Estadística en Física Experimental (1er cuatrimestre de 2015)

Guía de Problemas N° 1 | Probabilidad Elemental–Combinatoria–Teorema de Bayes

1. Para cada uno de los experimentos de más abajo:
   i. defina la variable aleatoria;
   ii. identifique si la aleatoriedad proviene del fenómeno medido, del proceso de medición usado, o de ambos;
   iii. encuentre el espacio muestral; en los casos en que dicho espacio sea finito calcule su cardinal.

   En el experimento se mide:
   (a) el resultado de tirar una moneda cuatro veces;
   (b) el resultado de tirar una vez cuatro monedas indistinguibles;
   (c) el número de fotones provenientes de una estrella dada, en un intervalo de tiempo de 1000 s;
   (d) el número de fotones provenientes de una estrella dada, detectados por el telescopio Hubble entre las 15:25 y las 15:26 del 20 de julio de 2007;
   (e) el tiempo que pasa hasta que se colectan 1000 fotones provenientes de una determinada estrella;
   (f) la distancia entre dos ciudades separadas por más de 1000 km, contando los mojones de la ruta;
   (g) la misma distancia del punto anterior, pero usando el cuentakilómetros de un automóvil;
   (h) la velocidad de una molécula en un gas en equilibrio, a una dada presión y temperatura;
   (i) la temperatura de un gas en equilibrio térmico;
   (j) la energía de un fotón proveniente de la transición entre el segundo y el primer estado excitado del átomo de hidrógeno;
   (k) el número de decaimientos de una fuente de ^{60}Co en un intervalo de 10 s;

   Compare y discuta si difieren los ítems $\{1a, 1b\}$ (en particular ¿importa el orden de los resultados?), $\{1c, 1d\}$ y $\{1f, 1g\}$.

Algo de combinatoria

2. Nuestro alfabeto consta de 27 letras. Con ellas se forman los 88431 vocablos del diccionario de la Real Academia Española de 2001.
   (a) ¿Cuántas palabras de 6 letras se podrían formar con nuestro alfabeto? [Rta: 387420489]
   (b) ¿Cuántos subconjuntos de 6 letras se pueden construir? [Rta: 296010]
   (c) Ídem (a), pero sin repetir letras en las palabras. [Rta: 213127200]

3. ¿Cuántos anagramas tienen las palabras: "jardines", "anagrama" y "amalgama"? [Rta: 40320, 1680 y 840 respectivamente]

4. Borges afirma en *La biblioteca de Babel* que allí: "cada libro es de 410 páginas; cada página de 40 renglones, cada renglón, de unas 80 letras de color negro".
   (a) ¿Cuántos posibles caracteres tiene un libro? [Rta: $n_a = 1312000$]
   (b) Si "el número de símbolos ortográficos es 25", ¿cuántos renglones distintos existen? [Rta: $n_b = 25^{80} \simeq 10^{112}$]
   Note que todos los libros escritos o por escribir en este alfabeto (y con renglones de 80 caracteres) estarán formados sólo por este número de renglones.
   (c) ¿Cuántos libros distintos tendría esta hipotética biblioteca infinita? ¿Por qué este número es tanto más grande que el encontrado en 4b? [Rta: $n_c = 25^{n_a} \simeq 10^{1834097}$]
   (d) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar libros que tengan exactamente la frase (puede estar partida en más de un renglón): 'la luz se propaga en el espacio vacío con una velocidad definida'? [Rta: $n_d = (n_a - 65) \times 25^{-66}$]

Probabilidad elemental

5. Se tira 3 veces una moneda con una cara (C) y una ceca (S), de modo que el conjunto de posibles resultados individuales es
$$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\},$$

donde cada posible resultado es de la forma $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3$, con ω_i el resultado de la tirada i (por ejemplo si $\omega = SCC$ entonces se obtuvo una S en la primer tirada y C en la segunda y tercera). A un jugador solo le interesa saber cuáles son los posibles resultados en los que la primer tirada fue una cara y por lo tanto agrupa los resultados según

$$\{CCC, CCS, CSC, CSS\}$$

pues en todos estos casos el resultado de la primer tirada es una cara. A otro jugador en cambio solo le interesa que no salga ninguna cara, o sea el evento $\{SSS\}$. Siguiendo esta lógica escriba los conjuntos que describen los siguientes sucesos:

(a) A={el resultado de la última tirada es ceca}
(b) B={todas las monedas salieron ceca}
(c) C={todas las monedas salieron cara}
(d) D={sale una sola cara en las primeras 2 tiradas}
(e) E={sale una sola ceca en las primeras 2 tiradas}
(f) F={sale por lo menos una cara en las 3 tiradas}
(g) G={el número de caras que salen es impar}
(h) H={sale una sola cara}
(i) I={sale una sola ceca}

(comentario: notar que los conjuntos quedan definidos por el suceso y no por la probabilidad de cada evento, que puede asignarse a posteriori)

6. Considere los sucesos del ejercicio anterior y que la probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es $P(C) = p$ y de que salga una ceca es $P(S) = q$ (notar que debe valer $p + q = 1$, ¿por qué?). El resultado de cada tirada es independiente de las otras.
   (a) Calcular la probabilidad de cada posible resultado en Ω, y de cada uno de los sucesos.
   (b) Encuentre sucesos disjuntos tales que su unión sea Ω. Compruebe que las probabilidades de estos sucesos suman 1.
   (c) Muestre que para los sucesos D y F vale $P(D \cup F) \leq P(D) + P(F)$. Encuentre la probabilidad de la intersección de los sucesos D y F.

7. Siendo A, B y C tres sucesos. Decir si los siguentes enunciados son verdaderos (V) o falsos (F) en general:
   (a) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ F
   (b) Si $P(A) = 0$ entonces $A = \emptyset$ F
   (c) Si $A \cup B = \Omega$ y $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A) = 1 - P(B)$ V
   (d) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ se conoce como desigualdad de Boole. V
   (e) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$ V
   (f) Si $A \subset B$ entonces $P(A) < P(B)$ F
   (g) Si $A \subset B$ entonces $P(A \cap B) = P(A)$ V

   (cheatsheet: las respuestas están en el margen derecho muy claritas)

Probabilidad condicional, independencia

8. Sean tres sucesos A, B y C. Calcule la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos si: $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$, $P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0$ y $P(A \cap C) = 1/8$. [Rta: 5/8]

9. ¿Cuándo es más probable obtener al menos un as de espadas?
   (a) al extraer dos cartas de un mismo mazo de truco (que consta de 40 cartas), [Rta: la probabilidad es 0.05]
   (b) al extraerlas de dos mazos, una carta de cada mazo. [Rta: la probabilidad es 0.049375]
   (c) Encuentre el espacio muestral e identifique los sucesos mencionados.

10. Entre los números del 1 al 100 se eligen dos al azar. Encuentre la probabilidad de que sean consecutivos si se los elige,
    (a) sin reposición [Rta: 0.02]
    (b) con reposición [Rta: 0.0198]
    (c) Encuentre el espacio muestral e identifique los sucesos mencionados.

11. Se tiran dos dados. Calcule la probabilidad de que:
    (a) no salga ningún as [Rta: $^{25}/_{36}$],
    (b) no salga ningún as y ningún seis [Rta: $^{16}/_{36}$]

12. Una caja contiene 7 alfajores de dulce de leche y 3 de fruta. Se extraen dos alfajores. Calcule la probabilidad de que:
    (a) ambos sean de dulce de leche. [Rta: $^{7}/_{15}$]
    (b) ambos sean del mismo gusto. [Rta: $^{8}/_{15}$]
    (c) al menos uno sea de fruta. [Rta: $^{8}/_{15}$]
    (d) Encuentre el espacio muestral e identifique los sucesos mencionados.

13. En un partido de truco entre 4 jugadores que dura 15 manos, encuentre la probabilidad de que:
    (a) a un dado jugador nunca le toque el ancho de espadas. [Rta: 0.31]
    (b) el as de espadas no salga en todo el partido. [Rta: 0.0047]

14. Una moneda no cargada se lanza 15 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que en la última tirada se obtenga cara, sabiendo que en las primeras catorce tiradas salió ceca?

15. Siendo A y B dos sucesos. Decir si los siguentes enunciados son verdaderos (V) o falsos (F) en general:
    (a) Si $P(A) = 0$ entonces $P(A|B) = 0$ V
    (b) $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$ V
    (c) Si para cualquier subconjunto A_i de Ω, vale que $P(A_i|B) = P(A_i)$ entonces $P(B) = 1$ V
    (d) Si $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ entonces A y B son independientes V
    (e) $P(A|B) \leq P(A)$ F
    (f) $P(\bar{A}|B) + P(A|B) = 1$ V
    (g) $P(A|\bar{B}) + P(A|B) = 1$ F

    (cheatsheet: las respuestas están en el margen derecho muy claritas)

16. Una urna U_a tiene 7 bolas blancas y 3 negras, y otra urna U_b, 5 blancas y 5 negras. Se extrae al azar una bola de U_a y se la coloca en U_b. A continuación se extrae al azar una bola de U_b. Encuentre la probabilidad de que:
    (a) ambas bolas extraídas sean negras. [Rta: $^{9}/_{55}$]
    (b) al menos una bola extraída sea negra. [Rta: $^{34}/_{55}$]
    (c) exactamente una bola extraída sea negra. [Rta: $^{5}/_{11}$]
    (d) Dados los eventos $a = \{\text{ambas bolas extraídas son negras}\}$, $b = \{\text{al menos una bola extraída es negra}\}$, $c = \{\text{se extrajo exactamente 1 bola negra}\}$; teniendo en cuenta: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, ¿por qué en vez de valer: $P(b) = P(c) + P(c) - P(a)$, sí se cumple $P(b) = P(a) + P(c)$? (discutirlo usando las probabilidades de los puntos previos)

17. Un dado se fabrica de modo que la probabilidad de sacar un número es proporcional al mismo. Calcule:
    (a) La probabilidad de obtener un 2. [Rta: $^{2}/_{21}$]
    (b) La probabilidad de haber obtenido un 2 dado que se obtuvo un número par. [Rta: $^{1}/_{6}$]

18. Se tira un par de dados, obteniéndose a y b como resultado. Considere los siguientes sucesos: $A = \{\text{a es impar}\}$; $B = \{\text{b es impar}\}$; $C = \{\text{a+b es impar}\}$ y $D = \{\text{al menos } a \text{ o } b \text{ es múltiplo de } 3\}$.
    (a) Muestre que A, B y C no son independientes, aunque sí son independientes de a pares.
    (b) ¿Son independientes C y D?

19. Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.7$ y $P(B) = r$. Cuánto debe valer r para que los sucesos A y B sean:
    (a) mutuamente excluyentes [Rta: r=0.3]
    (b) independientes [Rta: r=0.5]

20. La evaluación de una materia consta de dos parciales. El 5% de los estudiantes desaprueba el primer parcial, el 6% el segundo, y el 90% aprueba ambos.

(a) Muestre que las desaprobaciones de ambos parciales no son sucesos independientes.
(b) De los que no aprueban el primer parcial, ¿qué porcentaje desaprueba el segundo? [Rta: 0.2]
(c) Encuentre el espacio muestral e identifique los sucesos mencionados.

21. *¿Un juego de ingenio?* Un condenado recibe el siguiente indulto del rey (experto en probabilidades): Se le darán dos cajas, una con 50 bolitas blancas y la otra con 50 bolitas negras. El condenado podrá redistribuir las bolitas en las cajas, conservando el total de bolitas y sin dejar ninguna caja vacía. Al otro día, el rey elegirá una caja, de la cual extraerá una bolita. Si ésta fuera blanca, el condenado será liberado. ¿Cómo debe distribuir el condenado las bolitas para maximizar la probabilidad de ser liberado?

Teorema de Bayes

22. Un análisis de sangre tiene una efectividad del 97% para una cierta enfermedad, pero da un falso positivo en 0.4% de los casos en pacientes sanos. Se sabe que el 0.5% de la población sufre esta enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad que una persona esté realmente enferma cuando el test le da positivo? [Rta: 0.55]

23. Una sonda espacial pasa por las cercanías de Io, una de las lunas de Júpiter. Io es el objeto geológicamente más activo del Sistema Solar, y durante el tiempo de contacto con la sonda hay una probabilidad de 70% que dentro del campo de visión de esta se produza una erupción volcánica. La sonda envía muchos datos a la Tierra, entre ellos si observó o no una erupción. Por perturbaciones con el campo magnético solar, sin embargo, hay una probabilidad del 10% de que la información recibida de la sonda sea incorrecta. Si el sistema reporta que observó una erupción, cuál es la probabilidad de que realmente lo haya hecho? [Rta: 0.9545]

24. Un haz de partículas compuesto por electrones, protones y partículas α (núcleos de Helio), atraviesa un detector Čerenkov, que tiene una eficiencia de 95%, 50% y 30% para cada una de ellas, respectivamente. El flujo de electrones es el doble que el de protones o que el de partículas α.
   (a) Si se elije una partícula cualquiera del haz, ¿cuál es la probabilidad de que sea detectada? [Rta: 0.675]
   (b) Si para una dada partícula el detector da señal, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de un electrón? [Rta: 0.704]

25. Una caja contiene tres monedas, dos normales y una con caras de ambos lados. Se escoge una moneda y se la lanza cuatro veces sucesivas, obteniéndose siempre cara.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad que sea la moneda de dos caras? [Rta: $^8/_9$]
   (b) Suponga que volvemos a tirar la misma moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara? [Rta: $^{17}/_{18}$]

....

Fórmulas útiles

Para hacer las cuentas puede requerir el uso de la aproximación de Stirling para el factorial:

$$\ln(n!) \approx S(n) \equiv n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \frac{1}{12n}.$$

Notar que si a o b son muy grandes entonces no podremos calcular un número combinatorio $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ en forma inmediata. Pero si aplicamos el logaritmo y luego exponenciamos $\binom{a}{b} \approx \exp\left[S(a) - S(b) - S(a-b)\right]$, que es de fácil implementación usando cualquier lenguaje de programación.