FISICA 3 (y algo mas). Ley de Maxwell y propagación de la luz en el vacío y en medios materiales
1er. cuatrimestre de 2015

J. Miraglia

(Dated: November 27, 2015)

Abstract

LEY DE MAXWELL. Corriente de desplazamiento. Ecuaciones de Maxwell. Ecuaciones de Poisson y Laplace generalizadas. Gauge de Coulomb generalizado.

PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS

Propagación en el vacío. Energía de la radiación. Vector de Poynting. Presión de la radiación. Propagación en medios materiales. Aisladores, malos y buenos conductores. Indice de refracción complejo. Conductores reales: modelo de Drude para $\sigma(\omega)$. Medio con osciladores: modelo de Lorentz para $\varepsilon(\omega)$. Modo longitudinal.

(**Falta**: incluir figuras y tablas, corregir. Tal vez, incluir μ y $\mu(\omega)$)

Incluye: manipulaciones algebraicas. Pude dar todo)

PACS numbers:

I. LEY DE MAXWELL (1831-1879)

Hasta el presente tenemos las 3 leyes fundamentales, Coulomb, Biot-Savart y Faraday, y encontramos que los campos satisfacen (en el vacío):

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \ , & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \ , & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}, \end{array}} \tag{1}$$

y los potenciales V y $\vec{A}$ se definen así

$$\vec{E} \ = \ -\vec{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}, \tag{2}$$

$$\vec{B} \ = \ \vec{\nabla}\times\vec{A}, \qquad \text{con} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \quad \text{(gauge de Coulomb)} \ , \tag{3}$$

que estan relacionados a las fuentes ρ y $\vec{J}$,

$$\nabla^2 V \ = \ -\rho/\varepsilon_0 \ , \tag{4}$$

$$\nabla^2\vec{A} \ = \ \mu_0\vec{J} \ , \tag{5}$$

A todas estas ecuaciones habría que sumarle la ecuación de continuidad (conservación de la carga):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0. \tag{6}$$

Reemplazando $\rho(\vec{r})$ en términos de la divergencia del campo eléctrico, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\left(\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)}^{\rho} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}_D + \vec{J}\right) = 0, \tag{7}$$

$$\vec{J}_D = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \ = \ \textbf{corriente de desplazamiento} \tag{8}$$

Si una variación del campo magnético produce un campo eléctrico (Faraday), es atractivo conjeturar que una variación del campo eléctrico produzca un campo magnético. La genialidad de Maxwell consiste en imponer $\vec{J} \to \vec{J}_D + \vec{J}$, con lo que produce:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \vec{J}_D\right) = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \ , \quad \textbf{ecuación de Maxwell ,} \tag{9}$$

donde hemos usado que la velocidad de la luz está dada por $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.(en realidad todavía no hemos demostramos que c es la velocidad de la luz). Las 4 ecuaciones de Maxwell quedan entonces:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0 \ , & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \ , \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \ , & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \ , \end{array}} \tag{10}$$

A pesar que esta ley fue introducida en forma teórica es confirmada por la experiencia. Esta nueva ley generalizará la definición del gauge de Coulomb.

A. Ecuaciones de Poisson y Laplace generalizadas

Veamos como dependen los potenciales de las fuentes. Reemplazando (2) y (3) en las ecuaciones de Maxwell (10):

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overbrace{\left(-\overrightarrow{\nabla} V - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}\right)}^{\overrightarrow{E}} = \rho/\varepsilon_0 \ , \tag{11}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \underbrace{\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right)}_{\overrightarrow{B}} = \mu_0 \overrightarrow{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(-\overrightarrow{\nabla} V - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}\right)}_{\overrightarrow{E}} \ . \tag{12}$$

Usando la expansión de $\overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}\right) - \overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{A}$ (ver Apéndice), se encuentra que

$$-\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{13}$$

$$-\overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}\right) = \mu_0 \overrightarrow{J} - \frac{1}{c^2}\overrightarrow{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overrightarrow{A} \tag{14}$$

En el caso estacionario habiamos usado el gauge de Coulomb: $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0$; aqui lo generalizamos a

$$\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}V = 0 \ , \qquad \textbf{gauge de Coulomb generalizado ,} \tag{15}$$

que obviamente se reduce a $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0$ en el caso estacionario. Esta definición hace que se cancele el segundo término de la RHS con el segundo de la LHS de la ecuación (14). Luego queda:

$$-\nabla^2 V + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = \rho/\varepsilon_0 \ , \tag{16}$$

$$-\overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overrightarrow{A} = \mu_0 \overrightarrow{J} \ . \tag{17}$$

Podemos llevarlo a su forma mas elegante haciendo uso de 4 dimensiones. Llamando $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$ y $ict \equiv x_4$, entonces:

$$-\Box^2 V = \rho/\varepsilon_0 \ , \tag{18}$$

$$-\overrightarrow{\Box}^2 \overrightarrow{A} = \mu_0 \overrightarrow{J} \ , \tag{19}$$

donde hemos generalizado el Laplaciano al Dalambertiano $\Box^2 = \Sigma_i \partial^2/\partial x_i^2$ [Es mas conveniente introducir la variable $-ct \equiv x_0$ y $\Sigma_{i=1}^4 \rightarrow \Sigma_{i=0}^3$].$S$e puede compactar mas generalizando $\overrightarrow{A}$ a 4 dimensiones, ecribiendo

$$-\Box^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \mu_0}\rho = \mu_0 c^2 \rho \tag{20}$$

$$-\Box^2 \frac{V}{c} = \mu_0 (c\rho) \tag{21}$$

y usando el hecho de que dimensionalmente vale:

$$[\rho c] = \frac{C \times m}{m^3 \times seg} = \frac{C}{m^2 \times seg} = \frac{Ampere}{m^2} = [J] \ , \quad \text{y} \tag{22}$$

$$[V/c] = \frac{Vol \times seg}{m} = [A] \ , \tag{23}$$

Llamando:

$$A_x = \mathcal{A}_1, \quad A_y = \mathcal{A}_2, \quad A_z = \mathcal{A}_3, \quad \frac{V}{c} = \mathcal{A}_4 \ , \quad \text{y} \tag{24}$$

$$J_x = \mathcal{J}_1, \quad J_y = \mathcal{J}_2, \quad J_z = \mathcal{J}_3, \quad c\rho = \mathcal{J}_4 \ , \tag{25}$$

podemos resumir (18) y (19) en una sola expresion:

$$-\overrightarrow{\Box}^2 \overrightarrow{\mathcal{A}} = \mu_0 \overrightarrow{\mathcal{J}} \ . \qquad \textbf{ecuación de Poisson generalizada} \tag{26}$$

En el subespacio en que no hay ni cargas ni corrientes, la ecuación se reduce a la de Laplace:

$$-\overrightarrow{\Box}^2 \overrightarrow{\mathcal{A}} = 0 \ , \qquad \textbf{ecuación de Laplace generalizada} \tag{27}$$

que debe ser resuelta conociendo las condiciones asintóticas de Dirichlet o Neuman. Cuando se usa el sistema gaussiano es conveniente remover μ_0, asi:

$$-\overrightarrow{\Box}^2 \overrightarrow{\mathcal{A}} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\mu_0 \overrightarrow{\mathcal{J}} = \frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\overrightarrow{\mathcal{J}} \tag{28}$$

$$-\overrightarrow{\Box}^2 c^2 \overrightarrow{\mathcal{A}} = \frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0}\overrightarrow{\mathcal{J}}\Big|_{4\pi\varepsilon_0 = 1} = 4\pi \overrightarrow{\mathcal{J}} \tag{29}$$

Las expresiones se simplifican mas aun si se usan unidades electromagnéticas: $\hbar = e = c = 1$ (no confundir con las unidades atómicas: $\hbar = e = m = 1$), con lo que la ecuación luce mas compacta: $-\overrightarrow{\Box}^2 \overrightarrow{\mathcal{A}} = 4\pi \overrightarrow{\mathcal{J}}$ con $\mathcal{J}_4 \equiv \rho$ y $\mathcal{A}_4 \equiv V$.

B. Corriente de Desplazamineto

La ecuación de Maxwell nos permite retener la noción de que la corriente es continua. Veamos nuevamente la carga del capacitor de placas paralelas. Fluye al capacitor una determinada corriente $i(t)$. Al llegar a la placa positiva deposita una cantidad de carga positiva $dQ = +i\ dt$. En la otra placa se carga con $dQ = -i\ dt$ y sigue el flujo de corriente. En principio la corriente se interrumpe dentro del capacior. Con la ecuación de Maxwell esto tiene otra lectura. Pensemos en una dimension dentro del modelo mas sencillo. Dentro del capacitor se crea un campo $E(t)$, según la ecuación de Maxwell tenemos una corriente de Desplazamiento:

$$J_D = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E(t) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{Q}{S} = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} = \frac{i}{S} \ . \tag{30}$$

La corriente que circula dentro del capacitor debido a J_D es:

$$i_d = \iint J_D ds = \iint \left(\frac{i}{S} \right) ds = \frac{i}{S} S = i \ . \tag{31}$$

En definitiva la densidad de corriente J no se interrumpe, sino que se cierra dentro del capacitor vía J_D. Este era el interés original de Maxwell.

II. PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICA

A. Propagación en el vacio

Supongamos que ocurriera una cierta perturbación electromagnética, tal como una variación de $\rho_0(t)$ ó $\overrightarrow{J}_0(t)$, o un decaimiento electrónico, etc, distante, y nos concentramos en un subespacio lejano (digamos un caja cubica), lejos de la fuente. En ese lugar vale la ecuación de Laplace $\overrightarrow{\Box}^2 \overrightarrow{\mathcal{A}} = 0$ es:

$$-\overrightarrow{\Box}^2 \overrightarrow{A} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] A_{x,y,z} = 0 \ , \tag{32}$$

$$-\Box^2 V = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] V = 0 \ . \tag{33}$$

Supongamos que la condición asintótica imponga que $A_y = A_z = 0$, y que $A_x = A_x(z,t)$ o sea una propagación en la dirección z del tipo ondulatorio,

$$\overrightarrow{A}(z,t) = \widehat{e}_x A_x(z,t)) = \widehat{e}_x A_N \sin(kz - \omega t) \ , \tag{34}$$

y $V = 0$ (o una constante), ya que el gauge de Coulomb requiere que:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}V = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = -\frac{\partial}{\partial x}A_x(z,t) = 0 \ . \tag{35}$$

Reemplazando (34) en (32) resulta que:

$$\omega = kc \ , \qquad \text{con} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad \textbf{velocidad de la luz en el vacío} \tag{36}$$

El argumento del seno se reescribe como $(kz - \omega t) = k(z - ct)$, lo cual nos indica que la onda se propaga con $z = ct$: con la velocidad.de la luz c, tal cual lo habíamos adelantado. Una vez que tenemos $\overrightarrow{A}$ podemos calcular $\overrightarrow{E}$ y $\overrightarrow{B}$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} = +\widehat{e}_x A_N ck \cos(kz - \omega t) \ , && (37) \\
\overrightarrow{B} &= \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \widehat{e}_x & \widehat{e}_y & \widehat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A(z,t) & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , && (38) \\
&= +\widehat{e}_y A_N k \cos(kz - \omega t) \ . && (39)
\end{aligned}$$

Obviamente $E = cB$, $\overrightarrow{E}$ es perpendicular a $\overrightarrow{B}$ y ambos estan en fase. En la óptica la dirección de $\overrightarrow{E}$ corresponde al versor de polarización de la luz. Esta onda describe la luz, ya sea: rayos infrarojos, visible, ultravioletas, raxos x, rayos γ, etc.

B. Potenciales retardados

(falta)

$$c = \frac{z}{t} \ \rightarrow \ t - t' = t - \frac{z}{t} \tag{40}$$

C. Energía de la radiación

En nuestra caja la energía U por unidad de volumen del campo eléctrico y magnético esta dado por las ecuaciones ya vistas,

$$\begin{aligned}
\frac{U}{V} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mu_0\varepsilon_0 E^2, && (41) \\
&= \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 A_N^2 \underbrace{c^2 k^2}_{\omega^2} \cos^2(kz - wt) \ . && (42)
\end{aligned}$$

Promediando en el tiempo, como siempre,

$$\left\langle \cos^2(kz - wt) \right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^T \cos^2(kz - wt)dt = \frac{1}{2} \ , \tag{43}$$

con lo que

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 A_N^2 \omega^2 = \rho(\omega). \ = \ \textbf{densidad de energia} \tag{44}$$

Aquí, el coeficiente A_N^2 puede determinarse conociendo cuantos corpusculos (fotones) hay en el volumen V y cual es la energía de cada uno de ellos. Digamos que hay N fotones con energia ϵ_{ph} cada uno, luego:

$$\rho(\omega) \ = \ \frac{N\epsilon_{ph}}{V} = \frac{U}{V} = \varepsilon_0 \frac{1}{2} A_N^2 \omega^2 \tag{45}$$

$$A_N \ = \ \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0 \omega^2}\rho(\omega)} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0 \omega^2}\frac{N\epsilon_{ph}}{V}} \tag{46}$$

Esa es la razón por la cual llamamos A_N. La mecánica cuántica nos dirá que $\epsilon_{ph} = \hbar\omega = h\nu$, pero eso será después de 1905. A continuacion definiremos el calor de A_N.usando el vector de Poynting

D. Vector de Poynting

Podemos determinar el término A_N vía la mecanica clásica. Definamos:

$$\overrightarrow{S} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B} \qquad \textbf{vector de Poynting} \tag{47}$$

Veamos primero las unidades:

$$[S] = \frac{Ampere}{tesla \times m} \times \frac{Newton}{Coulomb} \times tesla = \frac{Joule}{m^2 \times seg} \ , \tag{48}$$

que es una cantidad meánica y que tienen un sentido bien claro: el flujo de energía por unidad de tiempo sobre la unidad de superficie. Reemplazando $\overrightarrow{E}$ y $\overrightarrow{B}$, resulta:

$$\overrightarrow{S} \ = \ \widehat{k}\frac{1}{\mu_0}E\overbrace{\frac{E}{c}}^{B} = \widehat{k}\frac{1}{\mu_0 c}\overbrace{A_N^2 c^2 k^2 \cos^2(kz - \omega t)}^{E^2} \ , \text{o} \tag{49}$$

$$\left\langle \overrightarrow{S} \right\rangle \ = \ \widehat{k}\ \frac{1}{\mu_0 c} A_N^2 c^2 k^2 \frac{1}{2} \tag{50}$$

$$A_N \ = \ \sqrt{\frac{2\mu_0 c}{\omega^2}\left\langle \overrightarrow{S} \right\rangle} \tag{51}$$

y $\widehat{k}$=$\widehat{E}\times\widehat{B}=\overrightarrow{k}/k$, denota la dirección de propagación de la luz.

Las fuentes reales en general no producen una radiación en particular sino una cierta banda, con polarizaciones al azar, y con ángulos iniciales tambien al azar. Para tener una idea, el sol es la fuente de radiación mas importante de la naturaleza. El vector de Poynting para el sol en la Tierra (teniendo en cuenta todas las frecuencias !)

$$S = 1.395\frac{\text{kiloJoule}}{\text{metro}^2\times\text{segundo}} = 1.395\frac{\text{kiloWatt}}{\text{metro}^2} \tag{52}$$

o sea del orden del consumo de una casa (a la superficie de la tierra llega $\sim$ 1 kW/m^2). Se encuentra también que, lejos de la fuentes,

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{S}\cdot d\overrightarrow{a} = \text{Potencia [Watts]} \tag{53}$$

por lo que podemos determinar A_N sin especular sobre la existencia de fotones: solo conociendo la potencia de la fuente. Y esa es la forma tradicional pre-1905. Para tener una equivalencia: si nos llegase del sol solamente luz amarilla (no es así) la energía de cada fotón sería (según Einstein: $\epsilon_{ph}=h\nu$) :

$$\epsilon_{ph} = h\nu = \big(6.6\times10^{-34}Joule\times seg\big)\times\big(0.5\times10^{15}1/seg\big) = 3.3\times10^{-19}Joule \tag{54}$$

con lo cual nos llegaría del sol $10^3/10^{-19}\sim10^{22}$ fotones /seg/m^2.

E. Presión de la radiación. Momento lineal

Definamos :$\overrightarrow{P}=\overrightarrow{S}/c$, las unidades son:

$$[P] = \frac{Joule}{m^2\times seg}\times\frac{seg}{m} = \frac{Newton}{m^2} = [\text{presion}]\ , \tag{55}$$

$$= \frac{kg\times m/seg}{m^2\times seg} = [\text{mom. lineal}/(\text{seg}\times\text{m}^2)]\ . \tag{56}$$

Para tener una idea la presión del sol a la altura de la Tierra es $5\times10^{-6}Nw/m^2$, y toda la tierra recibe una fuerza de 10^8Newtons (la gravitatoria es 10^{22})(veleros fotónicos son posibles para distancias mas alejadas que plutón).

F. Twisted light. Momento angular

III. PROPAGACIÓN DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA EN MEDIOS MATERIALES

Nos preguntamos aquí como viaja la luz en un medio. Desarrollaremos el modelo de Lorentz que fue la visión mas o menos dominante hasta fines del siglo XIX, antes de la aparición de la mecánica cuántica. Las interacciones atómicas eran interpretadas por resortes y el movimiento de los electrones libres representados con el modelo de Drude.

Dentro de la longitud de onda de la radiación caben muchísimos átomos (excepto para los rayos X o mas duros), por lo cual una interpretación macroscópica es aceptable. Para tener una idea: la luz amarilla tiene una longitud de onda de 590 nanómetros y cubre alrededor de digamos 10^3 átomos.

Hay que tener cuidado en cuanto a la interpretación de una onda electromagnética viajando dentro de un medio. La luz en el medio no es realmente una onda electromagnética pura, sino una mezcla de ondas y movimientos (excitaciones) electrónicos, ensamblados unos con otros (Dexter). Esta mezcla se desplaza dentro del material y si sale la radiación electromagnética tal como entró, decimos que la luz no fue absorbida, si ocurre lo contrario se lo atribuimos a un proceso de absorción.

Supongamos que el medio esta formado por dipolos eléctricos y magnéticos de modo tal que se polarise y magnetise. Por ejemplo los electrones en presencia del campo eléctrico $\overrightarrow{E}(t)$ sufrirán una fuerza $\overrightarrow{F}(t) = q_e\overrightarrow{E}(t)$, y los electrones se desplazarán respecto al centro de carga produciendo una polarización $\overrightarrow{P}(t)$ instantánea que contribuirá a crear un campo eléctrico inducido, modificará el campo total, y por lo tanto el desplazamiento de la onda electromagnética. Si además el medio tiene electrones libres, en presencia de $\overrightarrow{E}$ generarán una densidad de corriente $\overrightarrow{j}$ de acuerdo a la ley de Ohm microscopica , que contribuirá al campo magnético y así también al desarrollo de la onda electromagnética. Es todo un ensamble.

Supongamos medios LIH caracterizados con los parámetros μ ε y σ tal que podamos escribir:

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon\overrightarrow{E}\ , \qquad \overrightarrow{B} = \mu\overrightarrow{H}\ \ ,\ y \qquad \overrightarrow{j} = \sigma\overrightarrow{E}\ . \tag{57}$$

Recordemos que μ ε y σ son constantes (por ahora), no dependen de la frecuencia de los campos. Las ecuaciones de Maxwell lejos de las fuentes externas (ρ_0 y $\overrightarrow{J}_0$) serán:

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{D} = 0 = \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\varepsilon\overrightarrow{E}\right) \qquad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E} = 0\ , \tag{58}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B} = 0 = \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{H}}{\mu}\right) \qquad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H} = 0\ , \tag{59}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu\overrightarrow{H} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{H}\ , \tag{60}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = \underbrace{-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E}}_{\overrightarrow{j}_D} + \underbrace{\sigma\overrightarrow{E}}_{\text{Ohm}} = \left(-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\right)\overrightarrow{E}\ , \tag{61}$$

Por simplicidad trabajaremos con $\overrightarrow{E}$ y $\overrightarrow{H}$ y usaremos fasores. Proponemos la solución ondulatoria,

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)\Big|_{\text{real}} = \text{Re}[\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)], \qquad \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{E}_0\exp(i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - i\omega t)\ , \tag{62}$$

$$\overrightarrow{H}(\overrightarrow{r},t)\Big|_{\text{real}} = \text{Re}[\overrightarrow{H}(\overrightarrow{r},t)], \qquad \overrightarrow{H}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{H}_0\exp(i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - i\omega t)\ . \tag{63}$$

Comparandolo con (37) resulta que $E_0 = A_N ck$. Antes de continuar es conveniente introducir dos propiedades que usaremos

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\widehat{j}\exp(i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}) = i\left(\overrightarrow{k}\cdot\widehat{j}\right)\exp(i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}), \tag{64}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\widehat{j}\exp(i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}) = i\left(\overrightarrow{k}\times\widehat{j}\right)\exp(i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}). \tag{65}$$

Además tengamos en cuenta la posibilidad de tener k con valor complejo, o sea

$$\overrightarrow{k} = (k_r + ik_i)\widehat{k}, \ \text{ tal que} \tag{66}$$

$$\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{k} = (k_r + ik_i)^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2i\ k_r k_i = \text{complejo}, \ \text{ y} \tag{67}$$

$$\overrightarrow{k}^*\cdot\overrightarrow{k} = (k_r^2 + k_i^2) = \text{real}. \tag{68}$$

.De (58) y (59) obtenemos:

$$\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{E}_0 = 0 \qquad \text{y} \quad \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{H}_0 = 0 \tag{69}$$

Con lo cual nos conformarán la base:

$$\widehat{E}_0\times\widehat{H}_0 = \widehat{k} \tag{70}$$

De (60) obtenemos:

$$i\left(\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{E}_0\right) = +i\mu\omega\overrightarrow{H}_0 \tag{71}$$

Este producto vectorial verifica (70) y en modulo producen;

$$\boxed{kE_0 = +\mu\omega H_0} \tag{72}$$

De (61) obtenemos:

$$i\left(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{H}_0\right) = -i\left(\overrightarrow{H}_0 \times \overrightarrow{k}\right) \ = (-i\varepsilon\omega + \sigma)\,\overrightarrow{E}_0 \ = -i(\varepsilon\omega \ + i\sigma)\,\overrightarrow{E}_0 \tag{73}$$

El producto vectorial ratifica nuevamente (70) y produce en módulo:

$$kH_0 = (\varepsilon\omega + i\sigma)\,E_0 \tag{74}$$

De (72) tenemos $E_0 = +\mu\omega H_0/k$ y reemplazando en (74), tenemos:

$$\boxed{k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\sigma\mu\omega} \tag{75}$$

Que será la ecuación basica a seguir. [Ya que hay tantas variables en juego es interesante chequear la identidad dimensional de (75)]. Se desprende de esta ecuación que el número de onda k es complejo, escribiendo $k = k_r + ik_i$ obtenemos luego de simple algebra:

$$k_r \ = \ \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\sigma^2/(\varepsilon\omega)^2}+1}{2}} \ , \tag{76}$$

$$k_i \ = \ \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\sigma^2/(\varepsilon\omega)^2}-1}{2}} \tag{77}$$

Otra forma, encontrada en la literatura, es definir una respuesta dieléctrica compleja $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ (por razones historicas se llaman a la parte real e imaginaria, ε_1 y ε_2) A partir de (75):

$$k^2 \ = \ \mu\omega^2\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right) = \mu\omega^2(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \ , \tag{78}$$

$$\varepsilon_1 \ = \ \mathrm{Re}[\varepsilon] = \varepsilon \ , \qquad y \qquad \varepsilon_2 = \mathrm{Im}[\varepsilon] = \sigma/\omega \ , \tag{79}$$

y así lo vamos a encontrar mas adelante.

Veamos 3 casos: aisladores ($\sigma = 0$), malos conductores ($\sigma \to 0$) y buenos conductores ($\sigma \to \infty$).

• **Aisladores ($\sigma = 0$).** El material no tiene electrones libres, $\sigma = 0$, $k_i = 0$, por lo que k es real, y:

$$k_r = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v} \ , \qquad \text{con} \quad v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} \ . \tag{80}$$

Y así tenemos la solución standard:

$$\overline{E}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{E}_0 \exp[ik_r(\widehat{k}\cdot\overrightarrow{r} - ivt)], \tag{81}$$
$$\overline{H}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{H}_0 \exp[ik_r(\widehat{k}\cdot\overrightarrow{r} - ivt)] \tag{82}$$

Por ultimo veamos los modulos. De (72):

$$H_0 = \frac{k}{\mu\omega}E_0\Big|_{k=k_r} = \frac{\overbrace{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}^{k_r}}{\mu\omega}E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0, \quad \text{o mejor} \tag{83}$$
$$B_0 = \mu H_0 = \sqrt{\mu\varepsilon}E_0 = \frac{1}{v}E_0 \tag{84}$$

Se concluye que:

i) La onda no se amortigua, o sea no decrese su intensidad $\left|\overline{E}(\overrightarrow{r},t)\right|^2 = cte.$ (cuerpos transparentes,, digamos el cristal de NaCl).

ii) Viaja con velocidad $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

iii) El campo eléctrico esta en fase con el magnético: $H_0/E_0 = \sqrt{\varepsilon/\mu} = \text{real}$.

4i) Los módulos se relacionan asi: $E_0 = vB_0$, y $|E_0|^2 = v^2|B_0|^2$.

• **Malos conductores ($\sigma \to 0$)**. Tomando el limite

$$\lim_{\sigma\to 0} k_r = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1+1}{2}} + \mathcal{O}(\sigma^2) = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k_r = \frac{\omega}{v} \tag{85}$$
$$\lim_{\sigma\to 0} k_i = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sigma^2/(\varepsilon\omega)^2 - 1}{2}} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\sigma}{2\varepsilon\omega} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = k_i \tag{86}$$

Con lo cual k_r es independiente de σ y ω, mientras que k_i crece con σ. Veamos los campos:

$$\overline{E}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{E}_0 \exp[i(k_r + ik_i)\widehat{k}\cdot\overrightarrow{r} - i\omega t)], \tag{87}$$
$$= \overrightarrow{E}_0 \exp[-k_i\widehat{k}\cdot\overrightarrow{r}]\exp[ik_r(\widehat{k}\cdot\overrightarrow{r} - ivt)], \tag{88}$$

Especificamente si tomamos $\widehat{E}_0 = \widehat{e}_x$, $\widehat{H}_0 = \widehat{e}_y$, y $\widehat{k} = \widehat{e}_z$, entonces:

$$\overline{E}(\overrightarrow{r},t) = \underbrace{\overrightarrow{E}_0 \exp[-k_i z]}_{\text{amortiguamiento}}\exp[ik_r(z - vt)], \tag{89}$$

y el campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ se debilita con z. Notese que k_{i0} no depende de ω. Finalmente podemos escribir:

$$\overline{E}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{E}_0 \exp\left(-\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}z\right)\exp[ik_r(z - vt)]\ . \tag{90}$$

Resulta interesante ver la intensidad magnética. Partiendo de (72):

$$H_0 = \frac{1}{\mu\omega}kE_0 = \frac{k_r + ik_i}{\mu\omega}E_0 = e^{i\varphi_k}\frac{|k|\,E_0}{\mu\omega} \text{ (no están en fase!)} , \tag{91}$$

$$\varphi_k = \tan^{-1}\left[\frac{k_i}{k_r}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon\omega}\right] \simeq \frac{\sigma}{2\varepsilon\omega} = \mathcal{O}(\sigma) , \tag{92}$$

$$\frac{H_0}{E_0} = e^{i\varphi_k}\frac{|k|}{\mu\omega} = e^{i\varphi_k}\frac{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon + \frac{\sigma^2\mu}{4\varepsilon}}}{\mu\omega} = e^{i\varphi_k}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + \mathcal{O}(\sigma^2), \quad \text{o mejor} \tag{93}$$

$$B_0 = \mu H_0 = \sqrt{\mu\varepsilon}e^{i\varphi_k}E_0 = \frac{1}{v}e^{i\varphi_k}E_0 , \tag{94}$$

Se concluye que:

i) La onda se amortigua, decrece su intensidad $\left|\overline{E}(\overrightarrow{r},t)\right|^2 \propto \exp\left(-\sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}z\right)$ (cuerpos opacos, pero el amortiguamiento no depende, en este modelo, de ω).

ii) Viaja con velocidad $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}.$

iii) El campo eléctrico NO esta en fase con el magnético: difieren en φ_k ,

4i) Los modulos se relacionan $E_0 = ve^{i\varphi_k}B_0$, pero igualmente $|E_0|^2 = v^2\,|B_0|^2$:

• **Buenos conductores ($\sigma \to \infty$).** Tomando el limite

$$\lim_{\sigma\to\infty} k_r = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} = \sigma\sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon}} = k_\infty \to \infty , \tag{95}$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} k_i = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} = \sigma\sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon}} = k_\infty \to \infty . \tag{96}$$

Con lo cual $k_r = k_i$, y se puede resumir en una sola forma

$$k = k_r + ik_i = \sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{i} = \sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\exp[i\pi/4]. \tag{97}$$

Notese que ni k_r ni k_i depende de ω. Valen las mismas conclusiones anteriores, excepto que cambia la velocidad por una forma mas complicada. La ondas se amortiguan fuertemente y esta es la razón por la cual los conductores no son transparentes. Además como $k_r = k_i$, $\varphi_k = \pi/4$: los campos tienen un desfasaje de 45 grados.

IV. FIN FÍSICA 3 ==

A. Indice de refracción complejo

Agunos libros hacen referencia al indice de refracción complejo. Esto resulta de reinterpretar (75) asi:

$$\mu\varepsilon = \frac{k^2 - i\sigma\mu\omega}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}\ , \tag{98}$$

$$\frac{c^2}{v^2} = \frac{c^2k^2}{\omega^2} - i\sigma\frac{\mu c^2}{\omega} = n^2\ , \tag{99}$$

siendo n el índice de refracción del medio en cuestión. La parte imaginaria surge debido a la presencia de electrones libres. Si $\sigma = 0\ \Rightarrow n = ck/\omega =$ real. Si estamos en presencia de un material tal que $\mu \cong \mu_0$, y utilizando el sistema gausiano, produce:

$$n^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} - \frac{i\sigma}{\omega}\frac{\overbrace{\varepsilon_0\ \mu_0 c^2}^{1}}{\varepsilon_0} = \frac{c^2k^2}{\omega^2} - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\Bigg|_{4\pi\varepsilon_0=1} = \frac{c^2k^2}{\omega^2} - i\sigma\frac{4\pi}{\omega}\ , \tag{100}$$

que es una forma muy usada en el formalismo dieléctrico.

B. Conductores reales. Modelo de Drude para $\sigma(\omega)$.

• Para el caso $\sigma(\omega) = cte$, ya lo vimos en circuitos para el caso estacionario. Repasemos: se supuso un electrón de carga $-e$ que se mueve en un medio Ohmico (conductor real) en presencia de un campo eléctrico $\overrightarrow{E}$. El electrón choca con los otros electrones e iones del material y recibe una fuerza de rozamiento $\overrightarrow{F}_r = -\alpha\overrightarrow{v}$ [igual que la ley de Stokes]. La ley de Newton nos dice que:

$$\sum\overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{E} - \alpha\overrightarrow{v} = m_e\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\ , \tag{101}$$

y $\alpha = m_e/\tau$ es el rozamiento. En el estado estacionario $d\overrightarrow{v}/dt = 0$, entonces $\overrightarrow{v} = -e\tau\overrightarrow{E}/m_e$.Si tenemos n_e =densidad de electrones, entonces podemos definir la densidad de corriente:

$$\overrightarrow{J} = -en_e\overrightarrow{v} = \frac{e^2n_e\tau}{m_e}\overrightarrow{E} = \sigma\overrightarrow{E} \quad \textbf{ley de Ohm microscópica} \tag{102}$$

$$\sigma = \frac{e^2n_e\tau}{m_e} = \quad \textbf{conductibilidad estacionaria} \tag{103}$$

Esto vale para un modelo estacionario, no para el caso en el cual el campo eléctrico varie fuertemente con el tiempo.

• Para el caso en que el campo electrico sea dependiente del tiempo, $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)$,la ecuación de Newton resulta ser

$$\sum \overrightarrow{F} = \underbrace{-e\overrightarrow{E}_0 \exp(i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - i\omega t)}_{\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)} - \frac{m_e}{\tau}\overrightarrow{v} = m_e\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \ . \tag{104}$$

Proponiendo: $\overrightarrow{v}\ (\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{v}_0 \exp(i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - i\omega t)$, entonces

$$-e\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = \frac{m_e}{\tau}\overrightarrow{v} + m_e(-i\omega)\overrightarrow{v} = (1-i\omega\tau)\frac{m_e}{\tau}\overrightarrow{v} \tag{105}$$

y la solución es:

$$\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r},t) = \frac{-e\tau\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)}{m_e(1-i\omega\tau)}, \quad \text{y siguiendo los pasos anteriores} \tag{106}$$

$$\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r},t) = -en_e\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r},t) = \frac{e^2n_e\tau}{m_e(1-i\omega\tau)}\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = \sigma(\omega)\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) \tag{107}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2n_e\tau}{m_e(1-i\omega\tau)} = \frac{\sigma(\omega=0)}{1-i\omega\tau}, \tag{108}$$

y $\sigma(\omega=0)$ es la conductibilidad estacionaria definida anteriormente. Para $\omega\tau << 1$, σ es real y vale la aproximación estacionaria, pero para $\omega\tau > 1$ la conductividad es compleja y depende fuertemente de la frecuencia. Pensemos en un conductor: Cu, donde $\tau \sim 10^{-13}$, implica que σ es complejo para frecuencias mayores a $1/\tau > 10^{13}$ (desde el infrarojo-visible)

C. Medio de osciladores. Modelo de Lorentz para $\varepsilon(\omega)$.

• Ya lo vimos para el caso estacionario. Repasemos: consideremos un oscilador que posee un electrón activo de masa m_e y carga $-e$ vibrando alrededor de la posición de equilibrio provocado por el campo eléctrico $\overrightarrow{E} = cte$. El desplazamiento respecto a la posición de equilibrio $\overrightarrow{u}$ esta determinado por la ley de Newton:

$$\sum \overrightarrow{F} = m_e\frac{d^2\overrightarrow{u}}{dt^t} = -\overbrace{(m_e\omega_0^2)}^{k}\overrightarrow{u} - e\overrightarrow{E} \ , \tag{109}$$

donde $k = m_e\omega_0^2$ es la constante del resorte [la situación es igual a la de un resorte bajo el efecto de la gravedad]. El valor medio del desplazamiento es:

$$\langle\overrightarrow{u}(t)\rangle = \left\langle -\frac{e\overrightarrow{E}}{m_e\omega_0^2} + u_0\cos(\omega_0 t)\right\rangle = -\frac{e\overrightarrow{E}}{m_e\omega_0^2} \tag{110}$$

La polarización del oscilador es simplemente: $\overrightarrow{p} = -e\left\langle \overrightarrow{u} \right\rangle$. Si tenemos una determinada densidad de osciladores por unidad de volumen n_a,el vector polarización es:

$$\overrightarrow{P} = n_a \overrightarrow{p} = \frac{n_a e^2 \overrightarrow{E}}{m_e \omega_0^2} = \chi_e \overrightarrow{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\overrightarrow{E} \tag{111}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{n_a e^2}{m_e \omega_0^2} = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right) = \varepsilon_0 K_e, \quad \text{donde} \tag{112}$$

$$\omega_p^2 = \frac{n_a e^2}{m_e \varepsilon_0} \qquad \textbf{frecuencia de plasmon} \tag{113}$$

y este es el caso estático.

• Consideremos ahora al electrón vibrando alrededor de una posición de equilibrio provocado por el campo eléctrico $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t)$. El desplazamiento respecto a la posición de equilibrio $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t)$ está determinado por la ley de Newton

$$\sum \overrightarrow{F} = m_e \frac{d^2 \overrightarrow{u}}{dt^t} = -(m_e \omega_0^2)\overrightarrow{u} - \alpha \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} - e\overrightarrow{E} \ , \tag{114}$$

y $\alpha = m_e/\tau$ es nuevamente el rozamiento. Esta ecuación es exactamente igual al oscilador forzado de la mecánica básica; y se resuelve igual. Podemos trabajar directamente en el campo complejo. Proponemos

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{u_0} \exp(i\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} - i\omega t) \ ., \tag{115}$$

reemplazando en (114), encontramos que

$$m_e(-i\omega)^2 \overrightarrow{u} = -(m_e \omega_0^2)\overrightarrow{u} - \frac{m_e}{\tau}(-i\omega)\overrightarrow{u} - e\overrightarrow{E} \tag{116}$$

$$-e\overrightarrow{E} = m_e \left(-\omega^2 + \omega_0^2 - i\frac{\omega}{\tau}\right)\overrightarrow{u} \tag{117}$$

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t) = -\frac{e}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) \ . \tag{118}$$

Siguiendo los pasos anteriores (hacemos $\overrightarrow{p} = -e\left\langle \overrightarrow{u} \right\rangle$, $\overrightarrow{P} = n_a \overrightarrow{p} = \chi_e \overrightarrow{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\overrightarrow{E}$) llegamos a

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 K_e(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}\right] \ , \tag{119}$$

La primera observación es que se obtiene una "constante" dielectrica que no es precisamente una constante, sino que depende de ω. Obviamente resulta que $\varepsilon(\omega = 0)$ es la permitividad estática que vimos anteriormente. Además ocurre que es fuertemente imaginaria alrededor de $\omega \sim \omega_0$ (resonancia) que representa una absorción (excitación). Separando en parte real e imaginaria:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega) \ , \tag{120}$$

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad \underset{\substack{\tau\to\infty \\ \omega \not\approx \omega_0}}{\longrightarrow} \quad 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \ , \tag{121}$$

$$\frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_0} = \omega_p^2 \frac{\omega/\tau}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} \pi\frac{\omega_p^2}{2\omega_0}\delta(\omega_0 - \omega) \ , \tag{122}$$

En nuestro modelo de osciladores (atómicos) no consideramos electrones libres ($\sigma = 0$), la ecuación (75), queda:

$$k^2 = \mu\varepsilon(\omega)\omega^2 = \mu\varepsilon_1(\omega)\omega^2 + i\mu\varepsilon_2(\omega)\omega^2 \ , \tag{123}$$

y todo resulta igual a (75) ; con ε' y σ' tal que:

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon_1(\omega) \quad \text{y} \tag{124}$$

$$\sigma' \equiv \varepsilon_2(\omega)\omega = \varepsilon_0 \frac{\pi\omega_p^2}{2\omega_0}\delta(\omega_0 - \omega)\omega = \frac{n_a\pi e^2}{2m_e}\delta(\omega_0 - \omega) \tag{125}$$

O sea que, a pesar de no tener electrones libres, la parte imaginaria provee un témino equivalente σ'. La onda se va a desplazar con $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon_1}$, y cuando $\omega \sim \omega_0$, σ sera muy importante y por lo tanto habra una fuerte absorción del medio. Esto se se explica porque los resortes (átomos) absorben la energía, y queda marcado en los espectros de absorción.

En la bibliografia se relaciona a la conductibilidad con la parte imaginaria de la respuesta dieléctrica a partir de (123) asi:

$$\sigma \equiv \omega\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega 4\pi\varepsilon_0}{4\pi}\,\mathrm{Im}[K_e(\omega)]\bigg|_{4\pi\varepsilon_0 = 1} = \frac{\omega}{4\pi}\,\mathrm{Im}[K_e(\omega)] \ . \tag{126}$$

Hay soluciones curiosas de las ecuaciones de Maxwell. Por ejemplo, por simpleza, no consideremos la absorción ($\omega^2 \not\approx \omega_0^2$), entonces la parte real es:

$$\varepsilon \sim \varepsilon_1 \sim \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right]_{\omega=\omega_L} = 0 \ , \quad \text{para} \tag{127}$$

$$\omega_L = \omega_0\sqrt{1 + \omega_p^2/\omega_0^2} \ . \tag{128}$$

En este caso, o sea para $\omega = \omega_L$, tenemos $\overrightarrow{D} = \varepsilon\overrightarrow{E} = 0$, entonces $D = \varepsilon_0\overrightarrow{E}_0 + \overrightarrow{P} = 0$, entonces $\overrightarrow{E}_0\varepsilon_0 = -\overrightarrow{P}$, de (74) y siempre con $\sigma = 0$, $H_0 = 0$, en ese caso se prueba que la onda es longitudinal: $\overrightarrow{E}$ es paralelo $\overrightarrow{k}$ (chequear)

D. GeoElectromagnetismo

Heaviside 1983