Intervalos de confianza para los parámetros de una distribución normal

- Tenemos muestras de una población Normal $N(\mu, \sigma)$
- Veremos como estimar *rangos de confianza* para estos parámetros en 4 casos distintos
  1. rango para μ, con σ conocido
  2. rango para μ, con σ desconocido
  3. rango para σ, con μ conocido
  4. rango para σ, con μ desconocido

- Construimos función de los datos y de los parámetros
  - $P(a \leq Y(\underline{x}, \mu, \sigma) \leq b) = \gamma$
- Estudiar la distribución de la nueva variable aleatoria Y (¿es un estadístico?) para poder calcular los límites de confianza a, b.
  - $\int_a^b f_Y(y)dy = \gamma = F_Y(b) - F_Y(a)$
- a, b *no son únicos*. Limites centrales, a una cola, a dos colas,...
- *Monte Carlo* para generar números aleatorios gaussianos con distribución $N(\mu = 10, \sigma = 2)$
  - Una muestra es una terna $\{x_1, x_2, x_3\}_i$.
  - $N = 1000$ experimentos.
  - Cada medición de la terna es independiente de las otras.
  - Las repeticiones son independientes.
  - Muestreos *con sustitución*.

Intervalo de confianza para μ, con σ conocido

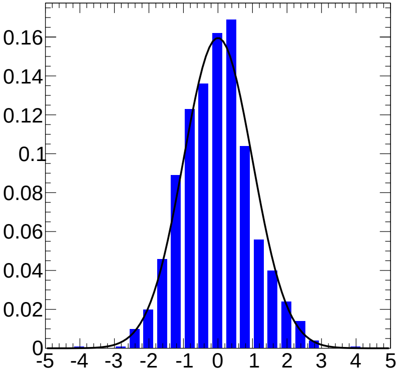
- $P(a \leq Y(\underline{x}, \mu, \sigma) \leq b) = \gamma \quad \rightarrow \quad P(L(\underline{x}, \sigma) \leq \mu \leq U(\underline{x}, \sigma)) = \gamma$
- $I = [L(\underline{x}, \sigma), U(\underline{x}, \sigma)]$
- σ puede formar parte de los estadísticos, en este caso!

Intervalo para μ, con σ conocido

- La función natural para estimar μ es la media: $Y = \bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$.
- Éste estadístico tiene distribución $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, de modo que la variable

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

tiene distribución $N(0, 1)$



Intervalo para μ, con σ conocido

- El contenido de probabilidad de una distribución $N(0,1)$ entre los límites a y b es

$$P\left(a \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le b\right) = \int_a^b N_t(0,1)dt = 0.95$$

  o de modo equivalente

$$P\left(\bar{x} + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

- Intervalo central $a = -b \approx 2$ (por ser standard normal!).

Intervalo para μ, con σ conocido

- Antes de la medición, existe un 95% probabilidad que el intervalo aleatorio

$$I = \left[\bar{x} + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

  encierre al verdadero valor μ.
- El intervalo en aleatorio, pues depende de variables aleatorias.
- Suceso A = "el intervalo aleatorio encierra al valor real de μ";
  - P(A) = 0.95
- De la simulacion resulta que de $N = 1000$ realizaciones del experimento, en $\sim$ 960 el verdadero valor μ está dentro del intervalo I.
  - ¿Es razonable?
- Llamemos "éxito" a que μ esé contenido en el intervalo I.
- El número de éxitos es una variable aleatoria que tiene distribución binomial $B_Y(N = 1000, p = \gamma = 0.95)$ con media: $N\gamma = 950$ y varianza: $N\gamma(1 - \gamma) \approx (6.892)^2$.

Intervalo de confianza para μ, con σ desconocido

Intervalo para μ, con σ desconocido

- σ es ahora una incógnita más del problema.
- La estimación de μ debe realizarse en ausencia del dato σ.
- ¿Podemos usar

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2$$

  en reemplazo de σ^2?

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \longrightarrow \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{s^2}/\sqrt{n}} \sim ???$$

- $U = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiene distribución $N(0,1)$
- $W = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ está distribuida como $\chi^2_{(n-1)}$ (pg 136 Frodesen).
- la variable cociente

$$Z = \frac{U}{\sqrt{W/(n-1)}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{s^2}/\sqrt{n}}$$

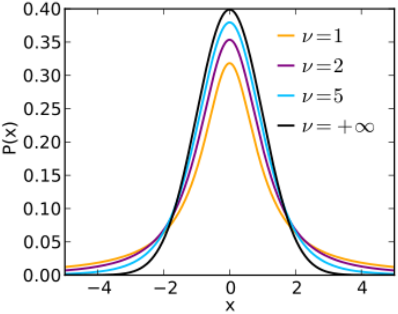
  por construcción elimina el parámetro desconocido σ y deja como único parámetro incógnita el μ.

Intervalo para μ, con σ desconocido

- la variable cociente

$$Z = \frac{U}{\sqrt{W/(n-1)}} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{(n-1)}/(n-1)}}$$

tiene distribución t-Student con n-1 grados de libertad. (pg 141, Frodesen)



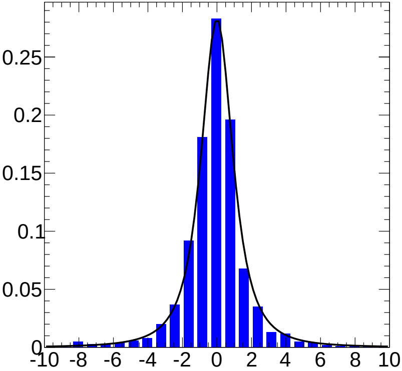
$$f_t(t;\nu) = \frac{\Gamma\left(^{(\nu+1)}/_2\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(^{\nu}/_2\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{1/2(\nu+1)}}$$

- $\nu = 1$ da Cauchy
- $\nu \to \infty$ da Normal

Intervalo para μ, con σ desconocido

- Con esta variable aleatoria el contenido de probabilidad alcanza el grado de confianza $\gamma = 0.05$ para

$$P\left(a \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2}/\sqrt{n}} \leq b\right) = 0.95$$



Intervalo para μ, con σ desconocido

- Como $t_{(2)}$ es simétrica respecto de 0 podemos pedir la relación $a = -b$ y así

$$P\left(-b \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{s^2}/\sqrt{n}} \leq b\right) = \int_{-b}^{b} t_{(2)}(t')dt' = F(b;2) - F(-b;2) = 0.95$$

- $F(-b;2) = 1 - F(b;2)$, implica $F(b;2) = (1+0.95)/2$, para t-Student con 2 grados de libertad corresponde a $b = 4.303$.

- $$P\left(\bar{x} - 4.303\frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 4.303\frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

  existe una probabilidad 0.95 de que el intervalo

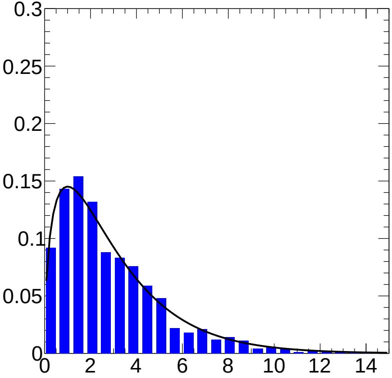
$$\left[\bar{x} - 4.303\frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 4.303\frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}\right]$$

  incluya al verdadero valor de μ. Del valor esperado 950 el experimento aleatorio de $N = 1000$ ternas dio 961 en este caso dentro de la fluctuación estadística de ~ 2 desviaciones estándar respecto de la media (950 ± 6.89).

Intervalo de confianza para σ, con μ conocido

Intervalo para σ^2, con μ conocido

- Podemos probar con $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2$, que es un estimador no sesgado de σ^2.
- Pero no queremos estimar σ^2, sino construir un intervalo para σ^2.
- Probemos mejor con: $V = \dfrac{n}{\sigma^2}S^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{x_j-\mu}{\sigma^2}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$



Intervalo para σ^2, con μ conocido

$$P\left(a \leq \frac{nS^2}{\sigma^2} \leq b\right) = P\left(\frac{nS^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS^2}{a}\right) = 0.95$$

- Infinitos posibles intervalos $[a; b]$ que dan una probabilidad 0.95 de contener a σ^2. Intervalo central (¿puede ser $a = -b$?)

$$P\left(\chi^2_{(3)} < a\right) = P\left(\chi^2_{(3)} > b\right) = (1 - 0.95)/2 = 0.025$$

- Por tabla $a = 0.216$ y $b = 9.348$. Por lo tanto el intervalo aleatorio de confianza para 0.95 es

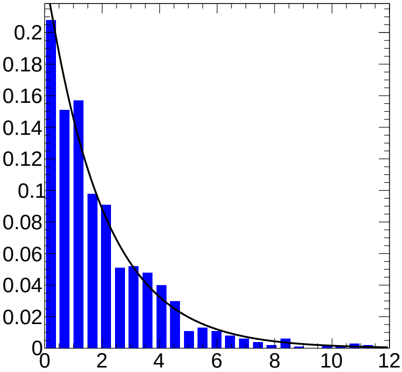
$$I = \left[\frac{nS^2}{9.348}; \frac{nS^2}{0.216}\right]$$

- De las 1000 corridas aleatorias sólo 940 contuvieron a σ^2 dentro del intervalo, de nuevo consistente considerando la fluctuación binomial estimada (950 ± 6.89).

Intervalo de confianza para σ, con μ desconocido

Intervalo para σ^2, con μ desconocido

- Debemos eliminar el parámetro μ de la variable aleatoria a considerar.
- Podemos probar con $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2$, estimador no sesgado de σ^2.
- Transformémoslo en una variable de distribución conocida:
  $W = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j - \bar{x}}{\sigma}\right)^2$ que tiene distribución $\chi^2_{(n-1)}$.



Intervalo para σ^2, con μ desconocido

$$P\left(a \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq b\right) = P\left(\frac{(n-1)s^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{a}\right) = 0.95$$

- Utilizando un intervalo central,

$$P\left(\chi^2_{(2)} < a\right) = P\left(\chi^2_{(2)} > b\right) = (1-0.95)/2 = 0.025$$

por tabla correponde a $a = 0.0506$ y $b = 7.378$:

$$I = \left[\frac{(n-1)s^2}{7.378}; \frac{(n-1)s^2}{0.0506}\right]$$

- En un caso de las 1000 corridas aleatorias sólo 947 dieron a σ^2 dentro del intervalo, de nuevo consistente considerando la fluctuación binomial (950 ± 6.89).

Comentario general

- En los cuatro casos, la probabilidad de que el intervalo aleatorio encierre al valor real del parámetro la fijamos en $\gamma = 0.95$.
- La variable aleatoria: Y="número de veces el intervalo aleatorio encierra al valor real del parámetro", tiene distribución binomial $B_Y(N, \gamma)$.
- Esto ocurre bajo la *interpretación frecuentista* de la probabilidad.
- Por lo tanto, $(1 - \gamma)100\%$ de las veces, el intervalo no contendra al verdadero valor del parámetro desconocido que queremos estimar.