FISICA 3. Magnetismo

Verano de 2014

J. E. Miraglia

(Dated: October 26, 2015)

Abstract

LEY DE BIOT Y SAVART.

Fuerza magnética sobre una corriente. Principio de acción y reacción.Efecto Hall. Movimento de una particula en un campo magnético Aplicaciones elementales de la ley de Biot-Savart. Sobre la definicion de μ_0 y la definición del Coulomb

EL POTENCIAL VECTOR $\overrightarrow{A}$

Ley de Gauss y Ampere. Propiedades del potencial vector $\overrightarrow{A}$. Potencial magnético escalar. Relacion entre el dipolo magnético y el momento angular.

EXPANSION MULTIPOLAR

Dipolo magnético. Atomos Hidrogenoides. Relación entre el dipolo magnético y el momento angular. Dipolos magnéticos en campos magnéticos constantes y variables. Campo magnetico terrestre.

LEY DE FARADAY.

INDUCTANCIAS Autoinductancia. El solenoide. Inductancia mutua. Formula de Neuman. Ensamble de bobinas. Bobinas en paralelo y en serie

ENERGIA MAGNETOSTATICA

Energía acumulada por un circuito. Energía acumulada por un ensamble de circuitos.

MATERIALES MAGNETICOS

Modelo simple. Magnetostática macroscópica. Medios LIH. Efecto de bordes: el imán. Energ'ia en presencia de materiales magnéticos. Condiciones de contorno entre dos medios magnéticos.

(**Falta**: incluir figuras y tablas, corregir, poner acentos, materiales diamagn'eticos. efecto Hall, magnetismo terrestre. mejorar $\oiint_{\mathcal{S}}$)

Incluye: manipulación algebraica)

I. LEY DE BIOT Y SAVART (1820)

Repasemos la ley de Coulomb:

$$\overrightarrow{F} = q\ \overrightarrow{E}, \qquad \text{con} \qquad d\overrightarrow{E} = k_e \frac{dq_1(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|^3}\ . \tag{1}$$

(recordemos que la fuerza gravitatoria tiene igual estructura $\overrightarrow{F}_g = m\ \overrightarrow{g}$). En magnetismo es diferente (Gilbert) . La fuerza que sufre una partícula (con carga q y velocidad $\overrightarrow{v}$) en presencia de un campo magnético (o mejor, inducción magnética) $\overrightarrow{B}$ esta dado por:

$$\overrightarrow{F} = q\ \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\ . \tag{2}$$

El campo $\overrightarrow{B}$ es ocasionado por corrientes eléctricas. Se encuentra experimentalmente que un diferencial de circuito $\overrightarrow{dl}_1$ situado en la posición $\overrightarrow{r}_1$ por el que circula una corriente i_1 genera un diferencial de campo magnético $d\overrightarrow{B}$ dado por

$$d\overrightarrow{B} = k_m \frac{i_1 \overrightarrow{dl}_1 \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|^3}\ , \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
k_m &= \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ (exacto!)} \qquad \textbf{constante magnética,} && (4)\\
\mu_0 &= 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Tesla} \times \text{m}}{\text{Ampere}} = \textbf{permitividad magnética del vacío ,} && (5)\\
[B] &= \text{Tesla} = \frac{\text{N} \times \text{seg}}{\text{C} \times \text{m}} = \frac{\text{Kg}}{\text{C} \times \text{m}} = \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} = 10^4 \text{ Gauss ,} && (6)\\
&= \textbf{unidad de campo magnético .} && (7)
\end{aligned}$$

El campo magnético terreste es del orden de 0.5 Gauss. El maximo campo magnético (a la fecha) encontrado en la naturaleza es de un pulsar: 10^{11} Tesla. Se verá posteriormente que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{seg}} = \textbf{velocidad de la luz .} \tag{8}$$

Si el circuito es cerrado (como debe ser) entonces el campo total generado por la espira es

$$\overrightarrow{B} = k_m \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{i_1 \overrightarrow{dl}_1 \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|^3}\ . \tag{9}$$

Notesé que para determinar el campo eléctrico es necesario una sola medición de la fuerza sobre una carga q: $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F}/q$, ya que $\overrightarrow{F} \upuparrows \overrightarrow{E}$, pero en magnetismo se necesitan dos mediciones: una medición $\overrightarrow{F}_1$ de una partícula de carga q que se mueve con $\overrightarrow{v}_1$ y otra medición $\overrightarrow{F}_2$ sobre q que se mueve con $\overrightarrow{v}_2$ tal que (por ejemplo) $\overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{v}_1 = 0$, entonces resulta que (ver Apéndice):

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{(qv_1)^2}\overrightarrow{F}_1 \times \overrightarrow{v}_1 + \frac{(\overrightarrow{F}_2 \times \overrightarrow{v}_2)\cdot \overrightarrow{v}_1}{q(v_1 v_2)^2}\overrightarrow{v}_1 \ , \tag{10}$$

El diferencial de trabajo es: $dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} dt = 0$, ya que de acuerdo a la ley de Biot y Savart $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{v}$. Por lo tanto la fuerza magnética no hace trabajo. Si además del campo magnético hay un campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ entonces la fuerza que recibe la partícula sera simplemente la suma (ppio de superposicion):

$$\overrightarrow{F} = q\ \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} + q\overrightarrow{E}, \qquad \textbf{relación o fuerza de Lorentz .} \tag{11}$$

Tenemos que reconocer 3 tipos de densidad de corriente; lineal (tal como en (9)), superficial o volumétricas como veremos a continuacion.

A. Fuerza magnética sobre una corriente

Ya que una corriente es un conjunto de cargas en movimiento, debido a la relación de Lorentz es natural pensar que el campo magnético $\overrightarrow{B}$ ejerza una fuerza lateral sobre un hilo conductor por el que circula una corriente i. Supongamos un segmento de conductor de longitud dl y area S$\rightarrow 0$ (alambre) por el que circulan cargas electricas $+e$ en el sentido de la corriente convencional. La carga dq encerrada en dicho volumen $dV = S\ dl$, es

$$dq \ = \ eN_e = endV = enS\ dl, \quad \text{donde} \ \ e = \ \textbf{carga del electrón}, \text{ y} \tag{12}$$

$$n \ = \ \frac{N_e}{dV} = \frac{N_e}{S\ dl} = \qquad \textbf{densidad de electrones .} \tag{13}$$

Esos electrones, como vimos, se desplazan con la velocidad de desplazamiento $\overrightarrow{v}_d$, por lo que la ley de Biot y Savart nos dice que en presencia de $\overrightarrow{B}$ sufre un $d\overrightarrow{F} = dq\ \overrightarrow{v}_d \times \overrightarrow{B}$, y reemplazando dq nos queda

$$d\overrightarrow{F} = \underbrace{endV}_{dq}\ \overrightarrow{v}_d \times \overrightarrow{B} = dV \underbrace{en\overrightarrow{v}_d}_{\overrightarrow{J}} \times \overrightarrow{B} = dV\,\overrightarrow{J} \times \overrightarrow{B}\ , \tag{14}$$

y $\overrightarrow{J}$ es la densidad de corriente. Para el conductor lineal podemos hacer

$$dV\ \overrightarrow{v}_d = Sdl\ \overrightarrow{v}_d = Sv_d d\overrightarrow{l}\ , \tag{15}$$

ya que $\overrightarrow{v}_d \upuparrows d\overrightarrow{l}$, hicimos $dl\ \overrightarrow{v}_d = \overrightarrow{dl}\ v_d$, entonces

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{F} &= enSv_d\, d\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B} = id\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B}, \qquad \text{con} & (16)\\ i &= \iint_S d^2s \overrightarrow{J} \cdot \widehat{n} = env_d S\ . & (17) \end{aligned}$$

Hay una tercera posibilidad, y es que la corriente se desplace en una superficie, entonces

$$d\overrightarrow{F} = d^2s\ \overrightarrow{g} \times \overrightarrow{B}\ , \tag{18}$$

donde $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g}(s)$ es la densidad de corriente superficial tal que, la corriente resulta

$$i = \int d\overrightarrow{l}_\perp \cdot \overrightarrow{g} = \int dl_\perp \widehat{n} \cdot \overrightarrow{g}\ , \tag{19}$$

y $l_\perp$ es la longitud transversal del segmento en cuestion y $\widehat{n}$ su perpendicular. Entonces tenemos las 3 alternativas: corrientes volumetricas, superficiales o lineales, vale entonces

$$d\overrightarrow{F} = i_1 \overrightarrow{dl}\ \times \overrightarrow{B}\ \Leftrightarrow d^3r\ \overrightarrow{J} \times \overrightarrow{B} \Leftrightarrow d^2s\ \overrightarrow{g} \times \overrightarrow{B}\ . \tag{20}$$

Como siempre se denota $dV = d^3r$ y $d^2r_1 = d^2s$. Recordemos que $[i]$ =Ampere, $[\overrightarrow{g}]$ =Ampere/m, y $[\overrightarrow{J}]$ =Ampere/m^2. Usaremos la versión mas conveniente en cada caso y luego invocaremos esta equivalencia para generalizarlas. Estructuramenete podemos pasar de uno a otro invocando

$$\oint i\ d\overrightarrow{l} \equiv \iint d^2s\ \overrightarrow{g} \equiv \iiint d^3r\ \overrightarrow{J}\ . \tag{21}$$

Resumiendo

$$\overrightarrow{F} = \left\{ \begin{array}{c} \oint_{\mathcal{C}_1} i_1 \overrightarrow{dl}_1 \\ \iint d^2r_1 \overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}_1) \\ \int d^3r_1 \overrightarrow{J}(\overrightarrow{r}_1) \end{array} \right\} \times \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}_1). \tag{22}$$

También el campo magnético $\overrightarrow{B}$ puede se generado por una corriente lineal (como vimos en Eq.(9)) o por $\overrightarrow{g}$ o por $\overrightarrow{J}$, obteniendosé

$$\overrightarrow{B} = k_m \left\{ \begin{array}{c} \oint_{\mathcal{C}_1} i_1 \overrightarrow{dl}_1 \\ \iint d^2r_1 \overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}_1) \\ \int d^3r_1 \overrightarrow{J}(\overrightarrow{r}_1) \end{array} \right\} \times \frac{(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|^3}. \tag{23}$$

B. Principio de acción y reacción

En electrostática resulto inmediato probar que la ley de Coulomb satisfacía la tercera ley de Newton ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$). En magnetismo no es evidente, hay que trabajarlo. Consideremos la interacción de 2 espiras $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ por las cuales circulan corrientes i_1 e i_2; de acuerdo a Biot y Savart la fuerza que ejerce sobre el circuito 1 le ejerce el 2 es

$$\vec{F}_{12} = i_1 \oint_{\mathcal{C}_1} d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) = i_1 \oint_{\mathcal{C}_1} d\vec{l}_1 \times \overbrace{k_m i_2 \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}}^{\vec{B}_2(\vec{r}_1)}, \tag{24}$$

$$= k_m i_1 i_2 \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}, \quad \text{con} \quad \vec{r}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\ . \tag{25}$$

Por otro lado (1↔2)

$$\vec{F}_{21} = k_m i_1 i_2 \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3}, \quad \text{con} \quad \vec{r}_{21} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{r}_{12}\ . \tag{26}$$

Y no es inmediato ver que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Recurriendo al Apéndice tenemos que

$$d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}) = d\vec{l}_2 (d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}) - (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)\vec{r}_{12}\ . \tag{27}$$

El primer término del RHS (*right hand side*) se anula bajo la integración de $d\vec{l}_1$ en el circuito cerrado $\mathcal{C}_1$, ya que (ver Apéndice)

$$k_m i_1 i_2 \oint_{\mathcal{C}_2} d\vec{l}_2 \underbrace{\oint_{\mathcal{C}_1} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot \overbrace{\vec{r}_{12}}^{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)})}{r_{12}^3}}_{0} = 0. \tag{28}$$

Queda solo el segundo término

$$\vec{F}_{12} = -k_m i_1 i_2 \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \left(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1\right) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \text{cambiando } (1 \longleftrightarrow 2) \tag{29}$$

$$= +k_m i_2 i_1 \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right) \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} = -\vec{F}_{21}, \tag{30}$$

con lo se satisface el principio de acción y reacción ya que $r_{12} = r_{21}$. Notesé la analogía de (29) con la interacción Coulombiana entre dos distribuciones de carga. La generalización a otras distribuciones de corrientes (volumétricas o superficiales) son inmediatas.

C. Movimento de una part'icula en un campo magnético

Sea una partícula de masa m, carga q y velocidad $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(t)$ en un campo magnético $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r})$, sufre una fueza de Lorentz y su movimiento lo describe la ley de Newton

$$\overrightarrow{F} = q\ \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}. \tag{31}$$

Generalmente, la forma de calcular el movimiento, es reducirlo a un sistema de 6 ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. En coordenadas cartesianas resulta

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{m}F_x(v_x, v_y, v_z,\ x, y, z,\ t) \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{1}{m}F_y(v_x, v_y, v_z,\ x, y, z,\ t) \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{m}F_z(v_x, v_y, v_z,\ x, y, z,\ t) \\ \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dz}{dt} = v_z \end{cases}, \tag{32}$$

que se resuelve con un metodo numérico (RK4, por ejemplo) con 6 condiciones iniciales $\overrightarrow{r}(t = t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ y $\overrightarrow{v}(t = t_0) = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$.

Veamos el caso mas sencillo: una partícula cargada q con velocidad $\overrightarrow{v} = v\widehat{e}_x$ que ingresa a un campo magnético constante perpendicular $\overrightarrow{B} = B\widehat{e}_z$. Esta partícula sufre una fuerza central

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} = qvB\widehat{r}, \tag{33}$$

produciendo un movimiento circular uniforme con aceleración central a_c con un radio de giro r y una velocidad angular $\omega = v/r = 2\pi/\tau = 2\pi f$

$$F = qvB = ma_c = m\omega^2 r = m\omega v = m\frac{v^2}{r}, \tag{34}$$

de lo que resulta

$$\omega = \frac{q}{m}B, \tag{35}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\frac{q}{m}B, \quad \textbf{frecuencia de ciclotrón,} \tag{36}$$

$$r = \frac{m}{q}\frac{v}{B}, \quad \textbf{radio de giro,} \tag{37}$$

Se desprende que

- Partículas rápidas (v grande) describen circunferencias con radios grandes.
- Partículas lentas (v pequeñas) describen circunferencias con radios chicos.
- Todas tienen la misma frecuencia (f independiente de la velocidad).
- La relación q/m se llama rigidez magnética (igual a la eléctrica). No se puede separar H_2^+ de He^{++}, por ejemplo.
- Cargas con diferentes signos circulan en sentido contrario.
- La Eq.(37) se puede utilizar para separar isótopos, a mayor masa mayor radio de giro. Por ejemplo se puede separar el ${}^{14}C$ del ${}^{12}C$ y así se datan muestras.
- Electrones ($q = -e$) del orden de 10 eV (L_α) en el campo magnético terrestre (0.5 Gauss) tienen radios del orden de 0.2 metros y emiten con una frecuencia del orden de $10^6 1/\text{seg}$, o sea 1 MegaHertz.

D. Efecto Hall.

Falta teor'ia e incluir tabla

E. Aplicaciones elementales de la ley de Biot-Savart

Hay cuatro casos en que esta ley involucra integrales muy sencillas y sus resultados serán muy útiles. Todos tienen simetría cilíndricas $\{\widehat{e}_\rho, \widehat{e}_\varphi, \widehat{e}_z\}$.

1) Sea un conductor rectilíneo infinito por el que circula una corriente i ($id\overrightarrow{l} = idz\widehat{e}_z$), el campo $\overrightarrow{B}$ a una distancia ρ del conductor resulta ser

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi\rho}\widehat{e}_\varphi \ . \tag{38}$$

[Esta ecuación es una simple aplicación de la ley de Ampere].

2) El campo $\overrightarrow{B}$ en el eje de una espira de radio ρ_1 por el que circula una corriente i ($id\overrightarrow{l} = ir_1 d\varphi\widehat{e}_\varphi$)

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2}\frac{r_1^2}{(z^2 + r_1^2)^{3/2}}\widehat{e}_z \ . \tag{39}$$

A grandes distancias ($z \gg \rho_1$). [será el campo en el eje de un dipolo]

3) El campo $\overrightarrow{B}$ en el eje de un cilindro conductor infinito de radio ρ_1, por el que circula una corriente por unidad de longitud di/dz constante, resulta ser (regla de la mano derecha)

$$\overrightarrow{B}(z) = \mu_0\frac{di}{dz}\widehat{e}_z \ . \tag{40}$$

Si el cilindro está formado por un arrollamiento de un conductor por el que circula i_0 y tiene una densidad de espiras n ($n = N/l$= numero vueltas por undidad de longitud), entonces

$$i = nz\ i_0 \qquad \Longrightarrow \quad \frac{di}{dz} = n\ i_0 \qquad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{B}(z) = \mu_0 n i_0 \widehat{e}_z. \tag{41}$$

[Que resultará ser el campo magnético en el eje de un solenoide (o toroide)].

4) La fuerza que sobre un diferencial $d\overrightarrow{l}_1$ de un conductor rectilineo infinito por el que circula una corrientei_1 $(i_1 d\overrightarrow{l}_1)$, le ejerce otro conductor rectilineo infinito paralelo a una distancia ρ por el que circula una corriente i_2 $(i_2 d\overrightarrow{l}_2)$ es

$$\frac{d\overrightarrow{F}_{12}}{dl_1} = -(d\overrightarrow{l}_2 \cdot d\overrightarrow{l}_1)\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi\rho}\widehat{e}_\rho\ . \tag{42}$$

La fuerza es atractiva si: $d\overrightarrow{l}_2 \cdot d\overrightarrow{l}_1 = 1$ (igual sentido de las corrientes,$\rightrightarrows$), y repulsiva si: $d\overrightarrow{l}_2 \cdot d\overrightarrow{l}_1 = -1$ (sentidos opuestos, $\rightleftarrows$).

F. Sobre la definición de μ_0 y la definición del Coulomb

De la Eq.(42) resulta que la fuerza magnética que recibe un circuito debido a otro es

$$F_m \propto \mu_0 i_1 i_2\ , \tag{43}$$

y hemos definido $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ en MKSC. De la ley de Coulomb sabemos que la fuerza eléctrica sobre una carga que interactúa con otra es

$$F_e \propto \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_0}, \tag{44}$$

ε_0 resulto ser 8.85 10^9 en MKSC que definia la unidad de carga: el Coulomb. Veremos mas adelante que ε_0 y μ_0 estan relacionados a la velocidad de la luz c según

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{45}$$

En términos de la unidad Coulomb [C], las ecuaciones (43) y (44)

$$N \ \propto \ \mu_0 C^2\ , \qquad \text{y} \tag{46}$$

$$N \ \propto \ \frac{1}{\varepsilon_0} C^2. \tag{47}$$

Este es el procedimiento seguido en el MKSC.

Si hubiesemos elegido otro valor de μ_0 llamemoslo $\mu_0' = k\mu_0$ esto implicará definir otra unidad de carga; llamemosla C'. Como la fuerza esta expresada en una magnitud mecánia N (Newtons), resulta entonces de (46)

$$\begin{aligned}
N &\propto \mu_0 C^2 = \mu_0' C'^{\,2} \quad \rightarrow C = \sqrt{k}\; C' \quad , \text{y} && (48)\\
c &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0' \mu_0'}} \;\rightarrow \varepsilon_0' = \frac{\varepsilon_0}{k}\,, \quad \text{reempl. en (46)} && (49)\\
N &\propto \frac{1}{\varepsilon_0'} C'^{\,2} = \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{C}{\sqrt{k}}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} C^2, && (50)
\end{aligned}$$

Entonces el camino real es contrario al que presentamos: primero se define μ_0 y luego la unidad Coulomb. Hay otra forma que es el sistema gaussiano. Parte de la ley de Coulomb de modo tal que $4\pi\varepsilon_0' = 1$ y determina en consecuencia μ_0. Entonces el valor de k$_m$ cambia

$$k_m' = \frac{\mu_0'}{4\pi} = \frac{\mu_0' \;\; \varepsilon_0'}{\underbrace{4\pi\varepsilon_0'}_{1}} = \mu_0' \varepsilon_0' = \frac{1}{c^2}. \tag{51}$$

Otras variables mecánicas como la potencia Watts=Vots×Amperes tambi'en es independiente de la unidad de carga.

II. EL POTENCIAL VECTOR $\overrightarrow{A}$

Vimos que el campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ se puede expresar en términos del potencial escalar $V(\overrightarrow{r})$

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}}\left(k_e \int d^3r' \;\frac{\rho(r')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}\right) \; = -\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} V(\overrightarrow{r})\;, \tag{52}$$

El potencial de $\overrightarrow{B}$ no es un escalar, sino un vector $\overrightarrow{A}$ tal que

$$\overrightarrow{B} \;=\; \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\;, \qquad \text{con}, \tag{53}$$

$$\overrightarrow{A}\,(\overrightarrow{r}) \;=\; k_m \left\{ \begin{array}{l} \oint i d\overrightarrow{l}\,' \\ \iint d^2s' \;\overrightarrow{g}\,(\overrightarrow{s}\,') \\ \int d^3r' \overrightarrow{J}\,(\overrightarrow{r}\,') \end{array} \right\} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}\,'|}\;, \tag{54}$$

La demostración es inmediata. Usando la identidad (ver Apéndice)

$$\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \times \frac{\overrightarrow{J}\,(r')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}\,'|} = \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}\,'|}\underbrace{\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \times \overrightarrow{J}\,(r')}_{0.} - \overrightarrow{J}\,(r') \times \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}\,'|}\;, \tag{55}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -k_m \int d^3r' \vec{J}(r') \times \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}, \tag{56}$$

$$= k_m \int d^3r' \; \vec{J}(r') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \; . \tag{57}$$

La elección de $\vec{A}$ según (54-**??**) fue arbitraria. Por ejemplo, si hubiesemos elegido $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{r}$, entonces $\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + 0 = \vec{B}$. Una propiedad partícular de $\vec{A}$ definida en (54), es que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Se prueba con la siguientes identidades. Compactemos $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}$ y $\vec{\nabla}' = \vec{\nabla}_{\vec{r}'}$, entonces resulta(en el Apéndice se demuestra la ecuación (60), acá repetimos el cáculo)

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}')}_{0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \; . \tag{58}$$

Por otro lado,

$$\vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}')}_{0,\ cte.\ estac} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \; , \tag{59}$$

donde hemos usado el hecho que tenemos un estado estacionario: $\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = 0$ (estamos en magnetostática). Usando la propiedad: $\vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = - \vec{\nabla}' |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$, tenemos la identidad del Apéndice

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \qquad \text{luego,} \tag{60}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = k_m \int d^3r' \; \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -k_m \int d^3r' \; \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \; , \tag{61}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -k_m \iint_{\bigcirc\infty} da' \; \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \hat{n} \; = 0 \; , \tag{62}$$

donde hemos usado el hecho de que $\vec{J}(\vec{r}')$ en el infinito es nulo. Volveremos mas adelante cuando discutamos el gauge de Coulomb.

A. Ley de Gauss y Ampere

Nos preguntamos ahora las propiedades del campo magnético como campo vectorial: pasaremos a calcular la divergencia y el rotor.

La divergencia es nula: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Su demostración es inmediata, ya que: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ tal como lo vimos en el Apéndice. Esto implica que no hay fuentes ni sumideros que generen $\vec{B}$. Las líneas de $\vec{B}$ son cerradas. Como veremos formalmente mas adelante, no existen monopolos magnéticos. Una forma alternativa de la ley de Gauss es usar el teorema del gradiente,

$$\int_{\mathcal{V}} d\vec{r}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \oiint_{\mathcal{S}} d^2s\ \vec{B} \cdot \hat{n} = 0 \qquad \textbf{ley de gauss del magnetismo .} \tag{63}$$

Si, en analogía con la electricidad, llamamos

$$d\phi_B = d^2s\ \vec{B} \cdot \hat{n}\ = \textbf{diferencial de flujo magnético,} \tag{64}$$

resulta que la integral sobre una superficie cerrada ϕ_B (Ec.(63)) es nula. Recordemos que en el caso eléctrico nos daba la carga neta encerrada. Calculemos ahora el rotor

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}\ , \tag{65}$$

en nuestro caso $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$, por lo que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}\ =\ -\nabla^2 \vec{A} = -k_m \int d^3r' \vec{J}(\vec{r}\,') \overbrace{\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}^{-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')} = 4\pi k_m \vec{J}(\vec{r})\ , \tag{66}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}\ =\ \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \qquad\qquad \textbf{ley de Ampere .} \tag{67}$$

Sin embargo la forma mas útil de la ley de ampere es la expresion integral,

$$\iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)\ =\ \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{J}(\vec{r})\ , \tag{68}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{B}\ =\ \mu_0 i_{enc}\ , \tag{69}$$

donde $\mathcal{C}$ es la frontera de $\mathcal{S}$, e i_{enc} es la corriente eléctrica que circula a travez de $\mathcal{C}$. Esta formula será tan util como la de Gauss para la electricidad. [En realidad Gauss en electricidad es mas versatil, ya que puede aplicarse a problemas con simetrías planas, cilíndricas y esféricas, mientras que Ampere solo funciona bien para simetrías cilíndricas]. Resumimos, las ecuaciones de la magnetostática

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\ =\ 0, \quad \text{ó} \quad \oiint_{\mathcal{S}} d^2s\ \vec{B} \cdot \hat{n} = 0, \qquad \textbf{ley de gauss del magnetismo,} \tag{70}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}\ =\ \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad \text{ó} \quad \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 i_{enc}, \quad \textbf{ley de Ampere.} \tag{71}$$

B. Aplicaciones elementales de la ley de Ampere

Hay casos en que esta ley involucra integrales muy sencillas y sus resultados son muy útiles. Todos tienen simetría cilíndricas $\{\widehat{e}_\rho, \widehat{e}_\varphi, \widehat{e}_z\}$ y ya fueron calculados formalmente a partir de la ley de Biot-Savart.

1) Haciendo una circulaci'on alrededor de un conductor rectilíneo infinito por el que circula una corriente i ($id\overrightarrow{l} = idz\widehat{e}_z$), se encuentra que el valo de $\overrightarrow{B}$ a una distancia ρ del conductor resulta ser (ver (31))

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi\rho}\widehat{e}_\varphi \ .$$

2) Haciendo una circulación alrededor de un solenoide o toroide se encuentra que el valor de $\overrightarrow{B}$ en su eje resulta ser (ver (41)

$$\overrightarrow{B}(z) = \mu_0 n i_0 \widehat{e}_z, \quad \text{con} \quad n = \frac{di}{dl} = \frac{N}{L} = \text{ densidad de espiras}$$

Usaremos mucho esta formula. Es el equivalente magnético al campo eléctrico dentro de un capacitor de placas paralelas. El capacitor es a la electricidad como el solenoide lo es al magnetismo; son elementos que producen campos eléctricos y magnéticos constantes dentro de cubos y cilindros, respectivamente.

C. Propiedades del potencial vector $\overrightarrow{A}$

De (66) y (62) tenemos las dos propiedades principales de $\overrightarrow{A}$.

$$\nabla^2\overrightarrow{A} = -\mu_0\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r}), \quad \text{y} \quad \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} = 0 \quad \text{(gauge de Coulomb)} \ . \tag{72}$$

El campo eléctrico tiene una libertad (obvia) y es que si tomamos $V' = V + cte$, entonces $\overrightarrow{E}' = -\overrightarrow{\nabla}V' = -\overrightarrow{\nabla}V - \overrightarrow{\nabla}cte = -\overrightarrow{\nabla}V = \overrightarrow{E}$. Lo cual ratifica el hecho que lo importante es la diferencia de potencial. El campo magnético tiene una libertad de gauge. Supongamos que partamos de nuestro gauge de Coulomb tal que $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} = 0$, podemos construir cualquier otro potencial vector $\overrightarrow{A}_\lambda$ tal que:

$$\overrightarrow{A}_\lambda = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\lambda \ , \tag{73}$$

donde λ es una función arbitraria. Este potencial $\overrightarrow{A}_\lambda$ produce el mismo valor de $\overrightarrow{B}$, ya que

$$\overrightarrow{B}_\lambda = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}_\lambda = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A} + \underbrace{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{\nabla}\lambda}_{0} = \overrightarrow{B} \ . \tag{74}$$

Esta propiedad puede usarse para beneficio del cálculo. Hay expresiones de λ tal que producen una expresión de $\overrightarrow{A}_\lambda$ mas conveniente.

Aún asi, el gauge de Coulomb NO es unico. Hay infinidades de expresiones tal que sumadas a $\overrightarrow{A}$ mantienen la condición del gauge de Coulomb. Llamando $\overrightarrow{A}_\lambda = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\lambda$

$$0 = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}_\lambda = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\lambda) = \underbrace{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}}_{0} + \nabla^2\lambda = \nabla^2\lambda = 0 \; , \tag{75}$$

con lo cual tengo una libertad de elegir λ tales que $\nabla^2\lambda = 0$. Por ejemplo, también trabajaríamos en el gauge de Coulomb si elejimo: $\lambda = \; x^2 - y^2$, ya que $\nabla^2\lambda = 2 - 2 = 0$. En este curso solo trabajaremos en el gauge de Coulomb mas simple.

D. Potencial magnético escalar

La relación entre el campo magnético $\overrightarrow{B}$ y la fuente $\overrightarrow{J}$ esta dado por $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{J}$. Si estamos interesados en espacios distantes de las fuentes, $\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r}) = 0$, la ecuación se reduce a $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = 0$. Al igual que el campo eléctrico ($\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = 0$), podemos pensar que existe un potencial escalar magnético V_m tal que

$$\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{\nabla} V_m \; . \tag{76}$$

Si además aplicamos la ley de Gauss, $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$, resulta que V_m satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V_m = 0 \; . \tag{77}$$

Por lo tanto, lejos de las fuentes los campos eléctricos y magnéticos son símiles matemáticos Pueden usarse los mismos códigos numéricos (¡hay que tener cuidado con las condiciones de contorno!)

III. EXPANSION MULTIPOLAR

El objetivo es determinar la expresión del campo magnético a grandes distancias en relación a las dimensiones de las fuentes. Seguiremos el mismo camino que en la expansión multipolar eléctrica. Usando las expansiones del Apéndice para grandes distancias se muestra que la expresión del potencial vector a gran distancia ($r \to \infty$) esta dado por

$$\lim_{r\to\infty} \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = \lim_{r\to\infty} k_m \oint \frac{i d\overrightarrow{l}'}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}, \tag{78}$$

$$= k_m \oint i d\overrightarrow{l}' \left[\frac{1}{r} + \frac{\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\left\{3(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{r}')^2 - r'^2 r^2\right\} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)\right], \tag{79}$$

$$= k_m \frac{i}{r}\oint d\overrightarrow{l}' + k_m \frac{i}{r^3}\oint d\overrightarrow{l}' \; (\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{r}') + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \; , \tag{80}$$

donde r es mucho mayor que las dimensiones del cuerpo en cuestión. Usando las ecuaciones del Apéndice tenemos

$$\oint d\overrightarrow{l}' = 0, \qquad \textbf{no hay monopolo magnético ,} \tag{81}$$

$$\oint_{\mathcal{C}'} d\overrightarrow{l}' \overbrace{(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{r}')}^{f(\overrightarrow{r}')} = \iint_{\mathcal{S}'} d^2s' \; \widehat{n}' \times \underbrace{\overrightarrow{\nabla}' \overbrace{(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{r}')}^{f(\overrightarrow{r}')}}_{\overrightarrow{r}} = \iint_{\mathcal{S}'} d^2s \; \widehat{n} \times \overrightarrow{r} \; , \tag{82}$$

donde $\mathcal{C}'$ es la frontera de $\mathcal{S}'$ siendo $\widehat{n}'$ el versor perpendicular definido segun la regla de la mano derecha. Reemplazando

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) \quad \underset{r\to\infty}{\rightarrow} k_m \frac{1}{r^3}\left(i \iint_{\mathcal{S}'} d^2s' \; \widehat{n}\right) \times \overrightarrow{r} = k_m \frac{\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{r}}{r^3} \; , \tag{83}$$

$$\overrightarrow{m} = i \iint_{\mathcal{S}'} d^2s' \; \widehat{n} = iS\widehat{n} \qquad \textbf{dipolo magnético .} \tag{84}$$

La ecuación (81) prueba que no hay monopolo magnético. Un resultado previsible ya que $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B} = 0$. La contribución mas importante a grandes distancias es entonces el dipolo magnético que resulta ser simplemente la corriente i por el area de la espira S en la dirección del versor perpendicular $\widehat{n}$. Hay también otra expresión equivalente que se relaciona con la de las orbitas de Kepler (que se usó para demostrar la velocidad aerolar constante)

$$\overrightarrow{m} = \frac{i}{2}\oint \overrightarrow{r}' \times d\overrightarrow{l}'. \tag{85}$$

A. Dipolo magnético

Una vez determinado el potencial vector $\overrightarrow{A}$, del dipolo es inmediato obtener $\overrightarrow{B}$ a traves de la definición

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\times\left(k_m \frac{\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{r}}{r^3}\right) = k_m\left[-\left(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\frac{\overrightarrow{r}}{r^3} + \overrightarrow{m}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\right)\right] \; . \tag{86}$$

Usando el Apéndice

$$\left(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}=\frac{\overrightarrow{m}}{r^3}-3\frac{(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{r})}{r^5}\overrightarrow{r}\ ,\qquad \text{y}\qquad \overrightarrow{\nabla}\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}=0\ ,\quad \text{resulta}\ , \tag{87}$$

$$\overrightarrow{B}=\frac{k_m}{r^3}\left[3\left(\overrightarrow{m}\cdot\widehat{r}\right)\widehat{r}-\overrightarrow{m}\right]\ . \tag{88}$$

Esta expresión es igual a la del dipolo eléctrico haciendo $\overrightarrow{B}\to\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{m}\to\overrightarrow{p}$ y obviamente $k_m\to k_e$. Esta analogía matemática nos permite inferir su potencial magnético escalar es

$$V_m=k_m\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{r}}{r^3}\ ,\quad \text{y}\quad \overrightarrow{B}=-\overrightarrow{\nabla}V_m\ . \tag{89}$$

1. *Atomos Hidrogenoides*

Como una aplicación, calculemos el dipolo magnético de un átomo hidrogenide modelizado como un movimiento circular uniforme de un electrón de carga e y masa m_e que se mueve en una orbita circular atraída por la carga central Ze. Si $\omega=2\pi f$ es la velocidad angular, y f la frecuencia, entonces podemos interpretar la corriente eléctrica convencional como

$$i=ef=e\frac{\omega}{2\pi}=\frac{e}{2\pi}\frac{v}{r}\ , \tag{90}$$

donde v es la velocidad tangencial y r el radio de rotación. La velocidad v puede obtenerse con la ley de Newton sabiendo que la fuerza central esta determinada por la ley de Coulomb

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}=m_ea_r=m_e\frac{v^2}{r}\quad\Longrightarrow v=\sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0m_er}}\ . \tag{91}$$

Reemplazando (91) en (90) podemos calcular el dipolo magnético

$$\overrightarrow{m}=iS\widehat{n}=\underbrace{\frac{e}{2\pi}\frac{1}{r}\overbrace{\sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0m_er}}}^{v}}_{i}\underbrace{\pi r^2}_{S}\ \widehat{n}=\frac{e^2}{2}\sqrt{\frac{Zr}{4\pi\varepsilon_0m_e}}\ \widehat{n}\ . \tag{92}$$

En MKSC, $Z=1$ (hidrógeno), $e=1.6\times10^{-19}$, $m_e=9.1\times10^{-31}$, $r=5.1\times10^{-11}$, $\varepsilon_0=8.9\times10^{-12}$, resulta que $m_H\simeq9.1\times10^{-24}$ ampere$\times$m^2. El valor experimental es el magnetón de Bohr y resulta ser 9.27400915×10^{-24}.

B. Relación entre el dipolo magnético y el momento angular

Sigamos con el dipolo magnético encontrado anteriormente. Este dipolo es creado por el movimiento **orbital** del electrón girando alrededor del núcleo. En nuestro modelo, el giro del electrón tiene un cierto momento angular $\overrightarrow{l}$ orbital, dado por

$$\overrightarrow{l}_{orb} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} = rm_e v\widehat{n} = rm_e\sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}}\widehat{n} = \frac{2m_e}{e}\overrightarrow{m}; \quad \text{o} \tag{93}$$

$$\overrightarrow{m}_{orb} = \frac{e}{2m_e}\overrightarrow{l}_{orb} . \tag{94}$$

Esta relación es mas general; tambien se verifica para el caso de r'igidos cargados rotando. En este caso el movimiento es de **spin** (rotación sobre su mismo eje). A los efectos prácticos consideremos una esfera hueca (modelo clásico muy primitivo para el electrón). Supongamos una esfera hueca de radio R, carga e y que rota a una velocidad angular $\overrightarrow{\omega} = 2\pi f\widehat{\omega}$. La densidad de carga será $\sigma = dq/d^2s = e/(4\pi R^2)$. Una faja (una espira) ubicada en un ángulo polar entre θ y $\theta + d\theta$, tiene una longitud $l = 2\pi r = 2\pi R\sin\theta$, y un ancho de arco $da = Rd\theta$ por lo la carga en dicha espira (o faja) será:

$$dq = \sigma d^2s = \overbrace{\frac{e}{4\pi R^2}}^{\sigma}\overbrace{\underbrace{2\pi R\sin\theta}_{l}\ \underbrace{Rd\theta}_{da}}^{d^2s}, \qquad \text{y la corriente es} \tag{95}$$

$$i(\theta) = \frac{dq}{dt} = dq\ f = \underbrace{\frac{e}{4\pi R^2}2\pi R\sin\theta Rd\theta}_{dq}\ \underbrace{\frac{\omega}{2\pi}}_{f} = \frac{e\omega}{4\pi}\sin\theta d\theta . \tag{96}$$

Esa espira tiene un (diferencial) de dipolo magnético de spin dado por

$$d\overrightarrow{m}_{spin} = iS\widehat{\omega} = \underbrace{\frac{e\omega}{4\pi}\sin\theta d\theta}_{i(\theta)}\ \underbrace{\pi(R\sin\theta)^2}_{S(\theta)}\widehat{\omega} = \frac{eR^2}{4}\sin^3\theta\ d\theta\ \overrightarrow{\omega} . \tag{97}$$

Sumando todas las posible espiras (integrando θ entre 0 y π), resulta:

$$\overrightarrow{m}_{spin} = \int_0^\pi d\overrightarrow{m}_{spin} = \frac{eR^2}{4}\frac{4}{3}\overrightarrow{\omega} = \frac{eR^2}{3}\overrightarrow{\omega} . \tag{98}$$

Sabiendo que el momento de inercia de la esfera hueca usada es $I = (2/3)\, m_e R^2$, y que el momento angular de un rigido es $\overrightarrow{L} = I\overrightarrow{\omega}$, entonces:

$$\overrightarrow{m}_{spin} = \frac{e}{2m_e}\overrightarrow{L} . \tag{99}$$

Y nuevamente tenemos la misma relación en este caso para una rotación de la esferá hueca sobre su eje: spin. [Notemos que si consideramos el radio clásico del electrón que llamamos radio de Thompson $R = 2.81 \times 10^{-15}$ m, el ecuador del r'igido tendr'ia que ir a velocidades mas rápidas que de la luz (crítica de Lorentz)]. Estas relaciones serán muy importante en mecánica cuántica en relación al efecto Zeeman.

C. Dipolo magnético en un campo magnético

Comenzemos viendo que efecto tiene un campo magnético **constante** $\overrightarrow{B}$ sobre un dipolo. $\overline{m}$. En electricidad trabajamos mas artesanalmente para entender la física. Para variar, aqui seremos mas expeditivos y recuriremos a las matemáticas. La fuerza total sera

$$\overrightarrow{F} = \oint d\overrightarrow{F} = \oint i d\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B}\Big|_{\overrightarrow{B}=cte} = i\underbrace{\left(\oint d\overrightarrow{l}\right)}_{0} \times \overrightarrow{B} = 0 \ , \tag{100}$$

tal como en el caso eléctrico. De cualquier manera sufre un torque, ya que el dipolo debe tratarse como un rígido,

$$\overrightarrow{\tau} = \oint \overrightarrow{r} \times d\overrightarrow{F} = \oint \overrightarrow{r} \times \overbrace{\left(i d\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B}\right)}^{d\overrightarrow{F}}; \ \text{ segun el Apéndice} \ , \tag{101}$$

$$= i\oint_C d\overrightarrow{l}\overbrace{(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{B})}^{f(\overrightarrow{r})} - i\oint \overrightarrow{B}(d\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{r}) = i\iint_S d\overrightarrow{s} \times \underbrace{\overrightarrow{\nabla}\overbrace{(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{B})}^{f(\overrightarrow{r})}}_{\overrightarrow{B}} - i\overrightarrow{B}\underbrace{\oint d\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{r}}_{0} \ , \tag{102}$$

$$\overrightarrow{\tau} = i\iint_S d\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{B} \ , \tag{103}$$

exactamente similar al caso eléctrico.

Sigue la energía potencial U de un dipolo en un campo magnético constante. Se demuestra exactamente igual al caso eléctrico,

$$U = \int_0^\theta dU = \int_0^\theta \overrightarrow{\tau} \cdot d\overrightarrow{\theta} = \int_0^\theta (\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{B}) \cdot d\overrightarrow{\theta} = -\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{B} \qquad \textbf{energía potencial .} \tag{104}$$

Por ultimo tenemos que determinar la fuerza que sufre un dipolo en un campo magnético

variable $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r})$ externo. De vuelta, el álgebra es totalmente equivalente al caso eléctrico

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\nabla}U = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B} + (\overrightarrow{B}\cdot\underbrace{\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{m}}_{0} + \overrightarrow{m}\times(\underbrace{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}}_{0}) + \overrightarrow{B}\times(\underbrace{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{m}}_{0}) \quad (105)$$

$$\overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{B} = \left(m_x\frac{\partial}{\partial x} + m_y\frac{\partial}{\partial y} + m_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(B_x, B_y, B_z) \ , \quad (106)$$

en total analogía con la electricidad. Hemos considerado en (105) que $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{J} = 0$, invocando que no hay corrientes lejos de la fuente de $\overrightarrow{B}$.

Si pensamos que el campo magnético externo $\overrightarrow{B}$ es generado por un bobinado de espiras al que le podemos asignar un dipolo total primario $\overrightarrow{M} = \Sigma_i m,$. al actuar sobre $\overrightarrow{m}$, lo atraerá o repelerá exactamente igual a los casos eléctricos vistos.

D. Campo magnético terrestre

Falta. Planetas. Corrientes en el magma. declinanci'on magnetica. Bahia de Hudson.

IV. LEY DE FARADAY(1831)

Sea una espira (circuito) $\mathcal{C}$ el limite (contorno) de una superficie abierta $\mathcal{S}$ y $\widehat{n}$ su versor normal a la superficie. En ausencia de cualquier campo ni batería intercaladas en el circuito, resulta obvio que la corriente que circula por la espira es nula. Si a esa espira la atraviesa ahora un campo magnético $\overrightarrow{B}$ podemos decir que encierra un flujo magnético ϕ_B dado por

$$\phi_B = \iint_{\mathcal{S}} d^2s\ \overrightarrow{B}\cdot\widehat{n}\ . \quad (107)$$

La ley de Faraday dice que el cambio temporal del flujo magnético produce una fuerza electromotriz (fem) en el circuito, matemáticamente

$$\varepsilon = -\frac{\partial\phi_B}{\partial t}\ . \quad (108)$$

Y es un hecho experimental (una ley) que se suma a las dos anteriores: la ley de Coulomb y la de Biot y Savart. Es la primera vez que hablamos del tiempo en el contexto de esta materia. No se puede demostrar de *ab initio* a pesar que en muchos casos se ratifica a partir de la ley de la conservación de la energía. El signo menos nos indica que la fem se opone a la variación de flujo y este efecto se conoce como la ley de Lenz. Físicamente una variación temporal del flujo se genera un campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ cuya integral curvilinea cerrada nos da la fem (como vimos en electricidad)

$$\varepsilon = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} \ . \tag{109}$$

Esta fem genera una corriente eléctrica tal como una batería pero no esta localizada sinó que está desparramada a lo largo del circuito. Reemplazando (109) en (107) resulta

$$\varepsilon \ = \ \oint \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint d^2s \ \overrightarrow{B} \cdot \widehat{n} \ , \ \text{usando Stokes,} \tag{110}$$

$$\iint d^2s \ \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} \cdot \widehat{n} \ = \ -\iint d^2s \ \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} \cdot \widehat{n} \ . \tag{111}$$

Como en ppio vale para todo circuito podemos generalizarla, con la siguiente relacion

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} \ . \tag{112}$$

Esta ecuación generaliza $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = 0$ válida para los casos estacionarios donde $\partial \overrightarrow{B}/\partial t = 0$.

Este campo electrico no tiene origen en una diferencia de potencial tal que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V$, sinó en $\partial \overrightarrow{A}/\partial t$. Veamos, de (110)

$$\varepsilon \ = \ \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint d^2s \underbrace{\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}}_{\overrightarrow{B}} \cdot \widehat{n} \ , \ \ \text{usando Stokes,} \tag{113}$$

$$= \ -\frac{\partial}{\partial t}\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{l} = \oint_{\mathcal{C}} \left(-\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}\right) \cdot d\overrightarrow{l} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} \ . \tag{114}$$

Si ademá tuviésemos baterías, entonces

$$\overrightarrow{E} = -\nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} \ . \tag{115}$$

Detalles del cálculo. Dada una espira cerrada $\mathcal{C}$,

- Se define $d\overrightarrow{l}$ y $\widehat{n}$ según la regla de la mano derecha.
- Se calcula el flujo ϕ_B según la ecuación (107).
- Si hay N espiras entonces se consideran todas las superficies (si son iguales entonces $\phi_B \rightarrow N\phi_B$).
- La fem ε se cálcula según (108).
- Si $\varepsilon > 0$, el sentido de circulación es paralelo a $d\overrightarrow{l}$, o sea: $\overrightarrow{\varepsilon} \rightrightarrows d\overrightarrow{l}$.
- Si $\varepsilon < 0$, el sentido de circulación es antiparalelo a $d\overrightarrow{l}$, o sea: $\overrightarrow{\varepsilon} \rightleftarrows d\overrightarrow{l}$.

Tres casos son siempre presentados. Se hace variar el flujo ϕ_B según varie B, S, ó $\widehat{B}\cdot\widehat{S}$, a saber:

1) La corriente inducida en un espira por un imán que se acerca o se aleja, creando un $B(t)$, resulta un acople entre el encendido de un primario y la inducción en un circuito secundario.

2) La corriente eléctrica inducida en una espira que se mueve en un semiespacio magnetizado de modo tal que produce una $Area(t)$ (aquí es interesante verificar la conservación de la energía).

3) Generador de tensión variable (alternador). Una espira que se mueve mecanicamente en un campo magnético tal que $\widehat{B}\cdot\widehat{S}=\cos(\omega t)$.

V. INDUCCION ELECTROMAGNETICA

A. Autoinductancia

Sea un circuito $\mathcal{C}_1$ por el que circula una corriente $i_1(t)$, según la ley de Biot-Savart genera un campo magnético $\overrightarrow{B}(t)$

$$\overrightarrow{B}=k_m i_1\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{\overrightarrow{dl}_1\times(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_1)}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_1|^3}\ , \tag{116}$$

y produce un flujo

$$\phi=\iint d^2s\ \overrightarrow{B}\cdot\widehat{n} \tag{117}$$

La ley de Faraday nos indica que tambien aparece una fem ε cuando hay una variación del flujo propio ϕ ya sea por una variación del la corriente $i_1(t)$ o por una variación de la forma de la espira $\mathcal{C}_1(t)$. A este fenómeno se lo llama autoinducción. Suponiendo un circuito rígido y que ϕ sólo depende temporalmente de i_1, tenemos

$$\varepsilon=-\frac{d\phi}{dt}=-\frac{d\phi}{di}.\frac{di}{dt}=-L\frac{di}{dt}\ , \tag{118}$$

donde hemos definido la autoinductancia L tal que

$$L=\frac{d\phi}{di},\ \ \textbf{autoinductancia .} \tag{119}$$

La unidad es el Henry

$$[L]=\frac{\text{Weber}}{\text{Ampere}}=\frac{\text{Volt}\times\text{seg}\times\text{seg}}{\text{Coulomb}}=\text{Henry}\ . \tag{120}$$

El Henry, tanto como el Faradio, es una magnitud muy grandes para los elementos normalmente usados (el mili o mircoHenry son mas difundidos). Para nuestro caso siempre podemos escribir

$$\phi = Li \ , \tag{121}$$

en analogía con $V = Ri$.

1. El Solenoide

Veamos un Solenoide formado por N espiras arrolladas sobre un cilíndro de area A y longitud l por el que circula una corriente $i(t)$. Approximando a un cilindro infinito podemos calcular el campo magnético en el eje y resulta ser, $B = \mu_0 n i$, donde n es la densidad de espiras por unidad de longitud $n = N/l$. El flujo es

$$\phi \ = \ \iint d^2s \ \overrightarrow{B} \cdot \widehat{n} \cong NBS = N\mu_0 niS = nl \ \mu_0 niS = \mu_0 n^2 Sl \ i \ \ , \text{ entonces,} \tag{122}$$

$$L \ = \ \frac{d\phi}{dt} = \mu_0 n^2 Sl \quad (\text{medio} \times \ \text{geometría}). \tag{123}$$

B. Inductancia mútua.

Consideremos dos circuitos proximos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ por el que circulan orrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ las fem inducidas son entonces

$$\varepsilon_j = -\frac{d\phi_j}{dt}, \quad j = 1, 2, \tag{124}$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son los flujos encerrados por los circuitos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ respectivamente. Si los circuitos estan proximos el campo $\overrightarrow{B}_1$ generado por $i_1(t)$ alcanza la superficie $\mathcal{C}_2$ y por lo tanto suma al flujo generado por $i_1(t)$, y viceversa. Podemos escribir

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}, \qquad \text{y} \qquad \phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} \ , \tag{125}$$

donde ϕ_1 es flujo total sobre el circuito ¨1¨, ϕ_{11} es el flujo parcial que ocaciona $i_1(t)$ en $\mathcal{C}_1$ y ϕ_{12} es el flujo que ocacionado por $\overrightarrow{B}_2$ ocacionado por $i_2(t)$ en $\mathcal{C}_1$. Y en forma similar se lee ϕ_2. Podemos escribir entonces

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}(\phi_{11}+\phi_{12}) = -\frac{d\phi_{11}}{dt} - \frac{d\phi_{12}}{dt} , \tag{126}$$

$$= -\frac{d\phi_{11}}{di_1}\frac{di_1}{dt} - \frac{d\phi_{12}}{di2}\frac{di_2}{dt} = L_{11}\frac{di_1}{dt} - L_{12}\frac{di_2}{dt} , \tag{127}$$

$$L_{ij} = \frac{d\phi_{ij}}{di_j} , \qquad \textbf{coeficiente de inducción mutua.} \tag{128}$$

Podemos escribir entonces

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \times \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} . \tag{129}$$

Su generalización a muchas espiras es obvia. En forma matricial, podemos escribir $\overline{\varepsilon} = \overline{\overline{L}} \times (d/dt)\ \overline{i}$

1. La formula de Neuman

Vamos a probar que $L_{ij} = L_{ji}$. Consideremos el caso anterior de 2 bobinas interactuando a traves del flujo. Partiendo de las definiciones

$$L_{12} = \frac{d}{di_2}\phi_{12} = \frac{d}{di_2}\iint_{\mathcal{S}_1} d^2s_1\ \overrightarrow{B}_2(\overrightarrow{s}_1)\cdot\widehat{n} = \frac{d}{di_2}\iint_{\mathcal{S}_1} d^2s_1 \left(k_m i_2 \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{\overrightarrow{dl}_2 \times (\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2)}{|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2|^3}\right)\cdot\widehat{n} , \tag{130}$$

usando la indentidad del Apéndice

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \frac{\overrightarrow{dl}_2 \times (\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2)}{|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2|^3} = \overrightarrow{\nabla}_1 \times \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{\overrightarrow{dl}_2}{|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2|} , \tag{131}$$

reemplazando

$$L_{12} = \frac{d}{di_2} i_2 k_m \iint_{\mathcal{S}_1} d^2s_1 \left(\overrightarrow{\nabla}_1 \times \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{\overrightarrow{dl}_2}{|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2|}\right)\cdot\widehat{n} = k_m \iint_{\mathcal{S}_1} d^2s_1 \overrightarrow{\nabla}_1 \times \left(\oint_{\mathcal{C}_2} \frac{\overrightarrow{dl}_2}{|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2|}\right)\cdot\widehat{n} , \tag{132}$$

y usando el teorema de Stokes llegamos a

$$L_{12} = k_m \oint_{\mathcal{C}_1}\oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\overrightarrow{l}_1 \cdot d\overrightarrow{l}_2}{|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2|} . \tag{133}$$

Esta es la ecuación de Neuman para calcular la inductancia mútua. Como esta expresión es la misma ante la inversión $1 \Leftrightarrow 2$ entonces podemos deducir que $L_{12} = L_{21}$. Esta expresión tambien puede usarse para calcular la autoinducci'on, o sea

$$L_{11} = k_m \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{d\overrightarrow{l}'_1 \cdot d\overrightarrow{l}_1}{|\overrightarrow{r}'_1 - \overrightarrow{r}_1|} \,. \tag{134}$$

Hay que tener cuidado de dar ciertos anchos a los conductores para remover la singularidad en el denominador y luego tender el ancho a cero.

C. Ensamble de bobinas

La inductancia es el tercer elemento circuital que vemos (los anteriores fueron el capacitor (C) y la resistencia (R)). Como siempre podemos conectarlas en serie o en paralelo.

Consideremos por ahora que estan muy lejos una de otra de modo tal que no haya inducción mutua. Si conectamos 2 resistencias L_1 *y* L_2 en paralelo, los extremos estarán al potencial y por ambas inductancias pasan di_1/dt y di_2/dt tal que si $i = i_1 + i_2$, entonces

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -\frac{\varepsilon}{L_1} \\ \frac{di_2}{dt} = -\frac{\varepsilon}{L_2} \end{cases}, \quad \text{sumando,} \tag{135}$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) = -\varepsilon\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) = -\varepsilon\frac{1}{L} = \frac{di}{dt}. \tag{136}$$

O sea se comporta como una sola inductancia de valor $L = L_1L_2/(L_1+L_2)$. Si las conectamos en serie por las inductancias pasarán las misma variación de corriente di/dt y en cada una de ellas habra una caida de tensión ε_1 y ε_2,

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -L_1\frac{di}{dt} \\ \varepsilon_2 = -L_2\frac{di}{dt} \end{cases}, \quad \text{sumando,} \tag{137}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -(L_1 + L_2)\frac{di}{dt} = -L\frac{di}{dt} = \varepsilon, \tag{138}$$

produciendo una suma directa $L = L_1 + L_2$. La generalización a varias inductancias es inmediata

$$\begin{array}{ll} L = \sum_i L_i & \text{en serie} \\ \frac{1}{L} = \sum_i \frac{1}{L_i} & \text{en paralelo} \end{array}. \tag{139}$$

Ahora consideremos que esten lo suficientemente cercas de modo **que haya inducción mutua**. Comenzemos poniendolas en paralelo. Las variaciones de corrientes di_1/dt y di_2/dt se acoplan según las ecuaciones

$$\begin{cases} \varepsilon = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \\ \varepsilon = -M_1 \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt}, \end{cases} \tag{140}$$

donde, por conveniencia hemos llamado $L_1 = L_{11},\ L_2 = L_{22}$ y $M = L_{12} = L_{21}$. Llamando $i = i_1 + i_2$, La solución de (140) es $\varepsilon = -L\ di/dt$ con

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \underset{M\to 0}{\to} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{141}$$

o sea, en el limite recobramos la expresión anterior. Si la colocamos en serie, entonces

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \\ \varepsilon_2 = -L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \end{cases}, \tag{142}$$

Con lo que produce $\varepsilon = -L\ di/dt$ con

$$L = L_1 + L_2 + 2M \underset{M\to 0}{\to} L_1 + L_2\ , \tag{143}$$

Hay 3 casos de interés. Cualitativamente podemos poner

$$M = L_{12} = \frac{d\phi_1}{di_2} \sim \overrightarrow{B}_2 \cdot \overrightarrow{S}_1 = B_2 S_1\ \widehat{B}_2 \cdot \widehat{S}_1. \tag{144}$$

O sea se puede usar utilizar M como un sintonizador, variando (por ejemplo mediante una perilla) del valor de $\widehat{B}_2 \cdot \widehat{S}_1$, de modo tal que L varie entre $L_1 + L_2 - 2|M| < L < L_1 + L_2 + 2|M|$.

VI. ENERGIA MAGNETOSTATICA

Para construir una configuración de cargas eléctricas se requiere energía (realizar trabajo). Dividimos el desarrollo en dos niveles: cargas puntuales y distribución continua. En el primer caso encontramos que

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1} q_j \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i\neq j} V_{ij} \right) = \frac{1}{2} \overline{q} \cdot \overline{V}\ , \tag{145}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{i\neq j} q_j \frac{k_e}{|\overrightarrow{r}_i - \overrightarrow{r}_j|} q_i = \frac{1}{2} \overline{q} \times \overline{\overline{P}} \times \overline{q}\ , \tag{146}$$

y para distribuciones continuas encontramos tres expersiones

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r'\rho(\overrightarrow{r}')V(\overrightarrow{r}') = \frac{1}{2}\iint d\overrightarrow{r}\ \rho(\overrightarrow{r})\frac{k_e}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}d^3r'\ \rho(\overrightarrow{r}')\ , \quad (147)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty d^3r'\left|\overrightarrow{E}\right|^2\ , \quad (148)$$

Y recordemos que teniamos problemas con la autoenergía de cada partícula aislada: esto es la energía que requería construir "eléctricamente" una partícula.

A. Energía acumulada por un circuito

Para comenzar, determinaremos la energía que requiere hacer circular una corriente i por un circuito de autoinductancia L. Para variar, lo determinaremos de una manera primitiva para visualizarlo mejor. Conectemos el circuito (espira) a una bateria con fem ε. En forma cuasiestacionaria comenzemos a circular corriente hasta llegar a la corriente i, que nos interesa, con la ayuda de una resistencia R. Apliquemos la ley de Kirchoff a la única malla que tenemos:

$$iR = \varepsilon - \frac{d\phi}{dt}\ , \qquad \text{multiplicando por } i = i(t)\ , \quad (149)$$

$$i\varepsilon = i^2R + i\frac{d\phi}{dt} = i^2R + i\frac{d(Li)}{dt} = +i^2R + \frac{d}{dt}\left(L\frac{i^2}{2}\right)\ , \quad (150)$$

$$W_{fem} = W_R + W_L\ , \quad (151)$$

y ϕ es el (auto) flujo magnético. La lectura de esta identidad es simplemente la conservación de la energía tiempo a tiempo: $i\varepsilon$ es la potencia entregada por la bateria (W_{fem}), i^2R es la potencia **disipada** por la resistencia(W_R) por lo que $W_L = id\phi/dt$ es la potencia **almacenada** por la la espira con $\phi = \phi(t)$, el flujo magnético . Como $W_L = dU/dt$, entonces: $dU = W_L dt$, e integrando

$$U = \int_0^i dtW_L(t) = \int_0^i dt\ \frac{d}{dt}\left(L\frac{i^2}{2}\right) = \frac{1}{2}Li^2\ , \quad (152)$$

donde $i = i'(t = \infty)$ y $L = i\phi$. Si reemplazamos esta relación en (**??**) encontramos la siguientes relaciones

$$U = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\phi i = \frac{1}{2L}\phi^2 \quad (153)$$

en total analogía con la energía de un capacitor ($U = \frac{1}{2}q^2/C = \frac{1}{2}Vq = \frac{1}{2}CV^2$). Vale la equivalencia $i \equiv q,\ \phi \equiv V$ y $L \equiv 1/C$.

B. Energía acumulada por un ensamble de circuitos

Ahora pasemos a construir un sistema de circuitos acoplados. Aplicando el principio de superposición tenemos

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1} i_j\phi_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1} i_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}\phi_{ji}\right)}_{\phi_j} \; = \; \frac{1}{2}\sum_{j=1} i_j \left(\sum_{i=1} L_{ji}i_i\right) = \left(\frac{1}{2}\sum_{j,i=1} i_j L_{ji} i_i\right) \; , \tag{154}$$

donde hemos considerado el acoplamiento ϕ_{ji}, esto es el flujo que sobre el circuito j le hace el i. En forma vectomatricial resulta mas compacto

$$U = \; \frac{1}{2}\bar{i}\cdot\overline{\phi} \; = \frac{1}{2}\bar{i}\times\overline{\overline{L}}\times\bar{i} \tag{155}$$

En analogía con el caso eléctrico ($U = \frac{1}{2}\overline{q}\cdot\overline{V} \; = \frac{1}{2}\overline{q}\times\overline{\overline{p}}\times\overline{q}$). Notese que aquí, a diferencia de la electricidad, $i = j$ es posible (autoinduccion).

Antes de continuar, sera útil encontrar otra formula para el flujo magnético. A partir de la definición

$$\phi = \iint_{\mathcal{S}} d^2s \; \overrightarrow{B}\cdot\widehat{n} = \iint_{\mathcal{S}} d^2s \; \widehat{n}\cdot \; \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A} = \oint_{\mathcal{C}} d\,\overrightarrow{l}\cdot\overrightarrow{A} \; . \tag{156}$$

Ahora podemos usar (156) para re-escribir (154) y generalizarla según (21)

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1} i_j \oint_{\mathcal{C}_j} d\,\overrightarrow{l}_j\cdot\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}\iint_{\mathcal{S}_j} d^2s_j \; \widehat{n}_j\cdot\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}\int_{\infty} d^3r \; \overrightarrow{J}\cdot\overrightarrow{A} \; . \tag{157}$$

Partiendo de la identidad (ver Appendice)

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}\cdot\underbrace{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}}_{\overrightarrow{B}} - \overrightarrow{A}\cdot\underbrace{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}}_{\mu_0\overrightarrow{J}} \; = \mu_0\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 - \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{J}\right) \; ,$$

y reemplazando en la RHS de (157) resulta

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\infty} d^3r \left|\overrightarrow{B}\right|^2 - \frac{1}{2\mu_0}\underbrace{\int_{\infty} d^3r \; \overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})}_{\oiint_{\mathcal{S}} d^2s \;\; \widehat{n}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})\to 0} \; , \tag{158}$$

donde hemos supuesto que en el infinito el término $(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})$ tiende a cero mas rápidamente que la superficie. Y asi llegamos al equivalente magnético de (148)

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\infty} d^3r' \left|\overrightarrow{B}\right|^2 . \tag{159}$$

Resumiendo, en analogía con electricidad (ver **??**):

$$U = \frac{1}{2}\int_{\infty} d^3r\ \vec{J}\cdot\vec{A} = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\infty} d^3r \left|\vec{B}\right|^2, \tag{160}$$

$$= \frac{1}{2}\int\int d^3r\ d^3r' \vec{J}(\vec{r}\,)\frac{k_m}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{J}(r'), \tag{161}$$

La analogía con la electricidad es total.

VII. MATERIALES MAGNETICOS

Estrictamente, en magnetismo no hay un simil a conductores ideales, simplemente no hay monopolos magnéticos que puedan comportarse como un gas de electrones libres de modo tal que hagan $B = 0$ dentro de un determinado cuerpo. Sin embargo hay equivalentes a los dieléctricos, que son los materiales magnéticos. La física es escencialmente la misma: ante un campo magnético *local* los dipolos magnéticos se alinean y el medio se magnetiza. Por campo magnético *local* nos referimos al campo externo ($\vec{B}_0$) mas los campos creados por los dipolos vecinos ($\vec{B}_{ind}$). En electricidad construimos un vector de desplazamieno $\vec{D} = \varepsilon_0\left\langle\vec{E}\right\rangle + \vec{P}$ y lo relacionamos a las cargas libres ó externas ρ_0. Aqui seguiremos un camino analogo: construiremos un vector llamado intensidad magnética $\vec{H} = \left\langle\vec{B}\right\rangle/\mu_0 - \vec{M}$ y lo relacionaremos con las corrientes libres o externas $\vec{J}_0$. El magnetismo es mas rico. En muchisimos casos los materiales eléctricos pueden ser considerados LIH. En magnetismo no tantos. Hay físicas muy particulares tales como el ferromagnetismo que son mas comunes y variadas que los electretes.

A. Modelo simple

Supongamos dos bobinas cilíndricas ideales (o toroides de Rowland) e idénticas geometricamente (caracterizados por $n = N/l$, S y l). Una en el vacío y la otra con un cierto material magnético dentro. Pensemos en forma práctica.

Primera experiencia: Si a la bobina en el vacío, se la somete a un cierto potencial $V_0(t)$ de modo que produzca una variación de corriente $di_0(t)/dt$, entonces calculamos la inductancia como:

$$L_0 = -\frac{V_0(t)}{\frac{d}{dt}i_0(t)} = \mu_0 n^2 Sl\ . \tag{162}$$

En la bobina con el material magnético bajo estudio, se encuentra que si forzamos la **misma** variación de corriente $di_0(t)/dt$, entre sus extremos se mide una caida de tensión $V(t) = K_m V_0(t)$, entonces

$$L = -\frac{V(t)}{\frac{d}{dt} i_0(t)} = -\frac{K_m V_0(t)}{\frac{d}{dt} i_0(t)} = K_m L_0 \ . \tag{163}$$

Hay que tener cuidado ya que esta experiencia se hace a la misma magnitud $di_0(t)/dt$. (bien podria ser que $K_m = K_m(i_0)$) por lo que, para estar seguro, necesitamos otra experiencia.

Segunda experiencia: Si a ambas bobinas se les regula la **misma** caida de tensión $V_0(t)$ entonces encontramos que por la bobina que contiene el material magnético circula $di(t)/dt = (1/K_m)\, di_0(t)/dt$, entonces se obtiene:

$$L = -\frac{V_0(t)}{\frac{d}{dt} i(t)} = -\frac{K_m V_0(t)}{\frac{1}{K_m}\frac{d}{dt} i_0(t)} = K_m L_0 \ , \tag{164}$$

o sea la misma relación. De esta manera K_m obtiene el certificado de una constante.

El modelo mas simple es pensar que hay una cierta corriente inducida i_{0ind} en la superficie del material en contacto con cada espira de **igual** (!) signo que la externa, tal que la corriente total sea la suma, o sea:

$$\textbf{hipótesis:} \quad i_{0ind} = i_0(K_m - 1) \ . \tag{165}$$

En el caso de la bobina en el vacío podemos usar la ley de Ampere sin inconvenientes

$$\oint_{\mathcal{C}} d\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{B}_0 = \mu_0(N i_0) = \mu_0 I_0, \qquad \text{tal que:} \quad I_0 = N i_0 \ . \tag{166}$$

En el caso de la bobina con el medio magnético tenemos un problema, ya que la corriente total encerrada por $\mathcal{C}$ es $N i_0 + N i_{0ind} = I_0 + I_{ind}$, $I_{ind} = N i_{0ind}$, entonces la ley de ampere resulta

$$\oint_{\mathcal{C}} d\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{B} = \mu_0(I_0 + I_{ind}) \ . \tag{167}$$

En principio, tenemos un problema ya que no conocemos I_{ind}. Pero podemos evitarla usando (165) $I_{ind} = N i_{0ind} = I_0(K_m - 1)$, entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} d\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{B} = \mu_0(I_0 + I_{ind}) = \mu_0 I_0(1 + K_m - 1) = I_0 \ . \tag{168}$$

$$\text{ó mejor} \qquad \frac{1}{\mu_0 K_m}\oint_{\mathcal{C}} d\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{B} = I_0$$

Llamando

$$\begin{aligned} \mu &= K_m\mu_0 \quad \textbf{permitividad magnética del medio,} && (169) \\ \overrightarrow{H} &= \overrightarrow{B}/\mu \quad \textbf{intensidad magnética.} && (170) \end{aligned}$$

Podemos escribir la ley de Ampere en su forma mas util

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} d\overrightarrow{l}\cdot\overrightarrow{H} = I_0 = Ni_0, \quad \textbf{ley de Ampere para medios magnéticos.}} \tag{171}$$

Y asi evitamos trabajar con las corrientes inducidas. Comparando (168) con (166) resulta que

$$\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu} = \frac{\overrightarrow{B}_0}{\mu_0}. \tag{172}$$

y por lo tanto

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu}{\mu_0}\overrightarrow{B}_0 = K_m\overrightarrow{B}_0.$$

Podemos considerar que tenemos dos campos magnéticos: $\overrightarrow{B}_0$ (externo generado por I_0) y otro $\overrightarrow{B}_{ind}$ (generado por I_{ind}), tal que

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_{ind}. \tag{173}$$

En términos de K_m

$$\overrightarrow{B}_{ind} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{B}_0 = (K_m - 1)\overrightarrow{B}_0, \tag{174}$$

de lo que resulta

$$\begin{aligned} \mu_0 I_{ind} &= \oint_{\mathcal{C}} d\overrightarrow{l}\cdot\overrightarrow{B}_{ind} = \oint_{\mathcal{C}} d\overrightarrow{l}\cdot\overrightarrow{B}_0(K_m-1) = I_0\mu_0(K_m-1). && (175) \\ &= I_0\mu_0(K_m-1), \qquad \text{ó mejor} && (176) \\ i_{0ind} &= i_0(K_m-1) && (177) \end{aligned}$$

que era la hipótesis de partida (165). Veamos dos ejemplos.

Como primer ejemplo, consideremos un cable recto infinito por el que circula una corriente i_0 en un medio caracterizado con μ. Haciendo una circulación en la ley de Ampere para medios magnéticos a una diatancia r, nos da:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\overrightarrow{l}\cdot\overrightarrow{H} = i_0 \quad\Longrightarrow\ H = \frac{i_0}{2\pi r} = \frac{B}{\mu}. \quad\Rightarrow\quad B = \mu\frac{i_0}{2\pi r}, \tag{178}$$

que es lo mismo que en el vacío con μ en lugar de μ_0.

Como segundo ejemplo consideremos la bobina de partida (solenoide o toroide) compuesta por N espiras por el que circula una corriente i_0. La ley de Ampere para medios magnéticos nos dice que

$$\oint_{\mathcal{C}} d\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{H} = Ni_0 = I_0 \quad \Longrightarrow \quad H = \frac{Ni_0}{l} = ni_0 = \frac{B}{\mu} \quad \Rightarrow \quad B = \mu n i_0 \ . \tag{179}$$

El valor de L es entonces

$$L \ = \ \frac{\partial}{\partial i_0}\phi_B = \frac{\partial}{\partial i_0}\overbrace{\iint_{\mathcal{S}} d\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{B}}^{\phi_B} = \frac{\partial}{\partial i_0}\overbrace{BNS}^{\phi_B} = \frac{\partial}{\partial i_0}\overbrace{(\mu n i_0)}^{B} NS, \tag{180}$$

$$= \ \mu n^2 Sl = K_m \ \mu_0 n^2 Sl = K_m L_0, \tag{181}$$

que confirma las experiencias de partida.

B. Magnetostatica macroscópica

Pasemos a una descripción macroscopica en términos de valores medios a nivel microscópicos. Consideremos un elemento de volumen d^3r' centrado en la posición $\overrightarrow{r}'_j$. Un solo dipolo magnético $\overrightarrow{m}_j$ ubicado en la posición $\overrightarrow{r}_j$ genera un potencial vector $\overrightarrow{A}_j$ en la posición $\overrightarrow{r}$, que esta dado por (83)

$$\overrightarrow{A}_j(r) = k_m \frac{\overrightarrow{m}_j \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j|^3} \ . \tag{182}$$

Sumemos ahora todos los dipolos ubicados en el elemento de volumen

$$\sum_j \overrightarrow{A}_j(r) = d\left\langle \overrightarrow{A}(r) \right\rangle = k_m \sum_j \left. \frac{\overrightarrow{m}_j \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j|^3} \right|_{\overrightarrow{r}_j \simeq \overrightarrow{r}'} = k_m \sum_j \frac{\overrightarrow{m}_j \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^3} \ , \tag{183}$$

Definiendo:

$$\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') = \frac{\sum_j \overrightarrow{m}_j}{d^3r'} = \textbf{Magnetización, ó} \tag{184}$$

$$= \textbf{densidad de dipolos magnéticos por unidad de Volumen,} \tag{185}$$

y haciendo $\sum_j \overrightarrow{A}_j(r) = d\left\langle \overrightarrow{A}(r) \right\rangle$ resulta:

$$d\left\langle \overrightarrow{A}(r) \right\rangle \ = \ k_m \frac{\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^3} d^3r' \ , \tag{186}$$

$$\left\langle \overrightarrow{A}(r) \right\rangle \ = \ k_m \int d^3r' \frac{\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^3} \ . \tag{187}$$

Para chequear que esta bien, consideremos un solo dipolo en el origen $\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') = \overrightarrow{m}\delta(\overrightarrow{r}')$, entonces recobramos la ecuación (83). La ecuación (187) se puede reescribir

$$\left\langle \overrightarrow{A}(r) \right\rangle = k_m \int d^3r' \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \times \overrightarrow{\nabla}' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}$$

Recurriendo al truco de cambiar la posición de $\overrightarrow{\nabla}$

$$\overrightarrow{\nabla}' \times \frac{\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} = \frac{\left[\overrightarrow{\nabla}' \times \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}')\right]}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} + \underbrace{\overrightarrow{\nabla}' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \times \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}')}_{-\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \times \overrightarrow{\nabla}' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}}, \tag{188}$$

$$\left\langle \overrightarrow{A}(r) \right\rangle = k_m \int_{\mathcal{V}} d^3r' \frac{\left[\overrightarrow{\nabla}' \times \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}')\right]}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} - k_m \underbrace{\int_{\mathcal{V}} d^3r' \overrightarrow{\nabla}' \times \frac{\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}}_{\iint_{\bigcirc\mathcal{S}} d^2s' \widehat{n} \times \frac{\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}}, \tag{189}$$

$$= k_m \int_{\mathcal{V}} d^3r' \frac{\left[\overrightarrow{\nabla}' \times \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}')\right]}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} + k_m \iint_{\bigcirc\mathcal{S}} d^2s' \frac{\left[\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \times \widehat{n}\right]}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} . \tag{190}$$

Y, a igual que en electricidad, aqui tenemos dos caminos.

Primer camino. Si integramos SOLO en el volumen $\mathcal{V}$, o sea donde $\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \neq 0$, y la segunda integral sobre la superficie que lo encierra (denotado con $\bigcirc\mathcal{S}$), entonces podemos interpretar que $\left\langle \overrightarrow{A}(r) \right\rangle$ es ocasionado por dos densidades de corrientes, en el volumen y en la superficie

$$\left\langle \overrightarrow{A}(r) \right\rangle = k_m \int_{\mathcal{V}} d^3r' \frac{\overrightarrow{J}_{ind}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} + k_m \iint_{\bigcirc\mathcal{S}} d^2s' \frac{\overrightarrow{g}_{ind}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} , \tag{191}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{J}_{ind}(\overrightarrow{r}') = \overrightarrow{\nabla}' \times \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}'), & \textbf{densidad de corriente inducida volumétrica,} \\ \overrightarrow{g}_{ind}(\overrightarrow{r}') = \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \times \widehat{n}, & \textbf{densidad de corriente inducida superficial.} \end{cases} \tag{192}$$

$\overrightarrow{g}_{ind}$ produce la corriente inducida i_{0ind}, introducida en la sección anterior (modelo simple) que se formaba en la superficie del material en contacto con cada espira. Como en el caso eléctrico, tambien aparece una corriente inducida volumetrica $\overrightarrow{J}_{ind}(\overrightarrow{r}')$. Ya que las corrientes inducidas no introducen corrientes netas, se verifica que

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{V}} d^3r' \overrightarrow{J}_{ind}(\overrightarrow{r}') + \oiint_{\mathcal{S}} d^2s' \overrightarrow{g}_{ind} \ , && (193) \\
&= \int_{\mathcal{V}} d^3r' \left[\overrightarrow{\nabla}' \times \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}')\right] + \underbrace{\oiint_{\mathcal{S}} d^2s' \left[\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \times \widehat{n}'\right]}_{-\oiint_{\mathcal{S}} \underbrace{d^2s'\widehat{n}'}_{d\overrightarrow{s}'} \times \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}')} \ , && (194)
\end{aligned}
$$

que se satisface, ya que es el teorema del rotor de Green (ver Apéndice).

Segundo camino. Si integramos en TODO el espacio (aquí denotado con $\int_\infty$), hasta el infinito, allí $\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') = 0$, por lo que la integral sobre la superficie cerrada en el infinito es nula. Entonces solo sobrevive el primer término de la RHS de (191)

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{A}(r) \right\rangle &= k_m \int_\infty d^3r' \frac{\overrightarrow{J}_{ind}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \ , \quad \text{y} && (195) \\
\overrightarrow{J}_{ind}(\overrightarrow{r}) &= \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}) \ . && (196)
\end{aligned}
$$

La condición de corriente neta nula se reduce aqui a:

$$
\int_\infty d^3r' \overrightarrow{J}_{ind}(\overrightarrow{r}') = 0 \ . \qquad (197)
$$

que se demuestra usando nuevamente el teorema del rotor de Green (ver Apéndice). Volviendo a la ecuación del rotor del campo magnético (67) y considerando que hay aparte $\overrightarrow{J}_{ind}$ generado por los dipolos magnéticos, hay corrientes externas real $\overrightarrow{J}_0$ (libre (*free*), o real (*true*), ó externa) tenemos:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \times \left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle &= \mu_0 \overrightarrow{J}_{total} = \mu_0 \left(\overrightarrow{J}_0 + \overrightarrow{J}_{ind}\right) = \mu_0 \left(\overrightarrow{J}_0 + \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{M}\right) \ , && (198) \\
\overrightarrow{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle - \overrightarrow{M}\right) &= \overrightarrow{J}_0, \quad \text{llamando,} && (199) \\
\frac{1}{\mu_0}\left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle - \overrightarrow{M} &= \overrightarrow{H} = \quad \textbf{intensidad magnética ,} && (200) \\
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} &= \overrightarrow{J}_0 \ ,. && (201)
\end{aligned}
$$

Notemos que ahora $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle / \mu_0 - \overrightarrow{M}\right) = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{M}$. Resumiendo

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{M} \ , & \overrightarrow{\nabla} \cdot \left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle = 0 \ , \\
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{J}_0 \ , & \overrightarrow{\nabla} \times \left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle = \mu_0 \left(\overrightarrow{J}_0 + \overrightarrow{J}_{ind}\right) \ .
\end{array}
}
\qquad (202)
$$

Las versiones integrales resultan ser, usando Stokes y Gauss

$$\oint_{\mathcal{C}} d\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{B} \;=\; \mu_0 \left(I_0 + I_{ind}\right) \tag{203}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} d\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{H} \;=\; I_0, \qquad \textbf{ley de Amperes para medios magnéticos} \tag{204}$$

$$\oiint_{\mathcal{S}} d^2s \left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle \cdot \widehat{n} \;=\; 0, \qquad \textbf{ley de Gauss del magnetismo} \tag{205}$$

$$\oiint_{\mathcal{S}} d^2s \; \overrightarrow{H} \cdot \widehat{n} \;=\; -\int_{\mathcal{V}} d^3r' \; \overrightarrow{\nabla}' \cdot \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \tag{206}$$

C. Medios lineales isotropos y homogeneos (LIH)

La expresión del vector intensidad magnética $\overrightarrow{H}$ depende de la magnetisación $\overrightarrow{M}$ según la ecuación (200). Lo mas general es que la polarización sea expresada en términos de una expansión en serie de potencias de $\overrightarrow{H}$,

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}) \;=\overrightarrow{M}_0 + \overline{\overline{\chi}}_1 \times \overrightarrow{H} + \overrightarrow{H} \times \overline{\overline{\chi}}_2 \times \overrightarrow{H} + \mathcal{O}(H^3) \;. \tag{207}$$

Notemos que aca hay una ligera diferencia con electricidad, ya que la polarización $\overrightarrow{P}$ se expresa en potencias de $\overrightarrow{E}$ y no de $\overrightarrow{D}$. Si $\overrightarrow{M}_0 \neq 0$ significa que el material tiene una polarización magnética permanente, aun en ausencia de H. Este material es un imán: en particular los ferromagnéticos. Si $\overrightarrow{M}_0 = 0$ y el segundo término es suficiente para describir la polarizaci´on, entonces $\overrightarrow{M} \;=\; \overline{\overline{\chi}}_1 \times \overrightarrow{H}$ y el término se llama **lineal.** Si el medio es **isótropo** entonces $\overline{\overline{\chi}}_1 = \chi(\overrightarrow{r})$. Si además el material es **homogeneo** (y lo denotaremos con LIH) entonces $\chi(\overrightarrow{r}) = \chi_m =$ **susceptibilidad magnética.** Por conveniencia escribimos $\chi_m = (\mu - \mu_0)/\mu_0$ y entonces:

$$\overrightarrow{M} \;=\; \chi_m \overrightarrow{H} = \frac{(\mu - \mu_0)}{\mu_0} \overrightarrow{H} \;, \quad \text{entonces} \;, \tag{208}$$

$$\overrightarrow{H} \;=\; \frac{1}{\mu_0} \left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle - \overrightarrow{M} = \frac{1}{\mu_0} \left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle - \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \overrightarrow{H} \;, \tag{209}$$

$$\overrightarrow{H} \;=\; \frac{1}{\mu_0} \left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle - \frac{\mu}{\mu_0} \overrightarrow{H} + \overrightarrow{H}, \tag{210}$$

$$\overrightarrow{H} \;=\; \frac{1}{\mu} \left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle \;, \tag{211}$$

que es la expresión encontrada en el modelo sencillo. Vimos que $\left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle$ es un valor medio, $\overrightarrow{M}$ también es un valor medio (densidad de dipolos magnéticos), por lo que $\overrightarrow{H}$ tambien debe entenderse como un valor medio válido a escala macroscópica.

D. Polos Norte y Sur

Dado $\left\langle \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) \right\rangle$ nos preguntamos como es $\left\langle \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \right\rangle = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})$

$$\left\langle \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \right\rangle = k_m \overrightarrow{\nabla} \times \int d^3r' \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \times \overrightarrow{\nabla}' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} . \tag{212}$$

En el Apéndice se muestra que

$$\overrightarrow{\nabla} \times \left[\overrightarrow{M}(\underset{\Uparrow}{\overrightarrow{r}'}) \times \overrightarrow{\nabla}' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \right] = -\overrightarrow{\nabla} \left[\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \cdot \overrightarrow{\nabla}' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \right] + 4\pi \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \, \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}') , \tag{213}$$

reemplazando,

$$\left\langle \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \right\rangle = -\frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\nabla} \int d^3r' \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \cdot \overrightarrow{\nabla}' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' 4\pi \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \, \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}') , \tag{214}$$

$$= -\mu_0 \overrightarrow{\nabla} V_H(\overrightarrow{r}) + \mu_0 \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}) , \tag{215}$$

donde hemos llamado

$$V_H(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \cdot \overrightarrow{\nabla}' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} . \tag{216}$$

Reordenando (215) podemos escribir

$$\overrightarrow{H} = \left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle \frac{1}{\mu_0} - \overrightarrow{M} = -\overrightarrow{\nabla} V_H . \tag{217}$$

Con lo cual encontramos una expresión para $\overrightarrow{H}$ en total analogía con el campo eléctrico, ($\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V$). Para ver cual es el equivalente de las "cargas" de $\overrightarrow{H}$, hagamos el truco de siempre, cambiemos la posición de $\overrightarrow{\nabla}$

$$\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}') \cdot \overrightarrow{\nabla}' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} = \overrightarrow{\nabla}' \frac{\overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} - \frac{\overrightarrow{\nabla}' \cdot \overrightarrow{M}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \tag{218}$$

con lo que

$$V_H(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\underbrace{\int d^3r'\vec{\nabla}'\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\oiint_{\mathcal{S}} d^2s\frac{\vec{M}(\vec{r}')\cdot\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} - \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{219}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oiint_{\mathcal{S}} d^2s\frac{\sigma_M(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} d^3r'\frac{\rho_M(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ , \qquad \text{donde} \tag{220}$$

$$\begin{cases} \sigma_M(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r})\cdot\hat{n}\ , & \textbf{densidad superficial de polos magnéticos,} \\ \rho_M(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}(\vec{r})\ , & \textbf{densidad volumetrica de polos magnéticos.} \end{cases} \tag{221}$$

Recordemos que el potencial de polarización para el caso eléctrico era:

$$\langle V(r)\rangle = k_e\oiint_{\mathcal{S}} d^2s\frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + k_e\int_{\mathcal{V}} d^3r'\frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ , \qquad \text{donde} \tag{222}$$

$$\begin{cases} \sigma_P(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r})\cdot\hat{n} \\ \rho_P(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r}) \end{cases},. \tag{223}$$

con lo cual encontramos tambien una analogía entre $\rho_P(\vec{r})$ y $\rho_M(\vec{r})$, y $\sigma_P(\vec{r})$ con $\sigma_M(\vec{r})$. Podemos decir que $\vec{P}$ y $\vec{M}$, son símiles matemáticos. La polarización eléctrica induce cargas y el campo magnético induce corrientes. En magnetismo los efectos se interpretan como cargas magnéticas o polos. Para el caso de $M = cte$ por ejemplo, resulta que cuando $\vec{M}(\vec{r})\cdot\hat{n}$ sobrevive en la superficie y produce σ_M. Llamamos

$$\begin{cases} \vec{M}\cdot\hat{n} > 0\ , & \textbf{polo norte ,} \\ \vec{M}\cdot\hat{n} < 0\ , & \textbf{polo sur .} \end{cases} \tag{224}$$

Como siempre, se podría integrar en todo el espacio hasta el infinito, por lo cual la integral de superficie alli se me anula, y ρ_M tiene la información superficial con el salto brusco de $\vec{M}$. Y asi lo veremos en la proxima seccion.

E. Efecto de bordes: el imán

Vamos a calcular como son los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ de una barra imantada con $M = cte$. Consideremos una barra cilíndrica de radio ρ_0 y largo $2Z_0$ imantada en la dirección z. La magnetización esta dada por

$$\vec{M} = \vec{M}(\rho, z) = M_z\hat{e}_z = M_0\Theta(\rho_0-\rho)\Theta(|Z_0|-|Z|)\hat{e}_z \tag{225}$$

<u>Localización de los polos.</u> Las fuentes de $\overrightarrow{H}$ están generadas por el gradiente, o sea $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}=\rho_M=-\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{M}$, que en este caso es

$$\begin{aligned}
\rho_M &= -\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{M}=-\overrightarrow{\nabla}\cdot M_0\Theta(\rho_0-\rho)\Theta(|Z_0|-|Z|)\widehat{e}_z\ , && (226)\\
&= -M_0\Theta(\rho_0-\rho)\frac{\partial}{\partial Z}\Theta(|Z_0|-|Z|)\ , && (227)\\
&= -M_0\Theta(\rho_0-\rho)\frac{\partial}{\partial Z}\left[\Theta\left(Z_0-(-Z)\right)-\Theta(Z_0-Z)\right]\ , && (228)\\
&= -M_0\Theta(\rho_0-\rho)\delta(Z_0-(-Z))+M_0\Theta(\rho_0-\rho)\delta(Z_0-Z)\ , && (229)
\end{aligned}$$

que son dos discos ubicados en $Z\pm Z_0$ de radio ρ, o sea las σ_M;

$$\begin{cases} M_0\Theta(\rho_0-\rho)\delta(Z_0-Z)=\ \textbf{polo norte}\\ -M_0\Theta(\rho_0-\rho)\delta(Z_0-(-Z))=\ \textbf{polo sur}\end{cases}. \tag{230}$$

Las lineas de $\overrightarrow{H}$ se comportan igual a un campo eléctrico: salen la lineas del polo norte (cargas positivas) y entran en el sur (cargas negativas).

<u>Localización de las corrientes inducidas.</u> Las fuentes de $\overrightarrow{B}$ estan determinadas por $\overrightarrow{\nabla}\times\left\langle\overrightarrow{B}\right\rangle=\overrightarrow{J}_{ind}=\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{M}$ que en este caso es

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{J}_{ind} &= \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{M}=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\widehat{e}_\rho & \rho\widehat{e}_\varphi & \widehat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & M_z\end{pmatrix}\ , && (231)\\
&= -\widehat{e}_\varphi M_0\Theta(|Z_0|-|Z|)\frac{\partial}{\partial\rho}\Theta(\rho_0-\rho)\ ; && (232)\\
&= M_0\Theta(|Z_0|-|Z|)\delta(\rho_0-\rho)\widehat{e}_\varphi=\overrightarrow{g}_{ind}\ \ ; && (233)
\end{aligned}$$

que es la densidad de corriente superficiales que dan lugar a las corrientes inducidas descriptas en el modelo sencillo. De vuelta, las corrientes superficiales son los efectos de los bordes (la derivada de Θ es la δ).

Algo importante: las lineas de $\overrightarrow{B}$ (que resulta de $\overrightarrow{J}_{ind}$ según la ley de Biot y Savart) son cerradas. Mientras que las líneas de $\overrightarrow{H}$ salen del polo norte y entran en el sur, tambien <u>dentro</u> del material. Alli $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{H}$ tienen sentidos opuestos ya que $\overrightarrow{H}=\left\langle\overrightarrow{B}\right\rangle/\mu_0\overset{\Downarrow}{-}\overrightarrow{M}$.

F. Energía en presencia de materiales magnéticos

Para una distribución en el vacío teníamos

$$U=\frac{1}{2}\int d^3r'\ \overrightarrow{J}_0(r')\cdot\overrightarrow{A}_0(\overrightarrow{r}')\ , \tag{234}$$

donde $\overrightarrow{A}_0$ es el potencial vector en el vacío ocacionado por las corrientes externas $\overrightarrow{J}_0$. Cuando tenemos materiales magnéticos debemos construir $\overrightarrow{J}_0$ en presencia de $\left\langle \overrightarrow{A} \right\rangle$ ocacionado tambien por los dipolos magnéticos. Entonces

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r' \; \overrightarrow{J}_0 \cdot \left\langle \overrightarrow{A} \right\rangle \; , \qquad \text{sabiendo que} \tag{235}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\left\langle \overrightarrow{A} \right\rangle \times \overrightarrow{H} \right) = \overrightarrow{H} \cdot \underbrace{\nabla \times \left\langle \overrightarrow{A} \right\rangle}_{\left\langle \overrightarrow{B} \right\rangle} - \left\langle \overrightarrow{A} \right\rangle \cdot \underbrace{\nabla \times \overrightarrow{H}}_{\overrightarrow{J}_0} , \tag{236}$$

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r' \; \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{B} - \frac{1}{2} \underbrace{\int d^3r' \; \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\left\langle \overrightarrow{A} \right\rangle \times \overrightarrow{H} \right)}_{\oint\!\!\oint_S d^2s \; \langle \overrightarrow{A} \rangle \times \overrightarrow{H} \;\; \to 0 \;\; \text{en el } \infty} , \tag{237}$$

con lo que llegamos a

$$U = \frac{1}{2}\int_\infty d^3r' \; \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{B} \; . \tag{238}$$

Recordemos que en el caso eléctrico llegamos a un resultado equivalente: $U = \frac{1}{2}\int d^3r' \; \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{E}$.

Un ejemplo

Veamos el caso de un solenoide ideal (n, S y l) con un determinado material magnético LIH

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r' \; \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{B} \; Sl = \frac{1}{2} H \underbrace{\mu H}_{B} Sl \tag{239}$$

$$= \frac{1}{2}\mu H^2 Sl = \frac{1}{2}\mu (n i_0)^2 Sl = \frac{1}{2}(K_m \mu_0)(n i_0)^2 Sl = K_m U_0 \tag{240}$$

$$U = K_m \frac{1}{2}\mu_0 n^2 Sl \; i_0^2 = \frac{1}{2} K_m L_0 i_0^2 = \frac{1}{2} L i_0^2 \tag{241}$$

Donde hemos usado $L_0 = \mu_0 n^2 Sl$ y $L = K_m L_0$.

G. Condiciones de contorno entre dos medios magnéticos

Sean dos medios magnéticos: un medio interno "1" con $\overrightarrow{B}_1$ y $\overrightarrow{H}_1$ normal $\widehat{n}$, y un medio "2" con $\overrightarrow{B}_2$ y $\overrightarrow{H}_2$. Si hacemos un blister en la superficie y aplicamos el teorema de Gauss, resulta

$$\oint\!\!\oint_S \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{a} = 0 \quad \Rightarrow \left(\overrightarrow{B}_1 - \overrightarrow{B}_2 \right) \cdot \widehat{n} = 0 \; . \tag{242}$$

Si hacemos una circulación en un plano cuyo versor perpendicular sea $\widehat{n}_a$ y el versor en el plano de la circulación sea $\widehat{n}_b$ (tal que $\widehat{n}_a \times \widehat{n}_b = \widehat{n}$, $\widehat{n}_a$ y $\widehat{n}_b$ tangentes a la superficie), entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{l} = i_{0enc} = \int \overrightarrow{g}_0 \cdot \widehat{n}_a \; dl_b \; , \tag{243}$$

donde $\overrightarrow{g}_0$ es la corriente libre superficial. Luego definiendo $\overrightarrow{l}_b = l_b \widehat{n}_b$

$$\overrightarrow{H}_1 \cdot (-\overrightarrow{l_b}) + \overrightarrow{H}_2 . \overrightarrow{l}_b \; = \; \overrightarrow{g}_0 \cdot \widehat{n}_a l_b \; , \tag{244}$$

$$\left(\overrightarrow{H}_2 - \overrightarrow{H}_1\right) . \overrightarrow{n}_b \; = \; \overrightarrow{g}_0 \cdot \widehat{n}_a \; , \tag{245}$$

que es equivalente a escribir

$$\widehat{n} \times \left(\overrightarrow{H}_2 - \overrightarrow{H}_1\right) = \overrightarrow{g}_0 \; , \tag{246}$$

Resumiendo

$$\boxed{\begin{array}{c} \left(\overrightarrow{B}_1 - \overrightarrow{B}_2\right) \cdot \widehat{n} = 0 \; , \\ \widehat{n} \times \left(\overrightarrow{H}_2 - \overrightarrow{H}_1\right) = \overrightarrow{g}_0 \; . \end{array}} \tag{247}$$

Y asi se determina la componente perpendicular de la inducción magnética y la paralela de la intensidad magnética. En el caso de tener $\overrightarrow{g}_0 = 0$, resulta

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \; y \;\; H_{2\parallel} = H_{1\parallel} \tag{248}$$

Con lo cual se termina de definir la ley de Snell.

En magnetismo no existe el equivalente a conductores ideales , pero si consideramos medios LIH, entonces $B_{1,2} = \mu_{1,2} H_{1,2}$ y

$$H_{2\perp} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1\perp} \qquad y \qquad H_{2\parallel} = H_{1\parallel} \tag{249}$$

Si $\mu_1/\mu_2 \to 0$, $H_{2\perp}/H_{1\perp} \to 0$ y el sistema "luce" como un conductor eléctrico. Las líneas de $\overrightarrow{H}$ salen casi perpendiculares hacia el medio 2, tal como el campo eléctrico de los conductores eléctricos (μmetal).