Estadística en Física Experimental (1er cuatrimestre de 2015)

Guía de Problemas N° 4 | Cociente $Z = X/Y$

Mostremos una de las posibles resoluciones. Para encontrar la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $Z = X/Y$, empezamos por escribir la distribución acumulativa

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &\equiv P(Z \leq z) = P(X/Y \leq z) = P(\{X \leq zY\} \cap \{Y > 0\}) + P(\{X \geq zY\} \cap \{Y < 0\}) \\
&= \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} dx f_{XY}(x,y) + \int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} dx f_{XY}(x,y)
\end{aligned}
$$

En el caso particular que las variables aleatorias X e Y sean independientes podemos factorizar la densidad de probabilidad conjunta como producto de las marginales $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, con lo cual

$$
F_Z(z) = \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{zy} f_X(x)dx\right] f_Y(y)dy + \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{zy}^{+\infty} f_X(x)dx\right] f_Y(y)dy
$$

Con esta expresión estamos a unos pasos de obtener $f_Z(z)$ que es por definición la derivada respecto de z

$$
f_Z(z) \equiv \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{zy} f_X(x)dx\right] f_Y(y)dy + \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{d}{dz}\int_{zy}^{+\infty} f_X(x)dx\right] f_Y(y)dy
$$

Para evaluar esta derivadas hay que considerar una generalización del teorema fundamental del cálculo.

Revisitando el teorema fundamental del cálculo.
Consideremos una integral de una función f entre los limites c y $h(x)$. Con esto la integral se puede escribir como

$$
\int_c^{h(x)} f(t)dt = F(h(x)) - F(c)
$$

donde $F(\cdot)$ es la primitiva de $f(\cdot)$. Al aplicar el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, la derivada respecto de x es:

$$
\frac{d}{dx}\left[F(h(x)) - F(c)\right] = F'(h(x))h'(x) - 0 = f(h(x))h'(x)
$$

Del mismo modo, si la integral corre desde una función $g(x)$ hasta una constante

$$
\frac{d}{dx}\left[\int_{g(x)}^{c} f(t)dt\right] = \frac{d}{dx}\left[F(c) - F(g(x))\right] = -F'(g(x))g'(x) = -f(g(x))g'(x)
$$

Apliquemos esta regla al caso anterior. Para el primer término vale

$$
\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{zy} f_X(x)dx = f_X(zy)y
$$

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{zy} f_X(x)dx\right] f_Y(y)dy + \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{d}{dz}\int_{zy}^{+\infty} f_X(x)dx\right] f_Y(y)dy \\
&= \int_0^{+\infty} \left[f_X(zy)y\right] f_Y(y)dy + \int_{-\infty}^{0} \left[-f_X(zy)y\right] f_Y(y)dy \\
&= \int_0^{+\infty} \left[f_X(zy)|y|\right] f_Y(y)dy + \int_{-\infty}^{0} \left[f_X(zy)|y|\right] f_Y(y)dy\}
\end{aligned}
$$

donde hicimos uso de que en la segunda integral $y < 0$ con lo cual $-y = |y|$. Resumiendo, para $Z = X/Y$ su densidad de probabilidad esta dada por:

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zy) f_Y(y)|y|dy
$$