3. Movimiento Browniano y caminatas al azar

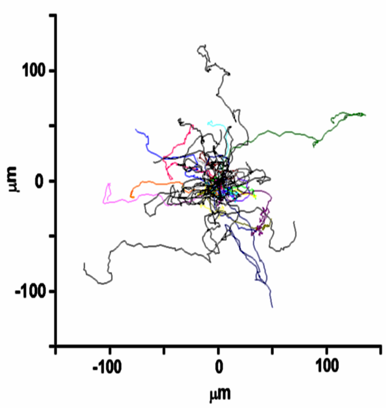
Material de lectura sugerido:
- Capítulo 4 de *Física Biológica. Energía, información y vida*, Philip Nelson.
- *Random Walks in Biology*, Howard C. Berg.

El propósito de esta guía es el de introducirnos a uno de los modelos mas simples de caminata aleatoria: una caminata aleatoria en una dimensión. Aunque este modelo es simple, nos permite entender muchas de las propiedades de caminatas aleatorias mas complejas. Nuevamente, no hace falta hacer muchas cuentas, pero tómense el tiempo para pensar cada uno de los problemas; las preguntas mas obvias pueden esconder ideas importantes.

Introducción: ¿Qué son la difusión y el movimiento browniano?

Las fuerzas que agitan a las moléculas causan la difusión. A escala microscópica, la difusión es una forma de movimiento aleatorio caracterizado por cambios abruptos y frecuentes de dirección. Esta aleatoriedad es el resultado de la colisión con moléculas presentes en el entorno, las cuales a su vez también se están moviendo aleatoriamente. Esta forma de movimiento también se llama movimiento Browniano[*].
Extracto del libro *Mechanics of Motor Proteins and the cytoskeleton,* J. Howard. Sinauer Assoc. 2001.

¿Cómo podemos acercarnos a describir formalmente el fenómeno del que habla el párrafo anterior? Podemos hacerlo a través de la formalización matemática de la 'caminata al azar' o 'random walk'. Este modelo describe la trayectoria de un sistema que evoluciona dando sucesivos pasos de forma aleatoria. El modelo de 'caminata aleatoria' no sólo se usa para modelar el movimiento de moléculas o partículas sino que también describe fenómenos tan diversos como la toma de decisiones, la evolución de un ecosistema o las fluctuaciones de la bolsa de valores. Algunas caminatas aleatorias ocurren sobre una línea, otras en un plano y otras en muchas dimensiones; inclusive una caminata aleatoria puede realizarse entre grupos (de neuronas, de personas, etc).



Un ejemplo de caminata aleatoria es el de la migración de las células T del sistema inmunológico. Las células T viajan una distancia de aproximadamente 20 μm en línea recta a una velocidad de 20 μm/seg. Luego, las células cambian de dirección con una alta probabilidad. Por eso, las trayectorias tienen patrones de *random walks* cuando se registran durante tiempos largos. La figura de la izquierda muestra algunas de estas trayectorias (normalizadas al origen) registradas con la técnica de microscopía de 2 fotones. Para más información: *A stochastic view of lymphocyte motility and trafficking within the lymph node*. Wei SH, Parker I, Miller MJ, Cahalan MD. Immunological Reviews 2003, Vol. 195: 136–159.

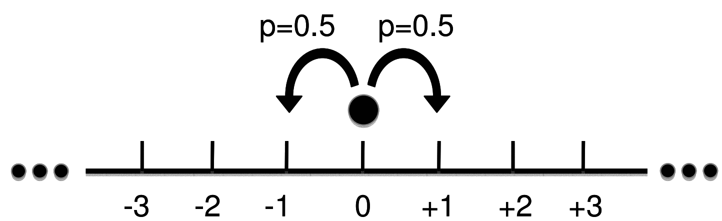
* En honor del botanista Robert Brown, quien en 1827 observo el movimiento aleatorio de granos de polen bajo el microscopio. Brown se sorprendió de esta observación y pensó que este movimiento podía ser producido por el polen. Para sacarse las dudas, observo también partículas de polvo y vio que se movían de la misma manera. Brown concluyó (sin mucha alegría) que este movimiento no era una propiedad exclusiva de un sistema vivo.

El mundo micro y macroscópico
Una pregunta para tener en cuenta mientras pensamos los problemas de esta guía y la siguiente: Si el comportamiento microscópico de un sistema está regido por reglas de evolución aleatorias, ¿podemos predecir algo sobre su comportamiento macroscópico (observable)?

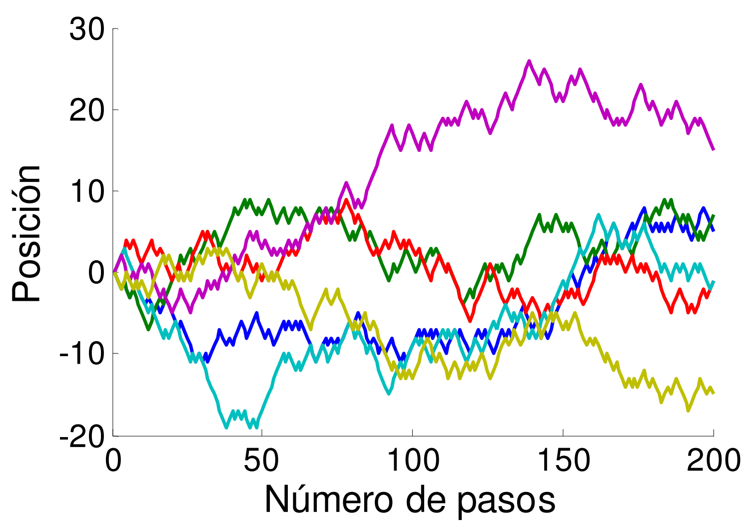
Problemas para hacer y discutir en clase:

1) *Caminata aleatoria en una dimensión*. Una partícula realiza una caminata aleatoria (*random walk*) según las siguientes reglas (ilustradas en el esquema que sigue):

   a) la posición inicial de la partícula a $t_0=0$ es $x_o=0$.
   b) la partícula se mueve sobre una línea recta en pasos discretos de longitud L=1.
   c) en cada movimiento la partícula tiene igual probabilidad de ir hacia la derecha o hacia la izquierda. Es decir p(der)=p(izq)=0.5.



En la siguiente figura se muestran las trayectorias (posición en función del número de pasos) de 6 partículas que hicieron un *random walk* de 200 pasos con las reglas previamente citadas. En la próxima clase computacional vamos a hacer simulaciones de este tipo de caminatas. Ahora vamos a experimentar con caminatas más cortas y pensar qué tipo de resultados podríamos obtener.



La siguiente tabla muestra todas las posibles secuencias de movimiento de la partícula en una caminata de 4 pasos (cada paréntesis representa un paso; movimiento a la derecha es denotado como '+' y hacia la izquierda como '-'). Complete la tabla con la posición final en la que se encuentra la partícula de realizar cada una de las secuencias posibles.

SECUENCIA	POSICION FINAL
(+) (+) (+) (+)	
(+) (+) (+) (−)	
(+) (+) (−) (+)	
(+) (+) (−) (−)	
(+) (−) (+) (+)	
(+) (−) (+) (−)	
(+) (−) (−) (+)	
(+) (−) (−) (−)	
(−) (−) (−) (−)	
(−) (−) (−) (+)	
(−) (−) (+) (−)	
(−) (−) (+) (+)	
(−) (+) (−) (−)	
(−) (+) (−) (+)	
(−) (+) (+) (−)	
(−) (+) (+) (+)	

a) ¿Con qué probabilidad ocurre cada una de estas secuencias?
b) ¿Con qué probabilidad termina la partícula en cada posición?
c) ¿Cuál es el valor medio de la posición final, $<x>$?
d) Un sistema de medición detecta si la partícula se aleja del origen una distancia, en módulo, mayor o igual a dos unidades de longitud (es decir, si $L \geq 2$ o $L \leq -2$). ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de medición detecte un 'cambio de posición'? (*Ayuda:* calcule $p(|x| \geq 2)$).
e) ¿Qué ocurre con $<x>$ y $p(|x| \geq 2)$ a medida que la partícula da más pasos?

2) *Tiempos de llegada*

A continuación mostramos el resultado que se obtendría al medir el tiempo que le lleva a una partícula recorrer una cierta distancia. Las partículas parten de x=0 y al llegar a la meta se midió el tiempo empleado. Se hizo el experimento con partículas que hacen un *random walk*, con partículas que viajan a velocidad constante y con partículas que se trasladan con aceleración constante (positiva). ¿Puede decir qué conjunto de puntos pertenece a cada tipo de movimiento?