Estadística en Física Experimental - 2do Parcial 2009

1. La ley de Van der Waals, $(P + a/V^2)(V - b) = RT$, relaciona la presión P, volumen V y temperatura T de una gas no ideal. En la aproximación $b/V \ll 1$ se puede escribir como

$$P = \frac{RT}{V} + \frac{RT - a}{V^2} + \frac{a\,b}{V^4} = \frac{A_1}{V} + \frac{A_2}{V^2} + \frac{A_3}{V^4}$$

a. Para extraer los coeficientes a y b de un cierto gas se determinan A_1, A_2 y A_3 a partir de un ajuste de cuadrados mínimos a datos de la presión para distintos volúmenes, $\{V_i, P_i\}$, $i = 1, 5$. La presión se mide como $P = k_1 I + k_2$, a partir de la corriente I de un manómetro transductor. Los coeficientes de calibración k_1 y k_2 tiene errores sistemáticos σ_1 y σ_2 independientes. Considere que los errores en la medición de la corriente I y del volumen V son despreciables. A partir de la fórmula general de cuadrados mínimos, $\vec{\theta} = (A^T V^{-1} A)^{-1} A^T V^{-1} \vec{y}$, exprese en términos de los datos las matrices A y V que permiten extraer A_1, A_2 y A_3 con sus errores.

b. Suponga ya hecho el ajuste y obtenido A_1, A_2 y A_3 con sus errores. Calcule cómo se determinan a y b más su matriz de covarianza a partir de éstos.

2. Se quiere determinar μ a partir de n mediciones independientes $X_1, \ldots, X_n$ de una variable aleatoria con densidad de probabilidad $f(x|\mu) = e^{-(x-\mu)}$, $x \geq \mu$.
a. Encuentre la estadística de máxima verosimilitud para μ, que notamos $\hat{\mu}$.
b. $\hat{\mu}$ tiene densidad de probabilidad $f(\hat{\mu}|\mu) = ne^{-n(\hat{\mu}-\mu)}$, $\hat{\mu} \geq \mu$. Se realiza la medición y se obtiene $\hat{\mu}_{obs}$. Encuentre un intervalo de confianza $1 - \alpha$ para μ.
c. En vez de intervalo de confianza, a partir de los datos se desea hacer el test $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$, tomando como zona crítica $e^{-n(\hat{\mu}-\mu_0)} l k$. Encuentre k correspondiente a un nivel de confianza de α.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muesta al azar de una población con distribución $\text{Gama}(\alpha, \beta) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha-1)} e^{-\beta x}$.
a. Encuentre un par de estimadores suficientes para los parámetros α y β.
b. Halle el estimador de MV para β supuesto α conocido.

4. Antes de realizar un experimento se considera por datos previos que el valor de una magnitud física positiva a es 8 con una incerteza ($\sqrt{\text{Var}(a)}$) de 2. El experimento consiste en medir n veces una variable aleatoria X cuya densidad de probabilidad depende de a via $f(x|a) = a x^{a-1}$, $0 < x < 1$. Suponga como prior una distribución Gama.
a. Exprese el estimador bayesiano de a y de su error en términos de las mediciones $\{X_i\}$.
b. Encuentre la cota superior 90% CL de a. Deje expresado el resultado como un cuantil.

5. En una urna hay 5 bolitas negras y 4 blancas. El experimento consiste en que Juan extrae 4 bolitas y reporta el número k de ellas que fueron negras. Pero no sabemos si Juan extrajo las bolitas con o sin reposición. Se hace el experimento y se obtiene $k = 4$.
Considere como hipótesis H0 y H1 las siguientes:
H0: Juan extrajo sin reposición
H1: Juan extrajo con reposición
Calcule el valor-P del test estadístico y diga si puede rechazar H0 con un nivel de significancia del 5 %. Obtenga también la potencia del test, y discuta el resultado en términos del error de tipo 2.