vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ .

### A. Dipolo

El caso más elemental se ilustra como dos cargas puntuales de igual magnitud  $q$  pero de signos opuestos colocadas en  $\pm \vec{d}/2$ . La densidad es entonces

$$\rho(\vec{r}) = +q\delta(\vec{r} - \vec{d}/2) - q\delta(\vec{r} + \vec{d}/2), \quad \text{luego,} \quad (53)$$

$$\vec{p} = \int d^3 r' \overbrace{[q\delta(\vec{r}' - \vec{d}/2) - q\delta(\vec{r}' + \vec{d}/2)]}^{\rho(\vec{r}')} \vec{r}' = q \frac{\vec{d}}{2} - \left( -q \frac{\vec{d}}{2} \right) \quad (54)$$

$$\vec{p} = q \vec{d}, \quad / \quad \vec{d} \text{ va de } \ominus \rightarrow \oplus . \quad (55)$$

Usando el álgebra del Apéndice, el campo eléctrico resulta

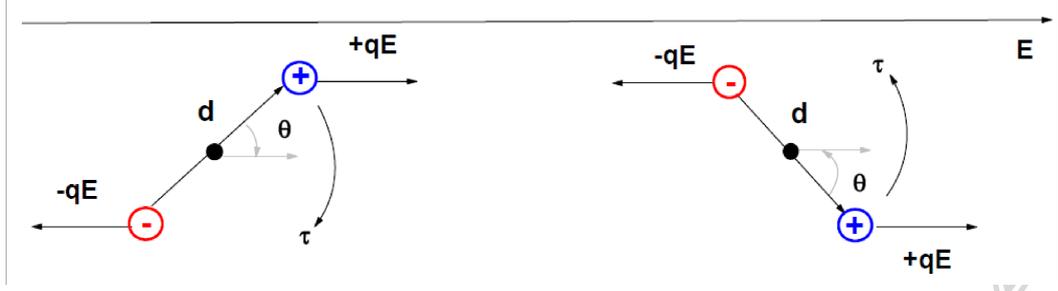


FIG. 9:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left( k_e \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -k_e \left[ (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \right] \quad (56)$$

$$= \frac{k_e}{r^3} [3 (\vec{p} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{p}] . \quad (57)$$

Usaremos mucho esta expresión. Una contracción interesante: Eq.(57) puede ponerse en forma matricial (mas específicamente de una diádica)

$$\vec{E} = -\vec{\phi} \times \vec{p}, \quad \vec{\phi} = \frac{k_e}{r^3} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{r^2} \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix} \right] \quad (58)$$

## B. Dipolo en un campo eléctrico

El dipolo permanente debe considerarse aquí como un rígido.

En un campo eléctrico constante (digamos  $\vec{\nabla} E_{x/y/z} = 0$ ) la resultante de las fuerzas  $\vec{F}$  es nula por lo que su centro de masa permanece en reposo,

$$\sum \vec{F} = (+q)\vec{E} + (-q)\vec{E} = 0, \quad \text{centro de masa en equilibrio}, \quad (59)$$

pero sufre un torque  $\vec{\tau}$ :

$$\vec{\tau} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j = (\vec{d}/2) \times (q\vec{E}) + (-\vec{d}/2) \times (-q\vec{E}) = (q\vec{d}) \times \vec{E} \quad (60)$$

$$= \vec{p} \times \vec{E} . \quad (61)$$

Esto implica que un dipolo oscila en presencia de un campo eléctrico como un péndulo intercambiando energía cinética y potencial.

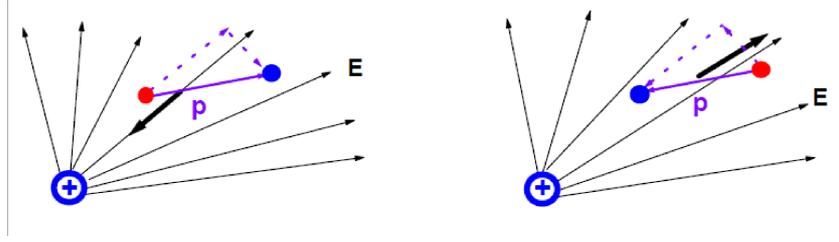


FIG. 10:

Supongamos un dipolo originariamente alineado con el campo eléctrico ( $\vec{\tau} = 0$ ), entonces para moverlo a un ángulo  $\theta$  debemos realizar un trabajo externo  $W^{ext}$  en contra del trabajo del campo  $\vec{E}$  en forma cuasiestacionaria con  $\vec{\tau}^{ext} = -\vec{p} \times \vec{E}$ ,

$$W^{ext} = \int_0^\theta d\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}^{ext} = -\underbrace{\hat{\tau} \cdot \hat{\theta}}_1 \int_0^\theta d\theta pE \sin(\theta) = +pE \cos(\theta) - pE \cos(0) \quad (62)$$

$$= \vec{p}(\theta) \cdot \vec{E} - \vec{p}(0) \cdot \vec{E} = U(0) - U(\theta) = -W^{campo} \quad (63)$$

$$U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \text{Energía potencial.} \quad (64)$$

Si el campo eléctrico es variable en la posición del dipolo (digamos  $\vec{\nabla} E_{x/y/z} \neq 0$ ), entonces sufre una fuerza resultante que resulta ser

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + \underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p}}_0 + \underbrace{\vec{p} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_0 + \underbrace{\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{p})}_0, \quad (65)$$

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \left( p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_x, E_y, E_z) \quad (66)$$

### C. Interacción carga-dipolo

Consideremos una carga puntual  $q$  situada en el origen que genera un campo eléctrico  $\vec{E} = k_e q \vec{r} / r^3$  y coloquemos en dicho campo un dipolo  $\vec{p}$  permanente en la posición  $\vec{r}$ , la fuerza que recibe dicho dipolo será

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \underbrace{\left[ k_e q \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right]}_{\vec{E}} = k_e q \left( \frac{\vec{p}}{r^3} - 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} \right), \quad (67)$$

$$\vec{F} \cdot \hat{r} = -\frac{2k_e q (\vec{p} \cdot \hat{r})}{r^3}. \quad (68)$$

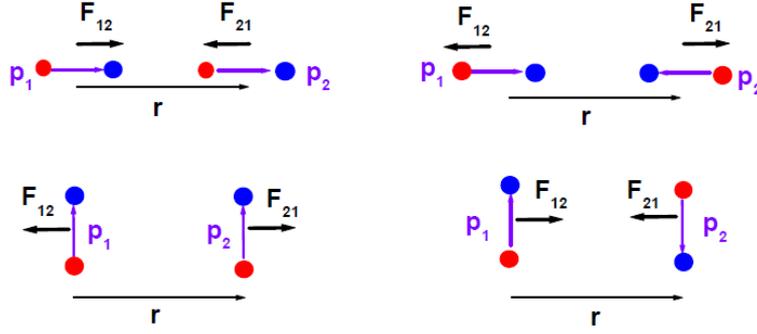


FIG. 11:

Entonces vale:

- Si  $q > 0$  y  $\vec{p} \cdot \hat{r} > 0$ , entonces  $\vec{F} \cdot \hat{r} < 0$ , el dipolo es atraído.
- Si  $q < 0$  y  $\vec{p} \cdot \hat{r} > 0$ , entonces  $\vec{F} \cdot \hat{r} > 0$ , el dipolo es repelido.

Lo cual es lógico.

#### D. Interacción dipolo-dipolo

Consideremos el campo eléctrico  $\vec{E}_1$  creado por un dipolo  $\vec{p}_1$  en el origen, cuya expresión está dado por (56), si colocamos en ese campo  $\vec{E}_1$  un dipolo  $\vec{p}_2$ , la energía de interacción estara dada por (64), o sea

$$U_2 = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = -\vec{p}_2 \cdot \frac{k_e}{r^3} [3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}_1] , \quad (69)$$

$$= \frac{k_e}{r^3} [\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})] , \text{ .alternativamente} \quad (70)$$

$$= -\vec{p}_2 \cdot \underbrace{(-\vec{\phi}(\vec{r}_1) \times \vec{p}_1)}_{\vec{E}_1} = \vec{p}_2 \cdot \vec{\phi}(\vec{r}_1) \times \vec{p}_1 \quad (71)$$

Notar que  $U_1(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = U_1(\vec{p}_2, \vec{p}_1)$ , lo que resulta equivalente, obviamente, a poner  $\vec{p}_1$  en el campo eléctrico  $\vec{E}_2$  creado por  $\vec{p}_2$  : o sea  $U_1 = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2 = U_2 = U$ . Hay que recordar que los dipolos estan fijos y no les permitimos rotar (electrostática). Si estamos interesados en la fuerza que sobre el dipolo  $\vec{p}_2$  ejerce el dipolo  $\vec{p}_1$ , usando (24) se obtiene (ver Apéndice)

$$\vec{F}_{21} = -\vec{\nabla} U_2 = \frac{k_e}{r^4} [3(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)\hat{r} - 15(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})\hat{r} + 3(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})\vec{p}_1 + 3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})\vec{p}_2] . \quad (72)$$

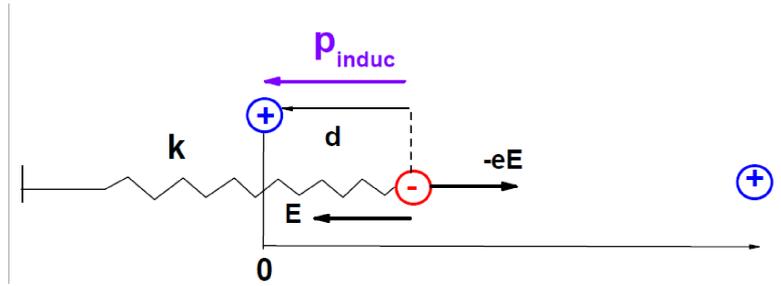


FIG. 12:

Cuatro casos son interesantes:

- $\hat{p}_1 = \hat{r}$ , y  $\hat{p}_2 = \hat{r}$ ,  $\Rightarrow \vec{F}_{21} = -6k_e(p_1p_2)\hat{r}/r^4 \Rightarrow$  se atraen.
- $\hat{p}_1 = \hat{r}$ , y  $\hat{p}_2 = -\hat{r}$ ,  $\Rightarrow \vec{F}_{21} = +6k_e(p_1p_2)\hat{r}/r^4 \Rightarrow$  se repelen.
- $\hat{p}_1 = \hat{p}_2$  y  $\hat{p}_1 \cdot \hat{r} = \hat{p}_2 \cdot \hat{r} = 0$ ,  $\Rightarrow \vec{F}_{21} = +3k_e(p_1p_2)\hat{r}/r^4 \Rightarrow$  se repelen.
- $\hat{p}_1 = -\hat{p}_2$  y  $\hat{p}_1 \cdot \hat{r} = \hat{p}_2 \cdot \hat{r} = 0$ ,  $\Rightarrow \vec{F}_{21} = -3k_e(p_1p_2)\hat{r}/r^4 \Rightarrow$  se atraen.

Lo cual es lógico. Estas configuraciones serán de utilidad cuando consideremos los dieléctricos.

### E. Dipolo inducido

Hasta ahora hemos visto la interacción con dipolos permanentes, tales como moléculas de NaCl ó H<sub>2</sub>O. Pero también una molécula o átomo neutro (sin momento dipolar permanente) en presencia de un campo eléctrico puede distorsionarse al punto de que se induce un dipolo. A estos dipolos se los llaman dipolos inducidos. El cálculo del dipolo a nivel atómico se obtiene con la mecánica cuántica. De cualquier manera podemos hacer un modelo unidimensional simple para entenderlo. Supongamos un electrón de carga (negativa)  $-e$  ligado a su núcleo (positivo) con un "resorte" de constante  $k$  en su estado de equilibrio (u oscilando alrededor de su posición de equilibrio).

En presencia de  $\vec{E}$  externo el electrón sufre una fuerza  $-e\vec{E}$  adicional, por lo tanto ocurre un desplazamiento alrededor de su posición de equilibrio, tal que  $-eE = F = kd$ , (igual al caso de un resorte en un campo gravitatorio). En este caso se genera dipolo  $\mu = -ed$ ,

$$\vec{\mu} = -e\vec{d} = \frac{e^2}{k}\vec{E} = \alpha\vec{E}, \quad \alpha = \text{polarizabilidad.} \quad (73)$$

La magnitud  $\alpha$  es muy importante en Química. Volveremos cuando veamos Clausius

Mossotti. Se dice que es inducido ya que si  $\vec{E} = 0$ , entonces  $\vec{\mu} = 0$ . Su energía resulta ser en general es

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{E} = -\alpha \vec{E} \cdot \vec{E} = -\alpha E^2. \quad (74)$$

• Si además ese campo externo  $\vec{E}$  (congelado, no le permito moverse!) es creado por una carga puntual  $q$  a una distancia  $r$ , entonces

$$U = -\alpha \underbrace{\left[ k_e \frac{q}{r^2} \right]^2}_{E^2} = -\alpha \frac{q^2 k_e^2}{r^4} \quad (75)$$

• Si ese campo  $E$  es creado por dipolo permanente (fijo)  $\vec{p}$  en  $\vec{r}$  entonces resulta

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{E} = -\alpha \underbrace{\left( \frac{k_e}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{p}] \right)^2}_{E^2} \propto -\frac{1}{r^6} \quad (76)$$

• [[Un comentario. Repitamos el cálculo con otras condiciones. Supongamos una partícula de carga  $q$  en  $\vec{r}$  genere un campo eléctrico  $\vec{E}$  en el origen, cuyo valor es:  $\vec{E}_q = -k_e q \vec{r} / r^3$ . Allí colocamos un átomo que en presencia de ese campo se polariza generando un dipolo  $\vec{\mu} = \alpha \vec{E}_q$ . Ese dipolo a su vez genera un campo  $E_p$  en la posición de la partícula  $q$  en  $\vec{r}$ , que sufre una fuerza  $\vec{F} = q \vec{E}_p$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q \vec{E}_p = -q \frac{k_e}{r^3} [3(\vec{\mu} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{\mu}], \quad \text{con } \vec{\mu} = \alpha \overbrace{\left( -k_e q \vec{r} / r^3 \right)}^{\vec{E}_q} \\ &= -2q^2 k_e^2 \alpha \frac{\vec{r}}{r^6} = -\vec{\nabla} U, \quad U = -\frac{\alpha q^2 k_e^2}{2 r^4} \end{aligned} \quad (77)$$

y hay una diferencia de 1/2 respecto a la Eq.(75)!. Porque?. Porque la partícula  $q$  aquí no es externa al sistema. Cuando calculamos la energía del dipolo en un campo externo externo, lo consideramos fijo. Aca no. Si movemos la carga  $q$  influimos en el dipolo que a su vez modifica el campo en la posición donde está la carga originaria (autoconsistencia, ó autoenergía). Este factor 1/2 vino para quedarse. Algo más en relación a la Eq:(77): recordar que en el sistema gaussiano:  $k_e = 1$  ]].

• Otro caso muy importante es la interacción de dos átomos neutros que se inducen uno al otro dipolos. La energía de interacción se comporta como  $\lim_{r \rightarrow \infty} U = -C_6/r^6$  (límite de Van der Wall). Una generalización de este potencial es el de Lennard Jones  $U_{LJ}$ , que explica la formación de moléculas tales como  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ , etc, cluster de gases raros, cristales

de gases raros a bajas temperaturas (BE), etc. La forma más común es escribirla así

$$U_{LJ} = U_{12,6} = \frac{6}{12-6} U_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \frac{12}{6} \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right] \quad \text{Lennard Jones,} \quad (78)$$

(el término  $(r_0/r)^{12}$  es un artefacto matemático irreal). Es fácil probar que la posición de equilibrio de la molécula ( $dU_{LJ}/dr = 0$ ) es para:  $r = r_0$  y allí vale  $U_{LJ} = -U_0$ .

## F. Potenciales a largas distancias. Resumen

Las energías de interacción entre cargas puntuales ( $\bullet$ ), dipolos permanentes ( $\uparrow$ ), cuadrupolos ( $\square$ ), y dipolos inducidos ( $\rightsquigarrow$ ), se pueden resumir así:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{E} = cte & \text{sobre } q, \quad \vec{F} = q\vec{E} \\ \vec{E} = cte & \text{" } \vec{p}, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \\ \vec{E} & \text{" } \vec{p}, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \\ \vec{E} & \text{" } \vec{p}, \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}U = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \end{array} \right. \quad (79)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bullet q \text{ interactuando con } \bullet q', & U \propto \frac{1}{r} \\ \bullet q & \text{" } \uparrow \vec{p}', \quad U \propto \frac{1}{r^2} \\ \bullet q & \text{" } \square Q, \quad U \propto \frac{1}{r^3} \\ \bullet q & \text{" } \rightsquigarrow \vec{\mu}, \quad U \propto \frac{1}{r^4} \end{array} \right. \quad (80)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \uparrow \vec{p} \text{ interactuando con } \bullet q', & U \propto \frac{1}{r^2} \\ \uparrow \vec{p} & \text{" } \uparrow \vec{p}', \quad U \propto \frac{1}{r^3} \\ \uparrow \vec{p} & \text{" } \square Q, \quad U \propto \frac{1}{r^4} \\ \uparrow \vec{p} & \text{" } \rightsquigarrow \vec{\mu}, \quad U \propto \frac{1}{r^6} \end{array} \right. \quad (81)$$

$$\left\{ \square Q \text{ interactuando con } \square Q', \quad U \propto \frac{1}{r^5} \right. \quad (82)$$

$$\left\{ \rightsquigarrow \vec{\mu} \text{ interactuando con } \rightsquigarrow \vec{\mu}, \quad U \propto \frac{1}{r^6} \right. \quad (83)$$

Con estas dependencias se puede interpretar gran parte de la Química (ligaduras, mecanismos de reacción), la Fisicoquímica (entalpías, etc), la Termodinámica (coeficientes de Virial), etc. Casi todo lo que tocamos con nuestras manos, esta regida por estas formulas: que son interacciones a distancias.

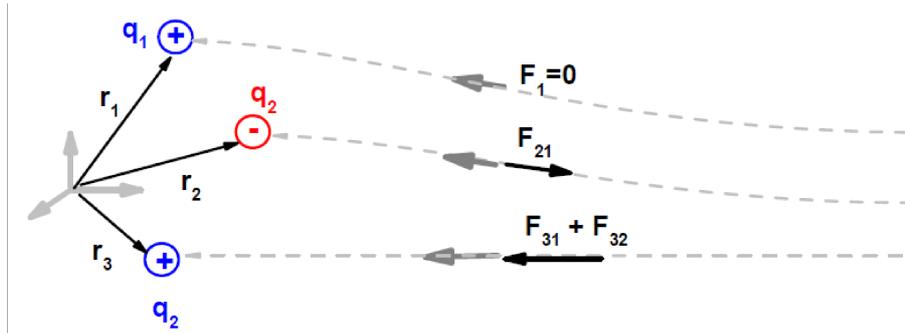


FIG. 13:

### III. ENERGIA ELECTROSTATICA

Para construir una configuración de cargas eléctricas, se requiere energía (trabajo). En esta sección calcularemos la energía necesaria para construir un ensamble de cargas puntuales y distribuciones continuas.

#### A. De un sistema de cargas puntuales

Primeramente calcularemos la energía necesaria para construir un ensamble de cargas puntuales  $q_i$  en  $\vec{r}_i$ . Las vamos trayendo de a una desde el infinito, considerando que  $V(\infty)=0$ . La primera partícula, la "1", no requiere energía:  $U_1 = 0$ . La segunda, la "2", la traemos en presencia de la "1" y hacemos un trabajo  $U_2 = q_2 V_{21}$ , donde  $V_{21}$  es el potencial creado por la partícula "1" en la posición "2". En general definimos

$$V_{ji} = \frac{k_e q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}. \quad (84)$$

Luego traemos la "3", en presencia de la "1" y "2";  $U_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$ . Y así sucesivamente, produciendo

$$U = \sum_{j=1} U_j = \sum_{j=1} q_j \sum_{i < j} V_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{i \neq j} q_j V_{ji}. \quad (85)$$

Usando el hecho que  $q_j V_{ji} = q_i V_{ij}$  obtenemos

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{i \neq j} q_j \underbrace{\frac{k_e}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}_{V_{ji}} q_i = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{i \neq j} q_j V_{ji} q_i. \quad (86)$$

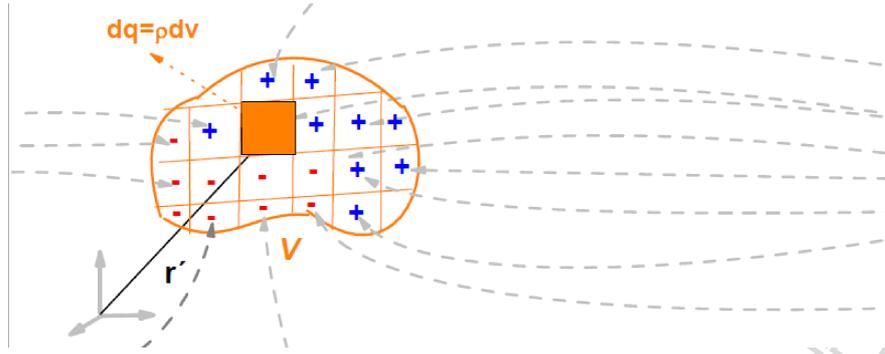


FIG. 14:

que se puede poner en forma vctomatricial, definiendo un vector  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots)$ , y una matriz  $\bar{p}$ , entonces

$$U = \frac{1}{2} \vec{q} \times \bar{p} \times \vec{q}, \quad \text{con } p_{ji} = \frac{k_e}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \text{ y } p_{ii} = 0. \quad (87)$$

de la misma manera podemos escribir  $V = \bar{p} \times \vec{q}$ .

### B. De una distribución continua

Para una distribución continua, la rutina es siempre la misma: dividir el volumen dado en pequeños volúmenes de carga  $dq = d^3r \rho(\vec{r})$  y luego integrar, obteniéndose a partir de (85)

$$U = \frac{1}{2} \int \underbrace{d^3r \rho(r)}_{dq} V(\vec{r}). \quad (88)$$

donde  $\int d^3r$  se entiende que es en todo el espacio hasta el infinito. Otra expresión muy importante puede obtenerse a partir de la ecuación (23) resultando

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(r) \underbrace{k_e \int d^3r' \rho(r') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{V(\vec{r})} \quad (89)$$

$$= \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' \rho(\vec{r}) \frac{k_e}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}'). \quad (90)$$

Esta última expresión es muy utilizada en Química Cuántica (nótese que la energía electrostática depende sólo de  $\rho$ , o sea que es un funcional de la densidad (que es el punto de

partida de la *density functional theory*). Para otras distribuciones podemos usar la equivalencia (12).

Una tercera expresión de la energía, muy útil, se obtiene a partir de (88) expresándola en términos del campo eléctrico. Usando la ecuación de la divergencia (40)

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') = \frac{1}{2} \int d^3r' \underbrace{(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\rho(\vec{r}')} V(\vec{r}') \quad (91)$$

Hagamos ahora un truco para cambiar la posición de  $\vec{\nabla}$ , que lo repetiremos mucho a lo largo del curso. Según el Apéndice, podemos escribir

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} V) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V + \underbrace{\vec{E} (\vec{\nabla} V)}_{-\vec{E}} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V - |E|^2 \quad (92)$$

reemplazando en (91), resulta

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r' \left[ |E|^2 + \overbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} V)}^{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V} \right], \quad (93)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r' |E|^2 + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r' \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} V)}_{\iint_{\infty S} d\vec{s}' \vec{E} V}, \quad (94)$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia. Como integramos en todo el espacio, la superficie cerrada  $\iint_{\infty S}$  es una integral superficial en el infinito,. Allí en el peor de los casos ( $\vec{E}$  generado por cargas culombiana) tenemos

$$\iint_{\infty S} d\vec{s}' \vec{E} V \sim \mathcal{S} E V \xrightarrow{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{1}{r^2} \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \quad (95)$$

con lo cual no contribuye, queda entonces

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r' |\vec{E}|^2, \quad (96)$$

y recordemos que  $\int d^3r'$  involucra todo el espacio (y lo denoto  $\int_{\infty}$ ). Resumamos entonces las tres expresiones de la energía

$$U = \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' \rho(\vec{r}) \frac{k_e}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}') \quad (97)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} d^3r' |\vec{E}|^2 \quad (98)$$

### C. Autoenergía

Notemos que si partimos de (88) y queremos calcular la energía para construir una sola partícula puntual de carga  $q$ , entonces  $\rho(\vec{r}') = q\delta(\vec{r}')$ , y resulta

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') = \frac{1}{2} \int d^3r' [q\delta(\vec{r}')] V(\vec{r}') = \frac{q}{2} V(0) = \infty !!! \quad (99)$$

La forma de lidiar con el problema es salirse de la función  $\delta(\vec{r}')$  y darle una cierta dimensión, digamos una esfera uniformemente cargada de radio  $R$ . Entonces tenemos

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}R^3} \Theta(R - r), \quad \text{donde} \quad \int d^3r \rho(\vec{r}) = q \quad (100)$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{r} & r > R \\ \frac{3R^2 - r^2}{2R^3} & r < R \end{cases}, \quad \text{y} \quad (101)$$

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (102)$$

De aquí podemos comprobar que cuando  $R \rightarrow 0$ ,  $U \rightarrow \infty$ .

Igualando la energía  $U$  a la famosa expresión encontrada en la teoría de la relatividad  $U = E = mc^2$  y no considerando el término  $3/5$  (que representa el factor de forma), resulta que

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = mc^2 = \text{energía de la partícula en reposo}. \quad (103)$$

Con lo que resulta el así llamado radio clásico de una partícula

$$R = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}. \quad (104)$$

Para el caso del electrón  $R_e = 2.8179 \times 10^{-15} \text{m} = 5.32 \times 10^{-5} \text{atomic units}$ .  $R_e$  se conoce como radio de Thompson y aparece en muchos procesos materia-radiación (scattering de Thompson, Compton y Klein Nishina, Raman scattering, scattering de Rayleigh, etc.).

## IV. CONDUCTORES IDEALES Y CAPACITORES

El conductor ideal, es el primer material eléctrico que veremos. Es una idealización de los metales. Los metales se caracterizan por tener electrones libres (digamos  $\sim 10^{28} \text{elec/m}^3$ ) que son aportados por las capas exteriores de los átomos. La física fundamental es que estos electrones reaccionan en presencia del campo eléctrico para neutralizarlo en su interior. En

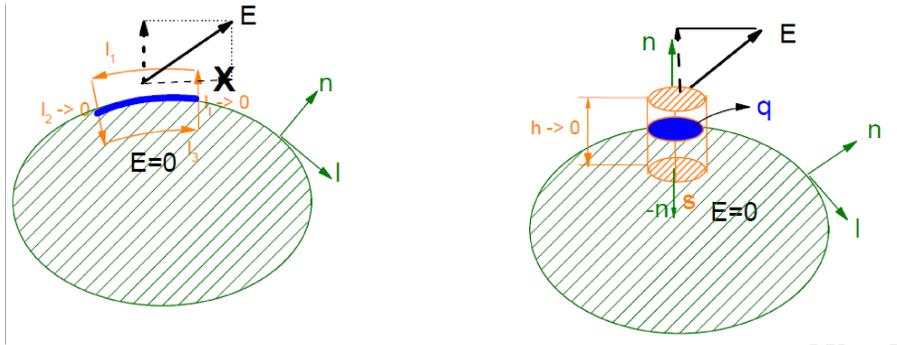


FIG. 15:

principio no pueden escaparse del metal debido a la función trabajo. La velocidad de los electrones en un metal es alta  $\approx 1 \text{ atomic unit} = c/137 = 2.2 \times 10^6 \text{ m/s}$  y el tiempo de neutralización del campo eléctrico puede variar entre , digamos,  $10^{-15}$  (femtoseconds) a  $10^{-9}$ (nanoseconds). Nos ocupamos del caso estático final. La propiedad fundamental es que dentro del conductor vale

$E = 0 \quad \text{para físicos, ó}$ $V = cte \quad \text{para ingenieros.}$
--

(105)

Si caracterizamos a la superficie del conductor ideal con el versor normal saliente  $\hat{n}$ , entonces

- Usando  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , y haciendo uso del echo que  $E = 0$  dentro del conductor, se encuentra facilmente que  $\vec{E}_{\parallel} = 0$ . donde  $\vec{E}_{\parallel}$  es el campo eléctrico inmediatamente fuera del conductor. Se generaliza con la siguiente expresión:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E} \times \hat{n} = 0. \tag{106}$$

- Usando la ley de Gauss  $\epsilon_0 \iint_{\partial S} d^2a \vec{E} \cdot \hat{n} = q_{enc}$ , y haciendo nuevamente uso del echo que  $E = 0$  dentro del conductor, se demuestra que en la superficie

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{107}$$

- Si usamos la definición de  $V = cte$  (incluyendo la superficie), resulta obvio que el campo eléctrico es perpendicular a las superficie, por ser ésta simplemente una superficie equipotencial.

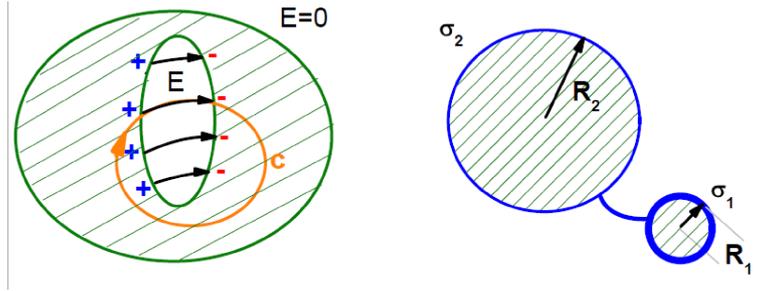


FIG. 16:

- Se demuestra que, en una cavidad dentro de un conductor, el campo eléctrico es nulo (**jaula de Faraday**). Si se sospechase que existe un campo eléctrico dentro de la cavidad, al hacer una circulación usando  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , con  $\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{l}$ , se demuestra que es imposible (Feynman).

- Si tenemos dos esferas conductoras de radio  $R_1$  y  $R_2$  conectadas por un alambre conductor y una cierta carga libre en su interior, esta carga se distribuirá en la superficie de las esferas con  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Entonces el potencial en cada esfera es

$$V_1 = k_e \frac{Q_1}{R_1} = k_e \frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{R_1}; \quad \text{y} \quad V_2 = k_e \frac{Q_2}{R_2} = k_e \frac{4\pi R_2^2 \sigma_2}{R_2}, \quad (108)$$

y considerando que el alambre los une para formar un sólo conductor, resulta que  $V_1 = V_2$ , entonces

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{E_\perp(R_1)}{E_\perp(R_2)}. \quad (109)$$

Si  $R_1 \rightarrow 0$ , entonces  $\sigma_1 \rightarrow \infty$ , y  $E_\perp(R_1) \rightarrow \infty$  (**efecto puntas. Pararayos:** el aire se vuelve conductor para  $E \sim 10^6 \text{m/C}$  y se arrancan electrones para  $E \sim 10^9 \text{m/C}$ )

### A. Método de las imágenes

Supongamos una carga  $+q$  en la posición  $\vec{d} = (d, 0, 0)$  frente a un semiespacio ( $x < 0$ ) conductor. El potencial dentro del conductor es  $V = cte = 0$ , y el espacio exterior está dado por

$$V(r) = + \frac{k_e q}{|\vec{r} - \vec{d}|} + k_e \iint \frac{d^2 a' \sigma_i(a')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (110)$$

donde  $d^2 a' = dydz$ ,  $\vec{r}' = (0, y, z)$  y  $\sigma_i$  es la carga inducida en la superficie del conductor que NO la conocemos. Sabemos además que el campo eléctrico sale en forma perpendicular

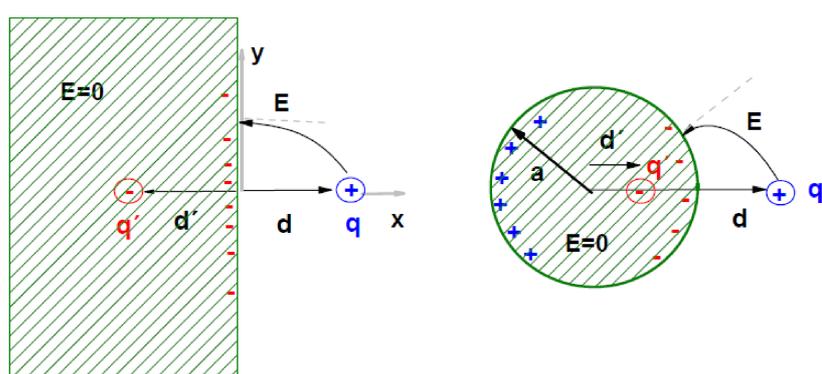


FIG. 17:

a la superficie del conductor que está a un potencial constante. El método de las imágenes aquí consiste en inventar una carga  $q'$  en la posición  $\vec{d}' = (-d, 0, 0)$ , para simular el efecto del segundo término de la RHS, o sea el potencial es ahora

$$V(r) = +\frac{k_e q}{|\vec{r} - \vec{d}|} + \frac{k_e q'}{|\vec{r} + \vec{d}'|} . \quad (111)$$

La condición de que  $V = 0$  en la superficie se satisface haciendo

$$q' = -q, \text{ y } \vec{d}' = -\vec{d} \quad (112)$$

con lo cual garantizamos el conocimiento del potencial en la superficie cerrada (la cerramos en el infinito); por lo tanto la solución es única y estable (Dirichlet). Esta solución se usa sólo fuera del conductor, en el interior obviamente vale  $V = 0$ . El campo eléctrico en la superficie es,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = k_e q \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} - k_e q \frac{\vec{r} + \vec{d}}{|\vec{r} + \vec{d}|^3}, \quad \forall \vec{r}$$

$$\vec{E}(x = 0) = -k_e q \frac{2\vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} \quad (113)$$

$$E_x(x = 0) = -\overbrace{1}^{k_e} \frac{2qd}{4\pi\epsilon_0 (d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (114)$$

Sabiendo que  $\vec{E} \cdot \hat{n} = E_{\perp} = E_x = \sigma_i / \epsilon_0$ , entonces

$$\sigma_i = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (115)$$

Expresión muy importante para representar iones frente a superficies metálicas (adsorción, catálisis, plasmones superficiales, etc.)

Otros dos casos son de interés:

- Una carga puntual colocada frente a dos hemiespacios conductores.
- Una carga puntual  $q$  frente a una esfera conductora de radio  $a$ . que se resuelve haciendo

$$V(r = a) = + \frac{k_e q}{|\vec{r} - \vec{d}|} + \frac{k_e q'}{|\vec{r} + \vec{d}'|} = 0, \quad (116)$$

$$d = \frac{a^2}{d'}, \quad \text{y} \quad q' = -q \frac{a}{d'}, \quad \text{luego} \quad (117)$$

$$\sigma_i = -\varepsilon_0 E(r = a) = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial}{\partial r} V(r) \right|_{r=a} \quad (118)$$

(En este caso si necesitamos  $V = V_0 \neq 0$ , en la superficie se coloca una carga  $q''$  en el origen.)

## B. Sistema de conductores

Antes de comenzar recordemos que cuando teníamos un sistema de cargas PUNTUALES llegamos a las siguientes expresiones

$$V = \vec{p} \times \vec{q}; \quad U = \frac{1}{2} \vec{q} \times \vec{p} \times \vec{q}, \quad \text{con} \quad p_{ji} = \frac{k_e}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad \text{y} \quad p_{ii} = 0 \quad \text{y}$$

Ahora consideremos un sistema de  $N$  CUERPOS conductores de forma cualquiera y carga arbitraria  $q_j$ . Sabemos que:

- Las cargas netas de cada conductor se van a conservar (los electrones no se pueden escapar, debido a la función trabajo).
- Las cargas se van a distribuir (inducidas unas a las otras), pero permanecerán en la superficie de cada conductor. Nos conviene definir una densidad superficial de carga de cada conductor normalizada tal que

$$\sigma'_j(s_j) = \frac{\sigma_j(s_j)}{q_j}, \quad \text{tal que} \quad \int_{s_j} d^2 s_j \sigma'_j(s_j) = 1. \quad (119)$$

- Dentro (y en la superficie) de cada conductor el potencial es constante (o campo nulo en su interior) y lo notaremos con  $V_j$  con respecto a un valor de referencia (generalmente  $V = 0$  en el infinito). Entonces si  $V(r)$  es el potencial en todo lugar del espacio podremos afirmar

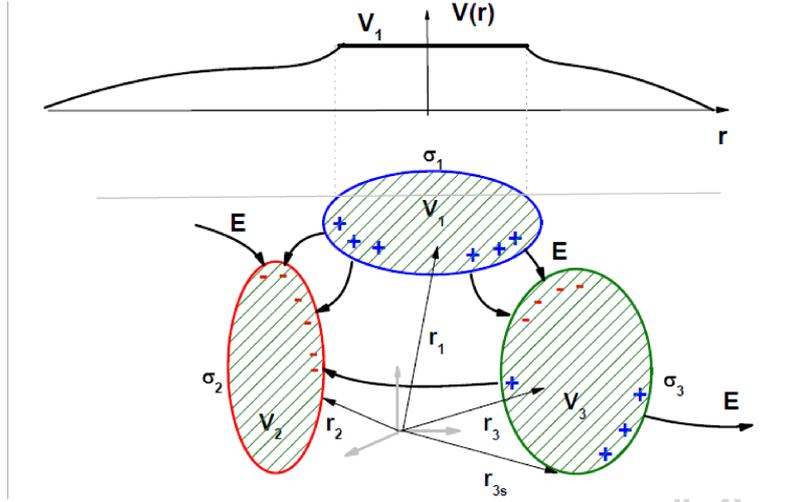


FIG. 18:

que

$$V(\vec{r}) = V_j \quad \forall \vec{r}_j \in \mathcal{R}_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (120)$$

donde  $\mathcal{R}_j$  es el espacio que ocupa el conductor  $j$ . La expresión (120) vale también para los valores de  $\vec{r}_j$  que están en la superficie  $\mathcal{S}_j$  y que lo denotaremos con el vector posición  $\vec{r}_{sj}$ . De acuerdo a la definición (23) podemos escribir que el potencial en cualquier punto del espacio resulta ser:

$$V(r) = \sum_{j=1}^N k_e \int_{\mathcal{S}_j} d^2 s_j \frac{\sigma_j(\vec{s}_j)}{|\vec{r} - \vec{s}_j|} = \sum_{j=1}^N q_j \overbrace{k_e \int_{\mathcal{S}_j} d^2 s_j \frac{\sigma'_j(\vec{s}_j)}{|\vec{r} - \vec{s}_j|}}^{P_j(r)}, \quad (121)$$

$$P_j(r) = k_e \int_{\mathcal{S}_j} d^2 s_j \frac{\sigma'_j(\vec{s}_j)}{|\vec{r} - \vec{s}_j|}. \quad (122)$$

Si las superficies de los conductores son complicadas, los valores de  $P_j$  son muy difíciles de calcular debido al desconocimiento de  $\sigma'_j(\vec{s}_j)$ . La ecuación (121) se puede dividir en  $N$  ecuaciones imponiéndoles las  $N$  condiciones (120), resultando entonces

$$V_i = V(r_i) = \sum_{j=1}^N P_{ij} q_j, \quad P_{ij} = \text{coeficientes de potencial}, \quad (123)$$

$$P_{ij} = P_j(r_i), \quad \forall \vec{r}_i \in \mathcal{R}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (124)$$

Obviamente los elementos  $P_{ij}$  son una generalización de los elementos puntuales  $p_{ij}$  definidos en (87). Se puede demostrar además que  $P_{ij} = P_{ji}$  (tal como en Eq.(87)). Se puede ver que

si suponemos puntos en lugar de cuerpos entonces podemos escribir  $\sigma'_j(\vec{s}_j) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$ , llegamos a la conocida ecuación Eq.(1), ya vista.

La energía de formación de este sistema de cuerpos conductores es de acuerdo a (88)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int d^2a' \sigma_j(s_j) V(\vec{r}') = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j V_j \underbrace{\int d^2a' \sigma'_j(s_j)}_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j V_j, \quad (125)$$

donde hemos usado el hecho de que el potencial es constante en la superficie del conductor. Pasemos a la representación vektomatricial. Entendiendo los términos  $P_{ij}$  como los elementos de la matriz  $\overline{\overline{P}}$ , las ecuaciones (121) y (125) se reducen a

$$\overline{V} = \overline{\overline{P}} \times \overline{q} = \overline{q} \times \overline{\overline{P}}, \quad \text{y} \quad (126)$$

$$U = \frac{1}{2} \overline{q} \cdot \overline{V} \implies U = \frac{1}{2} \overline{q} \times \overline{\overline{P}} \times \overline{q}, \quad (127)$$

donde hemos usado el hecho que  $P_{ij} = P_{ji}$ . Definiendo  $\overline{\overline{C}}$  como la matrix inversa de  $\overline{\overline{P}}$ ,

$$\overline{\overline{C}} \times \overline{\overline{P}} = \overline{\overline{P}} \times \overline{\overline{C}} = \overline{\overline{1}} \quad C_{ij} = \text{coeficientes de capacitancia} \quad (128)$$

con  $C_{ij} = C_{ji}$ , resulta que

$$\overline{q} = \overline{\overline{C}} \times \overline{V} = \overline{V} \times \overline{\overline{C}}, \quad \text{entonces} \quad (129)$$

$$U = \frac{1}{2} \overline{q} \times \overline{\overline{P}} \times \overline{q} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{C}} \times \overline{V})^t \overline{\overline{P}} \times \overline{\overline{C}} \times \overline{V} = \frac{1}{2} \overline{V} \times \overbrace{\overline{\overline{C}}^t}^{\overline{\overline{C}}} \times \underbrace{\overline{\overline{P}} \times \overline{\overline{C}}}_1 \times \overline{V} \quad (130)$$

$$= \frac{1}{2} \overline{V} \times \overline{\overline{C}} \times \overline{V}. \quad (131)$$

El caso general es complejo, porque  $V_i = V_{ii} + V_{ij}$ , donde  $V_{ii}$  es la contribucion al potenciañ debido a la carga dentro del mismo conductor y  $V_{ij}$  es el debido a las cargas de los otros conductores.

### C. Capacitores

Sean dos conductores (armaduras) de cualquier forma con cargas  $q_1 = +q$  y  $q_2 = -q$ , las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\begin{cases} V_1 = P_{11}q - P_{12}q \\ V_2 = P_{21}q - P_{22}q \end{cases} \quad \text{restando}$$

$$V = V_1 - V_2 = (P_{11} + P_{22} - P_{12} - P_{21})q, \quad \text{definimos, el escalar} \quad (132)$$

$$\boxed{C = q/V, \quad \text{capacitancia}}, \quad (133)$$

$$[C] = \frac{[q]}{[V]} = \frac{\text{Coul}}{\text{Vol}} = \text{Faradio} \quad (134)$$

Si consideramos a  $\overline{\overline{C}}$  como una matriz,  $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{P}}^{-1}$  entonces

$$C = \frac{q}{V} = \frac{1}{(P_{11} + P_{22} - 2P_{12})} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{(C_{11} + C_{22} + 2C_{12})} = \text{Cte.}$$

En la gran mayoría de los casos reales los valores de  $C$  no se calculan sino que se miden.

El capacitor es el primer elemento circuital (veremos además la resistencia (R) y la inductancia (L)). A todos los elementos circuitales se los puede poner en serie o en paralelo.

Si conectamos 2 capacitores  $C_1$  y  $C_2$  en paralelo las armaduras estarán al mismo potencial y cada uno de ellos acumulará cargas Culombianas  $q_1$  y  $q_2$ , con lo que

$$\begin{cases} C_1 = \frac{q_1}{V} \\ C_2 = \frac{q_2}{V} \end{cases}, \quad \text{sumando}$$

$$C_1 + C_2 = \frac{(q_1 + q_2)}{V} = C \quad (135)$$

O sea el armado se comporta como un solo capacitor de valor  $C = C_1 + C_2$  y que acumula carga  $q_1 + q_2$ . Si estuviesen dentro de una caja negra no sabríamos diferenciarlos.

Si los conectamos en serie los capacitores acumularán la misma carga  $q$  y en cada uno de ellos habrá una caída de tensión  $V_1$  y  $V_2$

$$\begin{cases} V_1 = \frac{q}{C_1} \\ V_2 = \frac{q}{C_2} \end{cases}, \quad \text{sumando}$$

$$V_1 + V_2 = V = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C}, \quad (136)$$

produciendo la ley de las inversas. La generalización a varios capacitores es inmediata

$$\begin{cases} \frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} & \text{en serie} \\ C = \sum_i C_i & \text{en paralelo} \end{cases} \quad (137)$$

#### D. Capacitores de placas paralelas

Sean dos placas paralelas infinitas (por ahora) cargadas con densidad superficial de carga  $+\sigma$  y  $-\sigma$ , ubicadas en las posiciones  $x = -l/2$  y  $x = l/2$ , la ecuación de Poisson en una dimensión resulta en términos de la  $\delta$  de Dirac

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[ \sigma \delta \left( x + \frac{l}{2} \right) + (-\sigma) \delta \left( x - \frac{l}{2} \right) \right]. \quad (138)$$

La solución es (la verificaremos luego)

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\sigma l}{\varepsilon_0}, & x \leq -\frac{l}{2} \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} x, & -l/2 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ -\frac{\sigma l}{\varepsilon_0}, & x \geq \frac{l}{2} \end{cases}, \quad (139)$$

y el campo eléctrico resulta ser

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{l}{2} \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, & -l/2 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0, & x \geq \frac{l}{2} \end{cases}, \quad \text{ó mejor} \quad (140)$$

$$E_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Theta \left( x + \frac{l}{2} \right) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Theta \left( x - \frac{l}{2} \right). \quad (141)$$

Lo cual es correcto, ya que si tomamos la divergencia:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= \nabla \cdot \nabla V = -\nabla E = -\frac{\partial}{\partial x} \overbrace{\left[ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Theta \left( x + \frac{l}{2} \right) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Theta \left( x - \frac{l}{2} \right) \right]}^E \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[ \sigma \delta \left( x + \frac{l}{2} \right) + (-\sigma) \delta \left( x - \frac{l}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$y$  reproduce así la fórmula de partida (138) (recordar que la derivada de la  $\Theta$  de Heviside es la  $\delta$  de Dirac) De (139) resulta que la diferencia de potencial entre las armaduras  $V$  está dado por

$$V = V(-l/2) - V(l/2) = \frac{\sigma l}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma l}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\frac{q}{S}}_{\sigma} \frac{l}{2} \quad (142)$$

$$C = \frac{q}{V} = \varepsilon_0 \frac{S}{l} = (\text{medio} \times \text{geometria}) \quad (143)$$

donde hemos considerado que el capacitor tiene una dimensión finita (aproximación!) de superficie  $S$ .

Son igualmente calculables las simetrías de siempre:

- dos cilindros concéntricos infinitos con radios  $R_1$  y  $R_2$
- dos caparzones esféricos concéntricos con radios  $R_1$  y  $R_2$

### E. Energía acumulada dentro de un capacitor de placas paralelas

Según la ecuación (96) y considerando que  $\vec{E} \neq 0$  sólo dentro del cubo de volumen  $Sl$ , resulta

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r' |\vec{E}|^2 \simeq \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 Sl, \quad (144)$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left| \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right|^2 Sl = \frac{\epsilon_0}{2} \left| \frac{q/S}{\epsilon_0} \right|^2 Sl = \frac{q^2 l}{2\epsilon_0 S}, \quad (145)$$

ó usando  $C = \epsilon_0 S/l$ , resulta

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{qV}{2} = \frac{CV^2}{2} \quad (146)$$

que son las versiones escalares de las matriciales (127) y (130). Podemos definir la densidad de energía por unidad de volumen

$$w_E = \frac{U}{Sl} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \quad \text{densidad de energía eléctrica por unidad de volumen,} \quad (147)$$

que será importante cuando se calcule la energía del campo electromagnético y en definitiva la energía de la luz (fotón).

## V. DIELECTRICOS

Ya hemos introducido los conductores y los hemos caracterizado como un material que tiene electrones libres. Hay otro tipo de materiales llamados **dieléctricos** que no poseen electrones libres, sino dipolos (permanentes o inducibles). Ante la presencia de un campo eléctrico el medio se polariza. Aun cuando el material es, en principio, eléctricamente neutro los dipolos inducen un campo eléctrico que influye localmente. Podemos decir que los electrones libres hacen a los conductores, tanto como los dipolos a los dieléctricos.

## A. Modelo Simple

Supongamos dos capacitores idénticos geoméricamente (caracterizados por  $S$  y  $l$ ) uno en el vacío y el otro con un cierto material (**dieléctrico**) dentro. Hagamos dos experiencias.

Primera experiencia de Faraday: Si el capacitor en el vacío acumula una carga  $Q_0$  cuando a sus armaduras se las somete a una diferencia de potencial  $V_0$ , de modo tal que  $C_0 = Q_0/V_0$ , se encuentra que el capacitor con el dieléctrico acumula una carga  $Q = K_e Q_0$  cuando a las armaduras se las somete a la **misma diferencia de potencial**  $V_0$ , con lo que

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{K_e Q_0}{V_0} = K_e C_0, \quad (148)$$

donde  $K_e$  es una característica del medio. Hicimos esta experiencia considerando el mismo potencial  $V_0$  en ambos capacitores. Hagamos otra experiencia para estar seguros.

Segunda experiencia de Faraday: Conectemos ambos capacitores a una batería de modo tal que en las armaduras se deposite la **misma carga**  $Q_0$ . Se encuentra que el capacitor con el dieléctrico presenta una diferencia de potencial entre sus armaduras  $V = V_0/K_e$  donde  $V_0$  es la diferencia de potencial medida en el capacitor en el vacío. Resulta entonces la misma relación, ya que

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{(V_0/K_e)} = \frac{K_e Q_0}{V_0} = K_e C_0, \quad (149)$$

El modelo más simple es pensar que hay una cierta carga inducida  $Q_{ind}$  en la superficie del dieléctrico en contacto con la armadura de signo opuesto, provocada por la alineación de los dipolos, tal que la carga total  $Q$  es

$$Q_{ind} = Q_0 \left(1 - \frac{1}{K_e}\right). \quad (150)$$

Y con este concepto sencillo vamos a explicar los comportamientos básicos. Esta expresión no es caprichosa, la justificaremos más adelante.

De la segunda experiencia, en el capacitor cel el vacío, podemos usar sin inconvenientes ley de Gauss sobre la placa

$$\varepsilon_0 \iint_{\odot S} \vec{E}_0 \cdot d\vec{a} = Q_0. \quad (151)$$

En el caso del capacitor con el medio dieléctrico tenemos un problema, ya que la carga

encerrada es  $Q = Q_0 - Q_{ind}$ , entonces

$$\varepsilon_0 \iint_{\text{O}S} d^2a \vec{E} \cdot \hat{n} = Q_0 - Q_{ind} = Q_0 - Q_0 \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) = \frac{Q_0}{K_e}. \quad (152)$$

$$\varepsilon_0 K_e \iint_{\text{O}S} d^2a \vec{E} \cdot \hat{n} = Q_0 \quad (153)$$

Comparando (151) con (153), y llamando

$$\varepsilon = K_e \varepsilon_0 \quad \text{permitividad eléctrica del medio,} \quad (154)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 K_e \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{vector desplazamiento.} \quad (155)$$

Podemos escribir la ley de Gauss en su forma más útil

$$\boxed{\iint_{\text{O}S} d^2a \vec{D} \cdot \hat{n} = Q_0 \quad \text{ley de Gauss para medios dieléctricos.}} \quad (156)$$

Comparando los integrandos de (151) con (156) y la identidad (155), encontramos que

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \quad (157)$$

Podemos pensar que tenemos dos campos eléctricos:  $\vec{E}_0$  (el campo externo generado por  $Q_0$ ) y otro  $\vec{E}_{ind}$  (generado por las cargas  $Q_{ind}$ ) y por lo tanto se opone a  $\vec{E}_0$ , tal que

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_{ind}. \quad (158)$$

Podemos entonces determinar  $\vec{E}_{ind}$  ya que

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_{ind} = \frac{\vec{E}}{\varepsilon} \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \frac{1}{K_e} \vec{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{ind} = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \vec{E}_0 \quad (159)$$

El campo  $\vec{E}_{ind}$  es generado por las densidad de cargas inducidas  $\sigma_{ind}$  así como el campo  $E_0$  es creado por la densidad de cargas libres  $\sigma_0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{ind} = \frac{\sigma_{ind}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{ind}}{S\varepsilon_0} \\ E_{ind} = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) E_0 = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \frac{Q_0}{S\varepsilon_0} \end{array} \right\} \Rightarrow Q_{ind} = Q_0 \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \quad (160)$$

que es la hipótesis de partida (150). Lo importante de la ley de Gauss para medios dieléctricos es que con el uso de  $\varepsilon$  nos evitamos trabajar con las cargas inducidas. En las ecuaciones sólo intervienen las cargas libres  $Q_0$ . Veamos dos ejemplos.

Como primer ejemplo, consideremos una partícula con carga  $Q_0$  en un medio dieléctrico (fluido) caracterizado con  $\varepsilon$ . Usando la ecuación (156), e integrándola sobre una superficie esférica de radio  $r$ , resulta

$$\iint_{\odot S} d^2a \vec{D} \cdot \hat{n} = Q_0 \implies D = \frac{Q_0}{4\pi r^2} = \varepsilon E \implies E = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2} \quad (161)$$

que es lo mismo que la ley de Coulomb con  $\varepsilon$  en lugar de  $\varepsilon_0$ . Se podría decir también que la carga  $Q_0$  resulta apantallada y se comporta como  $Q_0\varepsilon_0/\varepsilon = Q_0/K_e$ .

Como segundo ejemplo consideremos un capacitor con un dieléctrico caracterizado con  $\varepsilon$ . Usando Gauss en un cilindro de superficie  $S$  que encierre la armadura

$$\iint_{\odot S} d^2a \vec{D} \cdot \hat{n} = Q_0 \implies D = \frac{Q_0}{S} = \sigma_0 = \varepsilon E \implies E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \quad (162)$$

que resulta ser igual al del vacío con  $\varepsilon$  en lugar de  $\varepsilon_0$ . Si queremos calcular la capacitancia  $C$ , en la forma más simple, resulta

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{El} = \frac{Q_0}{l \underbrace{\frac{\sigma_0}{\varepsilon}}_E} = \frac{\varepsilon Q_0}{l \frac{Q_0}{S}} = \varepsilon \frac{S}{l} = K_e \varepsilon_0 \overbrace{\frac{S}{l}}^{C_0} = K_e C_0 \quad (163)$$

que confirma el resultado experimental de partida (149). En la siguiente sección vamos a echar luz sobre lo que aquí hemos obtenido en forma grosera. Un cálculo más detallado requiere de un álgebra más compleja, que veremos a continuación.

## B. Electroestática macroscópica

Pasemos a una descripción macroscópica en términos de valores medios. Consideremos un elemento de volumen  $d^3r'$  centrado en la posición  $\vec{r}'_j$ . Un solo dipolo  $\vec{p}_j$  ubicado en la posición  $\vec{r}'_j$  dentro de dicho diferencial genera un potencial  $V_j$  en la posición  $\vec{r}$ , que está dado por (45)

$$V_j(r) = k_e \frac{\vec{p}_j \cdot (\vec{r} - \vec{r}'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|^3}. \quad (164)$$

Sumemos ahora todos los dipolos ubicados en el elemento de volumen

$$\sum_j V_j(r) = d \langle V(r) \rangle = k_e \sum_j \frac{\vec{p}_j \cdot (\vec{r} - \vec{r}'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|^3} \Big|_{\vec{r}'_j \simeq \vec{r}'} \simeq k_e \sum_j \frac{\vec{p}_j \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (165)$$

$$= k_e \sum_j \vec{p}_j \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (166)$$

Definiendo

$$\vec{P}(\vec{r}') = \frac{\sum_j \vec{p}_j}{d^3 r'} = \text{densidad de dipolos por unidad de volumen}, \quad (167)$$

y haciendo  $\sum_j V_j(r) = d \langle V(r) \rangle$  resulta

$$d \langle V(r) \rangle = k_e \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r', \quad (168)$$

$$\langle V(r) \rangle = k_e \int d^3 r' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (169)$$

Si estamos interesados en el valor medio del campo eléctrico  $\langle \vec{E}(r) \rangle$  se obtiene como siempre haciendo  $\langle \vec{E}(r) \rangle = -\nabla \langle V(r) \rangle$ , y usando las formulas del Appendice, llegamos a

$$\langle \vec{E}(r) \rangle = k_e \int d^3 r' \left[ \frac{3 \left( \vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]. \quad (170)$$

Para chequear que está bien, consideremos un solo dipolo en el origen  $\vec{P}(\vec{r}') = \vec{p} \delta(\vec{r}')$ , entonces recobramos la ecuación (56).

Sabiendo que

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (171)$$

podemos reescribir la ecuación ?? así

$$\langle V(r) \rangle = k_e \int d^3 r' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (172)$$

Ahora recurrimos al truco de cambiar la posición de  $\vec{\nabla}$  :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left[ \vec{P}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \vec{P}(\vec{r}') \cdot \left[ \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[ \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{P}(\vec{r}') \right] \quad (173)$$

Reemplazando en (172) resulta

$$\langle V(r) \rangle = k_e \iint_{\circ S} d^2 s' \frac{[\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + k_e \int_{\mathcal{V}} d^3 r' \frac{[-\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{P}(\vec{r}')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (174)$$

Donde hemos usado el teorema de la divergencia para el primer término de la RHS. aquí tenemos dos caminos a seguir.

Primer camino. Si integramos SOLO en el volumen  $\mathcal{V}$ , o sea donde  $\vec{P}(\vec{r}') \neq 0$ , y la segunda integral sobre la superficie que lo encierra, entonces podemos interpretar que  $\langle V(r) \rangle$

es ocasionado por dos densidades de carga inducidas, por el volumen ( $\rho_{ind}$ ) y por la superficie ( $\sigma_{ind}$ )

$$\langle V(r) \rangle = k_e \int_{\mathcal{V}} d^3 r' \frac{\rho_{ind}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + k_e \iint_{\circ S} d^2 s' \frac{\sigma_{ind}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (175)$$

$$\rho_{ind}(\vec{r}') = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \quad \text{y} \quad \sigma_{ind}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}, \quad (176)$$

$\sigma_{ind}$  es igual a la introducida en la sección anterior que se formaba en la superficie del dieléctrico en contacto con la armadura. Además aparece una (inesperada) densidad de volumen  $\rho_{ind}$ , que está relacionada con la variación de la densidad, si la hubiese. Ya que las inducciones deben conservar la carga, entonces debe valer

$$0 = \int_{\mathcal{V}} d^3 r' \rho_{ind}(\vec{r}') + \iint_{\circ S} d^2 s' \sigma_{ind}(\vec{r}'), \quad (177)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} d^3 r' [-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')] + \iint_{\circ S} d^2 s' [\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}], \quad (178)$$

que se satisface, ya que es el teorema de Gauss. Este camino no es el más conveniente.

Segundo camino. Si integramos en TODO el espacio (aquí especificado con  $\int_{\infty}$ ), hasta el infinito, allí:  $\vec{P}(\vec{r}') = 0$ , por lo que la integral sobre la superficie cerrada en el infinito es nula (allí  $\vec{P}(\vec{r}') = 0$ ). Queda sólo el primer término de la RHS, que tiene la estructura de un potencial con sólo las carga inducida de polarización en volumen

$$\rho_{ind}(\vec{r}') = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \quad , \quad \text{tal que} \quad (179)$$

$$\langle V(r) \rangle = k_e \int_{\infty} d^3 r' \frac{\rho_{ind}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (180)$$

Como las densidades de polarización deben compensarse (no generan cargas sino que se reordenan los dipolos), entonces debe valer

$$\int_{\infty} d^3 r' \rho_{ind}(\vec{r}') = 0. \quad (181)$$

(notar que aquí aparece  $\int_{\infty}$ ). Lo cual es obvio, ya que escribiendo  $\rho_{ind}(\vec{r}') = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')$  y usando el teorema de la divergencia resulta que

$$-\iint_{\circ S} d^2 s' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n} = 0 \quad (182)$$

porque en el  $\infty$ ,  $\vec{P} = 0$ . Volveremos sobre este tema más adelante Volviendo a la ecuación de la divergencia del campo eléctrico (40) y considerando que hay aparte de la densidad de

carga inducida  $\rho_{ind}$  y otra densidad externa real  $\rho_0$  ( libre (*free*) o real (*true*) o externa, etc.), entonces

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E} \rangle = \rho_{total} = \rho_0 + \rho_{ind} = \rho_0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} , \quad (183)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \langle \vec{E} \rangle + \vec{P}) = \rho_0, \quad \text{llamando,} \quad (184)$$

$$\varepsilon_0 \langle \vec{E} \rangle + \vec{P} = \vec{D} = \quad \text{vector desplazamiento ,} \quad (185)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0 , \quad \text{entonces,} \quad (186)$$

$$\iiint_{\text{O}S} d^2a \vec{D} \cdot \hat{n} = Q_0, \quad \text{ley de Gauss para medios dieléctricos .} \quad (187)$$

Notemos que ahora  $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P}$ . Resumiendo tenemos las 4 ecuaciones de la electrostática em medios diel'ectricos

$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_0 & \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E} \rangle &= (\rho_0 + \rho_{ind}) / \varepsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{D} &= \vec{\nabla} \times \vec{P}. & \vec{\nabla} \times \langle \vec{E} \rangle &= 0. \end{aligned}$	(188)
---	-------

Observesé que la determinación de  $\vec{D}$  se relaciona con  $\rho_0$ , por lo que nos independizamos totalmente de  $\rho_{ind}$  que es un inconveniente ya que generalmente la desconocemos. De cualquier manera debe tenerse en cuenta que  $\vec{D}$  es un artefacto matem'atico. El campo fisico es  $\vec{E}$  a travez de  $\vec{F} = q \langle \vec{E} \rangle$ . Para calcular  $\langle \vec{E} \rangle$  se requiere el conocimiento de  $\vec{P}$  según la relación  $\langle \vec{E} \rangle = (\vec{D} - \vec{P}) / \varepsilon_0$ . En la próxima sección nos independizaremos de también de  $\vec{P}$  bajo ciertas condiciones.

### C. Medios lineales isotropos y homogeneos (LIH)

La expresión del vector desplazamiento  $\vec{D}$  depende de la Polarización  $\vec{P}$  según la ecuación (185). Lo más general es que la polarización sea dada por una expansión perturbativa

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}_0 + \bar{\chi}_1 \times \langle \vec{E} \rangle + \langle \vec{E} \rangle \times \bar{\chi}_2 \times \langle \vec{E} \rangle + \mathcal{O}(E^3) \quad (189)$$

Si  $\vec{P}_0 \neq 0$  significa que el material tiene una polarización aún en ausencia de campo eléctrico ( $\langle \vec{E} \rangle = 0$ ). El material se llamam **electrete** y tiene una física similar al magnetismo (ferromagnetismo) por lo que a veces se lo llama **ferroeléctricos**. Si  $\vec{P}_0 = 0$  y el segundo

término es suficiente para describir la polarización, entonces  $\vec{P} = \bar{\chi}_1 \times \vec{E}$  y el término se llama **líneal**. Si además es **isótropo** entonces  $\bar{\chi}_1 \equiv \chi(\vec{r}) = \text{susceptibilidad eléctrica}$ . Si además el material es **homogeneo**, no depende de la posición entonces  $\chi = cte$  y entonces llamaremos al material LIH. Por conveniencia escribimos  $\chi = \varepsilon - \varepsilon_0$ :

$$\vec{P} = \chi_e \langle \vec{E} \rangle = (\varepsilon - \varepsilon_0) \langle \vec{E} \rangle, \quad \text{entonces} \quad (190)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \langle \vec{E} \rangle + \vec{P} = \varepsilon_0 \langle \vec{E} \rangle + (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (191)$$

que es la expresión conocida. Vimos que  $\langle \vec{E} \rangle$  es un valor medio,  $\vec{P}$  también es un valor medio (densidad de dipolos) por lo que deberíamos haberlo notado como  $\langle \vec{P} \rangle$ ,  $\vec{D}$  también debe entenderse como un valor medio y lo tendríamos que haber notado como  $\langle \vec{D} \rangle$ . No se usa, se sobrentiende. Es por este concepto de valores medios (promedios sobre la escala microscópica) que se llama electrostática macroscópica.

#### D. Efecto de bordes

Hemos desarrollado dos caminos. El primero es elemental. Llegamos a una carga superficial inducida  $\sigma_{ind}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}$  tal cual lo vimos en el modelo simple cuando incorporamos la carga inducida  $Q_{ind}$ . En segundo camino que integramos hasta el infinito no apareció tal carga inducida sino la de volumen en todo el espacio. **Donde está  $\sigma_{ind}$ ?**

Analizemos el primer camino a la luz del segundo. Reconsideremos el caso del capacitor de placas paralelas en donde colocamos un dieléctrico LIH con polarización constante  $P$ . Por simplicidad trabajaremos en una dimensión e integraremos hasta el infinito como lo requiere el segundo camino. La polarización es entonces

$$P(x) = \begin{cases} 0 & x < -l/2 \\ P & -l/2 < x < l/2 \\ 0 & x > l/2 \end{cases} \quad (192)$$

que se puede escribir en términos de la función  $\Theta$  de Heaviside así

$$P(x) = P\Theta(x + l/2) - P\Theta(x - l/2) \quad (193)$$

El camino 2 solo define la  $\rho_{ind}(\vec{r}') = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')$ , que en una dimensión es

$$\rho_{ind}(x) = -\frac{\partial}{\partial x} P(x) = -\frac{\partial}{\partial x} [P\Theta(x + l/2) - P\Theta(x - l/2)] \quad (194)$$

$$= (-P)\delta(x + l/2) + P\delta(x - l/2) \equiv \sigma_{ind}(x). \quad (195)$$

La lectura ahora es simple: hay dos densidades de carga  $-P$  y  $+P$  en las posiciones  $x = -l/2$  y  $x = l/2$ , respectivamente. Y esas son las densidades de carga inducidas. . Más aún, la ecuación de neutralidad (181) se cumple perfectamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho_{ind}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [(-P)\delta(x + l/2) + P\delta(x - l/2)] = -P + P = 0, \quad (196)$$

En conclusión, las densidades superficiales son los efectos de los bordes (matemáticamente: la derivada de  $\Theta$  es la  $\delta$ ).

### E. Energía electrostática en presencia de dieléctricos

Repitamos todo lo visto para el caso del vacío. Para construir una distribución (digamos volumétrica) de cargas  $\rho_0$  en un determinado medio dieléctrico, tenemos que hacerlo en presencia de  $\langle V \rangle$  y no de sólo  $V$ ; o sea también contra (o a favor) de los dipolos del medio. Para una distribución continua vale entonces

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r' \rho_0(r') \langle V(\vec{r}') \rangle, \quad (197)$$

donde hemos introducido el término  $\langle V(\vec{r}') \rangle$  dado por la ecuación (180) con  $\rho_{ind}(\vec{r}') = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')$  más el de las cargas libres si las hubiera, o sea

$$\langle V(r) \rangle = k_e \int_{\infty} d^3r' \frac{[\rho_0(r') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (198)$$

Físicamente construimos una distribución de cargas (externas)  $\rho_0$  en presencia de todos los potenciales, las otras cargas externas más las inducidas. Sabiendo que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0$ , tenemos de (197)

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r' \overbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{D})}^{\rho_0(r')} \langle V(\vec{r}') \rangle \quad (199)$$

Ahora recurramos al truco de cambiar la posición de  $\vec{\nabla}$  :

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{D} \langle V \rangle] = (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \langle V \rangle + \vec{D} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \langle V \rangle}_{-\langle \vec{E} \rangle} \quad (200)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \langle V \rangle = \vec{\nabla} \cdot [\vec{D} \langle V \rangle] + \vec{D} \cdot \langle \vec{E} \rangle, \quad \text{entonces} \quad (201)$$

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{\nabla} \cdot [\vec{D} \langle V \rangle] + \frac{1}{2} \int d^3r \vec{D} \cdot \langle \vec{E} \rangle, \quad (202)$$

usando el teorema de la divergencia

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\circ S} d^2 s' [\vec{D} \langle V \rangle] + \frac{1}{2} \int d^3 r \vec{D} \cdot \langle \vec{E} \rangle, \quad (203)$$

y como siempre, en el infinito la integral sobre la superficie se anula ya que

$$SD \langle V \rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{1}{r^2} \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \quad (204)$$

quedando

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3 r' \vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (205)$$

Un ejemplo. Para el caso de un capacitor de placas paralelas con dieléctrico LIH con  $\varepsilon$ , tenemos (siguiendo las mismas aproximaciones de siempre)

$$U = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \overbrace{(Sl)}^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} D \overbrace{\left(\frac{D}{\varepsilon}\right)}^E Sl = \frac{1}{2\varepsilon} \overbrace{\left(\frac{q_0}{S}\right)^2}^{D^2} Sl = \frac{q_0^2 l}{2\varepsilon S} = \frac{1}{K_e} \frac{q_0^2 l}{2\varepsilon_0 S}, \quad (206)$$

$$U_0 = U(K_e = 1) = \frac{q_0^2 l}{2\varepsilon_0 S} \quad (207)$$

$$U = \frac{U_0}{K_e} \quad (208)$$

donde  $U_0$  es la energía acumulada por el capacitor en el vacío con  $C_0$ . Como  $K_e > 1$ , entonces  $U < U_0$  [ de aquí sale el tradicional problema de una pastilla dielectrica oscilando dentro de un capacitor ]. En términos de  $C = q/V = K_e C_0$ , tenemos

$$U = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} Sl = \frac{\varepsilon}{2} E^2 Sl = \frac{\varepsilon}{2} \overbrace{\left(\frac{V}{l}\right)^2}^{E^2} Sl = \frac{1}{2} V^2 \varepsilon \frac{S}{l} = \frac{V^2 C}{2} \quad (209)$$

$$U = \frac{CV^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qV}{2}. \quad (210)$$

• como  $C \propto S/l$ , resulta simple predecir como será el resultado del problema con dos pastillas dieléctricas de diferentes  $\varepsilon$  dentro de un conductor dispuestos en paralelo o en serie.

## F. Sobre la ley de Coulomb en medios LIH

Consideremos una partícula cargada con carga  $q_0$  ubicada en el origen de una esfera dieléctrica ("fluido") LIH de radio  $R_0$ . Usando la ley de Gauss para medios dieléctricos tenemos

$$q_0 = \iint_{\circ S} \vec{D} \cdot d\vec{a}, \Rightarrow \vec{D} = \frac{q_0 \hat{r}}{4\pi r^2}, \quad (211)$$

$$\langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{q_0 \hat{r}}{4\pi \epsilon r^2} = \frac{1}{K_e} \frac{q_0 \hat{r}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{1}{K_e} \vec{E}_0 = \overbrace{\frac{q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2}}^q \hat{r}, \quad (212)$$

con lo cual vemos claramente que la carga  $q_0$  está disminuida (apantallada) en un factor  $K_e \geq 1$ . Veamos como se distribuyen las cargas inducidas. Calculemos primero la polarización

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \langle \vec{E} \rangle = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \frac{q_0 \hat{r}}{4\pi r^2}, \quad (213)$$

Por un instante consideremos que la partícula  $q_0$  posee un radio  $r_0$  pequeño, pero finito. Las cargas inducidas en las superficies (interna y externa) ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$ ) del dieléctrico serán

$$q_{ind} = \iint d^2a \sigma_{ind} = \iint_{\circ} d^2a (\vec{P} \cdot \hat{n}) + \iint_{\circ} d^2a (\vec{P} \cdot \hat{n}), \quad (214)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \frac{q_0 \hat{r}}{4\pi r_0^2} \cdot \hat{n}_i 4\pi r_0^2 + \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \frac{q_0 \hat{r}}{4\pi R_0^2} \cdot \hat{n}_e 4\pi R_0^2, \quad (215)$$

$$= \underbrace{-\left(1 - \frac{1}{K_e}\right) q_0}_{q_i} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{K_e}\right) q_0}_{Q_i} = 0 \quad \text{OK, neutralidad}, \quad (216)$$

$q_i$  es la carga inducida que apantalla la partícula y  $Q_i = -q_i$  es la carga remanente en la superficie externa. Ahora podemos tender  $R_0 \rightarrow \infty$ , entonces la carga eléctrica total de la partícula será la externa más la inducida, o sea

$$q = q_0 + q_i = q_0 - \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) q_0 = \frac{q_0}{K_e}. \quad (217)$$

Como  $K_e \geq 1$  entonces cada partícula  $q_0$  queda apantallada en un factor  $K_e = \epsilon/\epsilon_0$  y se comporta como  $q_0/K_e$ . Valen entonces todas las expresiones del campo eléctrico con  $q = q_0/K_e$ .

### G. Ecuaciones de Poisson y Laplace en medios dieléctricos LIH

De acuerdo a la ley de Coulomb una partícula cargada en la posición  $\vec{r}'$  un medio LIH con  $\varepsilon$  genera un campo eléctrico en  $\vec{r}$  tal que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (218)$$

y las ecuaciones siguen lo mismo con  $\varepsilon$  en lugar de  $\varepsilon_0$ . Entonces  $\langle \vec{E} \rangle = -\nabla \langle V \rangle$ , y  $\nabla \cdot \langle \vec{E} \rangle = \rho_0/\varepsilon$  por lo que llegamos a la ecuación de Poisson

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_0}{\varepsilon}, \quad \text{Ecuación de Poisson de medios dieléctricos LIH},} \quad (219)$$

y puede ser resuelta en forma análoga.

### H. Condiciones de contorno entre dos medios dieléctricos

Sean dos medios dieléctricos. un medio interno "1" con  $\vec{E}_1$  y  $\vec{D}_1$  normal  $\hat{n}$ , y un medio "2" con  $\vec{E}_2$  y  $\vec{D}_2$ . Si hacemos un blister en la superficie y aplicamos el teorema de Gauss, resulta

$$\iint_{\text{O}S} d^2a \vec{D} \cdot \hat{n} = q_0 \Rightarrow (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n} = \sigma_0. \quad (220)$$

Si hacemos una circulación

$$\oint_C \langle \vec{E} \rangle \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow (\langle \vec{E}_1 \rangle - \langle \vec{E}_2 \rangle) \times \hat{n} = 0. \quad (221)$$

De (220) y (221) se determinan la componente perpendicular del vector desplazamiento y la paralela del campo eléctrico

$$\boxed{\begin{aligned} (D_{1\perp} - D_{2\perp}) &= \sigma_0 \\ (E_{1\parallel} - E_{2\parallel}) &= 0 \end{aligned}} \quad (222)$$

Si además estamos en presencia de medios dieléctricos LIH, tal que  $\vec{D}_{1,2} = \varepsilon_{1,2} \vec{E}_{1,2}$  se encuentra que, en ausencia de cargas libres ( $\sigma_0 = 0$ ), vale

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad (223)$$

donde  $\cos \alpha_{1,2} = \hat{n} \cdot \hat{E}_{1,2}$ . Si los medios son dieléctricos y sus propiedades magnéticas son despreciables resulta que  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = n = \text{índice de refracción}$  con lo que (223) derivará en la ley de Snell de la óptica.

Conductores. Hemos estrictamente considerado dos dieléctricos. En algunos casos es posible modelizar a los conductores ideales considerando que  $K = \varepsilon/\varepsilon_0 \rightarrow \infty$ . El argumento es muy rebuscado, pero vale la pena plantearlo. Consideremos la condición (220) para medios LIH. En ausencia de  $\sigma_0$ , se resume a  $D_{1\perp} = \varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} = D_{2\perp}$ . Si el medio interno "1" es un conductor entonces  $E_1 = 0$ , con lo que  $\varepsilon_1$  debe tender a  $\infty$  de tal forma que se verifique  $\infty \times 0 = \varepsilon_2 E_{2\perp}$  (!).

### I. Clausius Mossotti

(Mossotti vivió en Argentina alrededor de 1830 y enseñó física. Trabajaba en el convento de Santo Domingo). Supongamos que una esfera dieléctrica de permitividad  $\varepsilon_2$  y radio  $a$  es colocada en medio de un (fluido) dieléctrico con permitividad  $\varepsilon_1$ , con un campo inicialmente constante y que a grandes distancias tiene el valor  $E_0$  en la dirección  $\hat{z}$ . Resolviendo la ecuación de Laplace para el potencial (no nos importa el álgebra) se llega a que la solución es

$$\begin{cases} V_1 = \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) E_0 z, & \text{fuera de la esfera} \\ V_2 = -\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E_0 z, & \text{dentro de la esfera} \end{cases} \quad (224)$$

Verifiquemos que la solución satisface todos los requerimientos que demostramos

- $V_1(a) = V_2(a)$ .
- $\vec{E}_1 = -\vec{\nabla} V_1 \rightarrow_{r \rightarrow \infty} E_0 \hat{z}$ .
- $\vec{E}_1(a) \times \hat{r} = \vec{E}_2(a) \times \hat{r}$  (ó  $\vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel}$ )
- Si hacemos  $\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1$  y  $\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$ , entonces se verifica que  $\vec{D}_1(a) \cdot \hat{r} = \vec{D}_2(a) \cdot \hat{r}$  (ó  $D_{1\perp} = D_{2\perp}$ ).

Dentro de la esfera  $\vec{E}_2 = -\vec{\nabla} V_2 = cte$  y su valor es

$$E_2 = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E_0 \hat{z} = \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2}. \quad (225)$$

Y afuera de la esfera el campo es igual a  $E_0$  más el creado por un dipolo  $\vec{\mu}$  (inducido) en el origen dado por (57).

$$E_1 = E_0 \hat{z} + \frac{k_e}{r^3} [3(\vec{\mu} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{\mu}]. \quad (226)$$

y el valor de  $\vec{\mu}$  está dado por

$$\vec{\mu} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 \hat{z}, \quad (227)$$

con lo cual se redujo el efecto de la esfera a un dipolo inducido  $\vec{\mu}$  por  $\vec{E}_0$ . Veamos tres casos.

**Cavidad en un dieléctrico** En ese caso  $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ , y definiendo la permitividad relativa  $K_1 = \varepsilon_1/\varepsilon_0$ , resulta

$$E_2 = \frac{3K_1}{1 + 2K_1} E_0 \hat{z} = \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2}. \quad (228)$$

$$\vec{\mu} = \frac{1 - K_1}{1 + 2K_1} 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 \hat{z}. \quad (229)$$

**Esfera dieléctrica en el vacío** En ese caso  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ , y definiendo la permitividad relativa  $K_2 = \varepsilon_2/\varepsilon_0$ , resulta

$$E = \frac{3}{2 + K_2} E_0 \hat{z} = \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2}, \quad (230)$$

$$\vec{\mu} = \frac{K_2 - 1}{K_2 + 2} 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 \hat{z}. \quad (231)$$

y esta es la famosa formula de **Clausius Mossotti** (1850).

**Esfera conductora en el vacío.** Como vimos, en ese caso se toma  $K_2 \rightarrow \infty$ , por lo que

$$\vec{\mu} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 \hat{z} = \alpha \vec{E}_0, \quad (232)$$

$$\alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3 = \text{polarizabilidad}, \quad (233)$$

que ya vimos en la ecuación (75). Notese que en el sistema gaussiano ( $4\pi\varepsilon_0 \equiv 1$ ) por lo que  $\alpha = a^3 = (3/4\pi) \times \text{Volumen}$ . En este modelo la polarización de los átomos (considerados como esferas conductoras) es proporcional al volumen. Será importantísimo para determinar las propiedades ópticas de ciertos materiales (aisladores por ejemplo).

## VI. MATERIALES OHMICOS Y CIRCUITO DE CORRIENTE CONTINUA

### A. Ley de Ohm microscópica. Modelo de Drude.

Supongamos un electrón ( $q = -e$ ) que se mueve libremente en presencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$ . según la 2da ley de Newton recibe una fuerza  $\vec{F} = -e\vec{E} = m_e \vec{a} = m_e d\vec{v}/dt$

y el electrón se acelera. Si el medio fuese un conductor ideal, el electrón se movería hacia la superficie y permanecería allí, ya que no puede escapar. Si es un material óhmico el electrón choca con los otros electrones e iones del cuerpo y recibe una fuerza de rozamiento  $\vec{F}_r = -\alpha \vec{v}$  (igual que la ley de Stokes). La ley de Newton es entonces

$$\sum \vec{F} = -e\vec{E} - \alpha \vec{v} = m_e \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (234)$$

El coeficiente de rozamiento  $\alpha$  tiene dimensiones de masa sobre tiempo, por lo que nos conviene escribir  $\alpha = m_e/\tau$ , y a  $\tau$  se lo conoce como *relaxation time* (o *mean free time*) y tiene que ver con el tiempo entre colisión y colisión. En el estado estacionario  $d\vec{v}/dt = 0$ , entonces

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m_e} \vec{E} \quad \text{velocidad de desplazamiento} \quad (235)$$

que corresponde a la velocidad de los electrones en la dirección del campo. Si tenemos  $n = N/V$  = **densidad de electrones** (o cualquier otro *carrier*), entonces podemos definir la densidad de corriente

$$\vec{J} = -en\vec{v} = -en(-e\tau/m_e)\vec{E} = \frac{e^2 n \tau}{m_e} \vec{E}, \quad \text{entonces,} \quad (236)$$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E},} \quad \text{ley de Ohm microscópica} \quad (237)$$

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m_e} = \quad \text{conductibilidad,} \quad (238)$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \quad \text{resistividad.} \quad (239)$$

Nótese que los campos eléctricos a nivel atómico son muy grandes. Por ejemplo tomemos el cobre con una densidad electrónica  $n \approx 8 \times 10^{28}$  elec./m<sup>3</sup>, de lo que se deduce que la distancia entre ellos es del orden de  $d \approx \sqrt[3]{n} \approx 10^{-9}$ . El campo eléctrico debio a la repulsion electronica, será del orden de

$$E_{ee} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{d^2} \approx 10^{11} \frac{N}{C} \approx 10^{11} \frac{\text{Volts}}{m}, \quad (240)$$

lo cual es enorme. Pensemos a nivel humano (distancias del orden del metro): las baterías son del orden del Voltio, la red domiciliaria  $\approx 220$  Voltios. Aun el transporte de corriente que se hace vía las torres de alta tensión son del orden de los  $10^4$  Volts. En este sentido, la

ley de Ohm  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  podría pensarse como el primer orden de una serie perturbativa de la densidad de corriente  $\vec{J}(\vec{E})$  para bajos valores de  $E$ . Los electrones libres (*free electron gas*) que fluyen con el campo eléctrico se mueven al azar con velocidades comparativamente enormes (velocidad de Fermi), del orden de, digamos;  $1.5 \times 10^6$  m/seg = 1500 Km/seg!. Sin embargo en la dirección del campo ( $\vec{v}$  en (235)) es pequeñísima (digamos del orden de los milímetros por segundo) como veremos luego,

## B. Corriente eléctrica.

Supongamos una densidad de corriente de electrones  $\vec{J}$  según (236). Si tuviésemos varios *carrier* con cargas eléctricas (electrones, iones, agujeros, etc), entonces se generaliza obviamente a  $\vec{J} = \sum_j q_j n_j \vec{v}_j$ . Se define corriente eléctrica  $i$  como la cantidad de carga (Coulombs) que fluye sobre una determinada superficie  $S$  por unidad de tiempo (en forma analoga al caudal en un fluido), matematicamente

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (241)$$

La corriente entonces es un escalar y su unidad es  $[i] = \text{C/seg} = \text{Ampere}$ . En general vale

$$i = \frac{Q}{t} = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} d^2s = \text{corriente eléctrica}, \quad (242)$$

siendo, como siempre,  $\hat{n}$  la normal a la superficie  $S$ . Simplificadamente podemos escribir  $i = \vec{J} \cdot \hat{n} S = qnS(\vec{v} \cdot \vec{n})$ . Vale entonces

$$i = qnS(\vec{v} \cdot \vec{n}) = (-q)nS((-\vec{v}) \cdot \vec{n}) \quad (243)$$

Luego,  $i$  tiene el mismo valor cuando tenemos cargas eléctricas  $q$  que se mueven en dirección de  $\vec{v}$ , que cargas  $-q$  que se mueven en dirección  $-\vec{v}$ . Trabajamos por convención con cargas positivas que se mueven con un sentido ( $\oplus \rightarrow \ominus$ ), cuando en realidad en la mayoría de los casos son cargas opuestas (electrones) que se mueven en sentido contrario ( $\ominus \rightarrow \oplus$ ).

### C. Velocidad de desplazamiento

Supongamos un simple conductor cilíndrico (un cable) por el que circulan electrones caracterizados por la densidad de corriente  $\vec{J}$  según (236)

$$i = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} d^2s = JS = envS, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{i}{enS}. \quad (244)$$

De esta manera podemos calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones en la dirección del campo eléctrico. Supongamos un cable de Cu ( $n \approx 8.5 \times 10^{28}$ ,  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  Coulombs, radio del cable = 0.5 mm) por el que circulan 5 Amperes, los electrones tienen una velocidad de 0.46 mm/seg; extremadamente lentos. más aún si lo comparamos con la velocidad al azar del orden de 1500 Km/seg.

### D. Ley de Ohm macroscópica

Volvamos al conductor más simple, nuevamente el cable cilíndrico, podemos escribir

$$i = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} d^2s = JS, \quad \text{usando Ohm microscópica} \quad (245)$$

$$= \sigma E S, \quad (246)$$

$$E = -\nabla V = -dV/dx = V/l, \quad \text{reemplazando,} \quad (247)$$

$$i = \sigma \frac{V}{l} S \quad \text{llamando,} \quad (248)$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} = \text{resistencia} \quad (\text{medio} \times \text{geometría}), \quad (249)$$

entonces

$$\boxed{R = \frac{V}{i}, \quad \text{Ley de Ohm macroscópica,}} \quad (250)$$

o equivalentemente

$$C = \frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{l} \quad \text{Conductancia.} \quad (251)$$

Ahora podemos redefinir las unidades en términos macroscópicos

$$[R] = \frac{Vol}{ampere} = \text{Ohm} = \Omega, \quad (252)$$

$$[C] = \frac{Ampere}{Vol} = \frac{1}{\Omega} = \text{mho} = \mathfrak{U}, \quad \text{entonces} \quad (253)$$

$$[\sigma] = \frac{1}{\text{Ohm} \times \text{metros}} = \frac{\mathfrak{U}}{m}, \quad (254)$$

$$[\rho] = \text{Ohm} \times \text{metros} = \Omega m. \quad (255)$$

Incluir Tabla de conductibilidades.

Notese que si reescribimos la ley de Ohm sabiendo que (en una dirección)  $E = -dV/dx$  e  $i = dq/dt$ , resulta

$$\frac{dq}{dt} = \sigma S \frac{dV}{dx}, \quad (256)$$

que tiene la misma estructura que la propagación del calor  $Q$

$$\frac{dQ}{dt} = -k_T S \frac{dT}{dx}, \quad (257)$$

donde  $k_T$  la conductibilidad térmica y  $dT/dx$  es el gradiente de temperatura. La razón es que tanto el calor como la corriente eléctrica son transportados (esencialmente) por los electrones. Un buen conductor de la electricidad (Ag, Cu, Au) generalmente es un buen conductor del calor. Hay otra expresión equivalente a las ecuaciones (256) y (257) para los fluidos reales (con viscosidad) en términos del caudal y del gradiente de la presión.

La resistencia es el segundo elemento circuital (vimos la capacitancia (C) y nos queda ver la inductancia (L)). Podemos conectarlas en serie o en paralelo.

Si conectamos 2 resistencias  $R_1$  y  $R_2$  en paralelo, sus extremos estarán al mismo potencial y por ambas resistencias pasan  $i_1$  e  $i_2$  tal que  $i = i_1 + i_2$ , entonces

$$\begin{cases} i_1 = \frac{V}{R_1} \\ i_2 = \frac{V}{R_2} \end{cases}, \quad \text{sumando}, \quad (258)$$

$$i = i_1 + i_2 = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = V \frac{1}{R} = i. \quad (259)$$

O sea se comporta como una sola resistencia de valor  $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ .

Si los conectamos en serie por las resistencias pasarán la misma corriente  $i$  y en cada una de ellas habrá una caída de tensión  $V_1$  y  $V_2$

$$\begin{cases} V_1 = i R_1 \\ V_2 = i R_2 \end{cases}, \quad \text{sumando} \quad (260)$$

$$V_1 + V_2 = V = i(R_1 + R_2) = iR, \quad (261)$$

produciendo una suma directa  $R = R_1 + R_2$ . La generalización a varias resistencias es inmediata

$$\begin{aligned} R &= \sum_i R_i && \text{en serie} \\ \frac{1}{R} &= \sum_i \frac{1}{R_i} && \text{en paralelo} \end{aligned} \quad (262)$$

### E. Variación de la resistencia con la temperatura

En la práctica se encuentra que la resistividad cambia con la temperatura, o sea:  $\rho = \rho(T)$ . Si hacemos una serie de potencias alrededor del valor  $T_0$  ( $T_0 = 20^\circ C$ ) resulta

$$\rho(T) = \rho(T_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0} (T - T_0) + \mathcal{O}[(T - T_0)^2] \quad (263)$$

$$= \rho(T_0) [1 + \alpha(T - T_0)], \quad (264)$$

$$\alpha = \frac{\left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0}}{\rho(T_0)} \simeq \bar{\alpha} = \frac{1}{\rho(T_0)} \frac{\rho(T) - \rho(T_0)}{T - T_0} \quad (265)$$

A  $\bar{\alpha}$  se lo conoce como **coeficiente medio de temperatura de la resistividad**. Para conductores Al, Cu y Ag  $\bar{\alpha} \simeq 3.9 \times 10^{-3} K^{-1}$  o sea la resistencia aumenta con la temperatura. El comportamiento de  $\rho(T)$  es bastante lineal en un amplio rango de T. En otros casos tales como el grafito la resistividad decrece con la temperatura  $\bar{\alpha} \simeq -5 \times 10^{-4} K^{-1}$ . Para construir resistencias patrones se usaba la manganina con  $\bar{\alpha}$  muy pequeños:  $\bar{\alpha} \simeq 1 \times 10^{-5} K^{-1}$ .

### F. Ecuación de continuidad. Corrientes estacionarias

La ecuación de continuidad expresa el principio de conservación de la carga (válida también para fluidos e inclusive en la cuántica). Consideremos una superficie cerrada cualquiera  $\mathcal{S}$  que intercambia carga con el exterior via una densidad de corriente  $\vec{J}$ . La corriente que ingresa al volumen encerrado por  $\mathcal{S}$  es

$$i = \iint_{\mathcal{S}} d^2s \vec{J} \cdot \hat{n} = \frac{dQ}{dt} \quad (266)$$

y  $\hat{n}$  es el versor perpendicular (saliente) de la superficie. Donde  $\vec{J} \cdot \hat{n} > 0$  sale carga y donde  $\vec{J} \cdot \hat{n} < 0$  entra carga. Por otro lado la carga en el interior estara dada por

$$Q(t) = \int_V d^3r' \rho(t, \vec{r}') \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = \int_V d^3r' \frac{d\rho(t, \vec{r}')}{dt} \quad (267)$$

La conservación de la carga implica que todo lo que entra se acumula (ó todo lo que sale se pierde), por lo que

$$\iint_{\text{O}S} d^2s \vec{J} \cdot \hat{n} + \int_V d^3r' \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \vec{r}') = 0. \quad (268)$$

Usando el teorema de la divergencia resulta que

$$\int_V d^3r' \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}') + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right] = 0 \quad (269)$$

Como esta expresión es válida para cualquier volumen que consideremos, entonces

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad \text{ecuación de continuidad.}} \quad (270)$$

En el caso particular de que no se acumule carga en ningún lugar o sea que  $\partial\rho/dt = 0$ , podemos decir que

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad \text{regimen estacionario}} \quad (271)$$

En lo que sigue trabajaremos con corrientes estacionarias.

### G. Circulación del campo eléctrico. Fuerza electromotriz

Debido al rozamiento, para mantener la corriente eléctrica en un circuito es necesario la existencia de fuerza externas (digamos químicas.) no conservativas que compensen la energía disipada por los choques.

Circulación sin f.e.m. Tomemos una espira cerrada de material óhmico y supongamos que circula una corriente eléctrica en un determinado campo  $\vec{E}$ . Sabemos que los electrones reciben una fuerza  $\vec{F} = -e\vec{E}$  y que el campo eléctrico  $\vec{E}$  debe satisfacer  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ , o lo que es lo mismo  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ . Ya que los electrones solo circularán por la espira nos ocuparemos solamente la componente paralela a  $d\vec{l}$ . Si el material es Ohmico, entonces vale  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , por lo que tomándonos da

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \sigma \oint \vec{J} \cdot d\vec{l} \approx \sigma J l > 0. \quad (272)$$

Lo que resulta una contradicción (a menos que  $\sigma = 0!$ ). No es posible entonces que el flujo  $J$  se mantenga indefinidamente en el tiempo.

Circulación con f.e.m. Supongamos el mismo caso, pero ahora intercalamos una batería en un cierto punto del circuito. Dentro de la batería se hace un trabajo por unidad de carga eléctrica  $W/q$ . Los electrones sufrirán una cierta fuerza, que la podríamos llamar "química"  $\vec{F}_{quim}$ . En analogía con  $E = F/q$ , podemos imaginar un campo (no conservativo, a este nivel) tal que sea  $\vec{F}_{Quim}/q$ . Consideremos dos puntos del circuito a y b que encierran la batería, podemos escribir entonces

$$\vec{J} = \sigma \left( \vec{E} + \frac{\vec{F}_{quim}}{q} \right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{J} - \frac{\vec{F}_{quim}}{q}, \quad (273)$$

e integrando resulta

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot d\vec{l} - \int_a^b \frac{\vec{F}_{quim}}{q} \cdot d\vec{l}. \quad (274)$$

Analizando cada término, tenemos

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} = V(a) - V(b), \quad (275)$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot d\vec{l} = \frac{J \Delta l}{\sigma} = \frac{i \Delta l}{A \sigma} = i \underbrace{\left( \frac{\Delta l}{\sigma A} \right)}_R = iR, \quad (276)$$

$$\int_a^b \frac{\vec{F}_{quim}}{q} \cdot d\vec{l} = \varepsilon = \text{fuerza electromotriz}, \quad (277)$$

y  $\varepsilon$  es un trabajo ( $\vec{F}_{quim} \cdot d\vec{l}$ ) por unidad de carga, se denomina fem y su unidad es  $[\varepsilon]=\text{Voltio}$ . Hemos considerado que  $\varepsilon > 0$  porque  $\vec{F}_{quim} \cdot d\vec{l} > 0$  o sea que la fuerza  $\vec{F}_{quim}$ , en nuestro caso, trabaja en la dirección de  $d\vec{l}$ , que es el sentido de la corriente, de lo contrario será negativa. Luego escribimos

$$V(a) - V(b) = iR - \varepsilon. \quad (278)$$

Si  $a = b$ , tenemos  $\varepsilon = iR$ . que es lo que esperamos de la ley de Ohm.

## H. Ley de Joule

Consideremos el circuito mas sencillo: una batería conectada a un "aparato" (un electrodoméstico, motor..etc) por el circuito pasa una corriente  $i$  y entre los extremos del aparato hay una diferencia de potencial  $V$ . Un diferencial de carga  $dq$  que se mueve entre los extremos de del aparato disminuye su energía potencial  $dU$

$$dU = Vdq = V(idt) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Vi = \frac{\text{Joule}}{\text{Segundo}} = \text{potencia} = \text{Watt} \quad (279)$$

Esta es la potencia  $W$  entregada por la batería al aparato, luego

$$\boxed{W = Vi} \quad \text{Ley de Joule} \quad (280)$$

Es interesante notar que el Watt es una unidad introducida en mecánica y aquí se deriva en relación a variables eléctricas Watt=Volt×Ampere. Si el aparato es equivalente a una resistencia (lámpara de filamento 20-100 Watts, bajo consumo 9-20 Watt, 1 plancha ~500Watt, etc ) puedo usar la ley de Ohm, entonces

$$W = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \quad (281)$$

En el caso de ser una resistencia la energía es **disipada** (irreversible), cuando el aparato sea un capacitor o una inductancia la energía será acumulada o **almacenada** (reversible).

La empresa de electricidad nos vende energía eléctrica y la factura se expresa en Kilo-WattHora (Energía=Potencia×tiempo) y la relación es

$$1 \text{ kiloWatt hora} = 10^3 \text{ W} \times 3600 \text{ seg} = 3.6 \times 10^6 \text{ J} = 3.6 \text{ MegaJoule}$$

Una casa urbana tipo de esta ciudad gasta del orden de 400 kWh por mes. El BM da 3000 kWh per cápita por año para la Argentina (13300 EEUU y 24 Haití). Hoy, el costo del kWh este bimestre (cambia según la provincia) es de 0.23 pesos (0.10 con subsidio) El costo internacional varía mucho alrededor de 0.10 dolares. El 22 De diciembre de 2013 a las 21:30 fueron superado los máximos históricos de consumo eléctrico: 22.552 MW.

## I. Leyes de Kirchoff

Nos restringiremos al caso de corriente continua en estado estacionario,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . Cuando se conectan arbitrariamente resistencias y baterías, las corrientes que circula en cada rama del circuito quedan determinadas por la ubicación y el valor de los componentes (baterías, resistencias y capacitores, hasta ahora). Las dos leyes de Kirchoff constituyen dos reglas que permiten resolver en forma sistemática los circuitos.

1ra ley de Kirchoff: Un nodo (*branch point*) es un punto del circuito donde se juntan dos o más conductores. Dice: *la suma algebraica de las corrientes que salen de un nodo*

debe ser nula. Su demostración es simple. Es una aplicación de la corriente estacionaria,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . Si encerramos el nodo con una superficie cerrada, entonces

$$0 = \iint_{\circ S} d^2s \vec{J} \cdot \hat{n} = \sum_n \vec{J}_n \cdot \vec{S}_n = \sum_n i_n. \quad (282)$$

2da. ley de Kirchhoff. Una malla (*loop*) es un camino cerrado en el circuito. Dice: *la suma algebraica de las caídas de potencial a lo largo de un circuito cerrado debe ser nula*, o sea

$$\sum_n \varepsilon_n - \sum_j iR_j = 0, \quad (283)$$

donde aquí  $i_j$  es la corriente que circula sobre la resistencia  $R_j$ . Su demostración es una simple extensión de la ecuación (273)

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\frac{1}{\sigma} \oint \vec{J} \cdot d\vec{l}}_{\sum_j iR_j} - \underbrace{\frac{1}{q} \oint \vec{F}_{quim} \cdot d\vec{l}}_{\sum_n \varepsilon_n} \quad (284)$$

$$\sum_n \varepsilon_n = \sum_j iR_j \quad (285)$$

donde hemos usado (276) y (277).

Hay que tener cuidado en el caso tener mallas adyacentes. En caso de tener mallas lindantes hay que considerar el pasaje de corriente de las dos mallas sobre una resistencia común. En este caso la 2da. ley se reduce a

$$\sum_n \varepsilon_n = \sum_j i_j R_j \quad (286)$$

donde ahora  $i_j$  es la corriente suma/resta (considerando la de las mallas adyacentes) que circula sobre la resistencia  $R_j$ . Hay que tener en cuenta el sentido de las corrientes y baterías. El sentido de las baterías es del + al -. Hay una total analogía entre la circulación del agua en presencia de la gravedad con la corriente eléctrica. Una resistencia se comporta como una pendiente con piedras. Una batería es como una noria que eleva baldes de agua para ganar energía potencial.

## J. Resistencia interna

Las baterías tienen resistencia interna. Se puede demostrar su existencia haciendo un cortocircuito entre sus bornes. En ese caso debería ser  $i = \varepsilon/R = \varepsilon/0 = \infty$ , que no es cierto

sino que se llega cierta  $i_{\max} = \varepsilon/r_i$ , y a  $r_i$  se lo conoce como resistencia interna. De esta manera la fuerza electromotriz real  $\varepsilon_{\text{real}} = \varepsilon(i)$  difiere de la ideal  $\varepsilon$ . La forma más simple es considerar que entre los bornes de una batería hay un fem real tal que

$$\varepsilon_{\text{real}} = \varepsilon_{\text{real}}(i) = \varepsilon - ir_i, \quad (287)$$

Si no circula corriente  $\varepsilon_{\text{real}}(0) = \varepsilon$ , y a medida que crece la demanda de corriente,  $\varepsilon_{\text{real}}$  disminuye. A esa resistencia interna se la trata como a cualquier otra del circuito y entra dentro de las ecuaciones de Kirchhoff.

Por ejemplo, si tomamos una pila de ZnCo tiene  $\varepsilon = 1.5$  Voltios siempre, no importa su estado de uso. Pero su  $r_i$  crece con el estado de uso. Si la pila es nueva entonces  $r_i = 0.5\Omega$  y aumenta con el uso hasta valores de, digamos  $r_i = 5\Omega$ .

Un ejemplo: supongamos que a esa pila se le coloca una lamparita de resistencia  $R = 10\Omega$ . Usando la 2da ley de Kirchhoff, resulta que la intensidad que circula es  $i = \varepsilon/(R + r_i)$  y la potencia disipada por la lamparita será de

$$P_R = i^2 R = \left( \frac{\varepsilon}{R + r_i} \right)^2 R, \quad \text{entonces} \quad (288)$$

$$P_R = \left( \frac{1.5}{10 + 0.5} \right)^2 10 = 0.2 \text{ W} \quad \text{batería nueva,} \quad (289)$$

$$P_R = \left( \frac{1.5}{10 + 5} \right)^2 10 = 0.1 \text{ W} \quad \text{batería vieja.} \quad (290)$$

En este caso la lamparita ha disminuido un 50% de su intensidad lumínica y la batería debe ser cambiada. Para reducir la resistencia interna, conviene acoplar pilas en paralelo más que en serie ya que encontramos que

$$\begin{cases} r_i = r_{i1} + r_{i2} & \text{en serie} \\ \frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_{i1}} + \frac{1}{r_{i2}} & \text{en paralelo} \end{cases} \quad (291)$$

## VII. MATERIALES ELECTRICOS. RESUMEN

Resumamos los materiales eléctricos:

- **Conductores ideales** ( $E = 0$ , o  $V = cte$ ). Los electrones libres son los responsables de esta propiedad.

• **Materiales dieléctricos**. Caracterizados por polarizarse y presentar una densidad de dipolos por unidad de volumen  $\vec{P}$  tal que (para medios LIH)  $\vec{P} = \vec{P}_0 + \chi \vec{E} + \dots$  la polarización  $\vec{P}$  surge debido a 3 posibles situaciones:

Ferroeléctricos o electretes: tienen momentos dipolares permanentes ( $\vec{P}_0 \neq 0$ ).

Dipolares permanentes: El material está formado por moléculas polares que se alinean con el campo (por ejemplo  $H_2O$ ).

Dipolares inducidas: moléculas originariamente no polares que en presencia de un campo eléctrico se polarizan (el modelo del "resorte") (por ejemplo, átomos en gral.  $H_2$ ,  $O_2$ ).

**Materiales Ohmicos** ( $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ) Los electrones libres fluyen como un fluido estacionario con rozamiento (chocando entre ellos y con los núcleos del material)