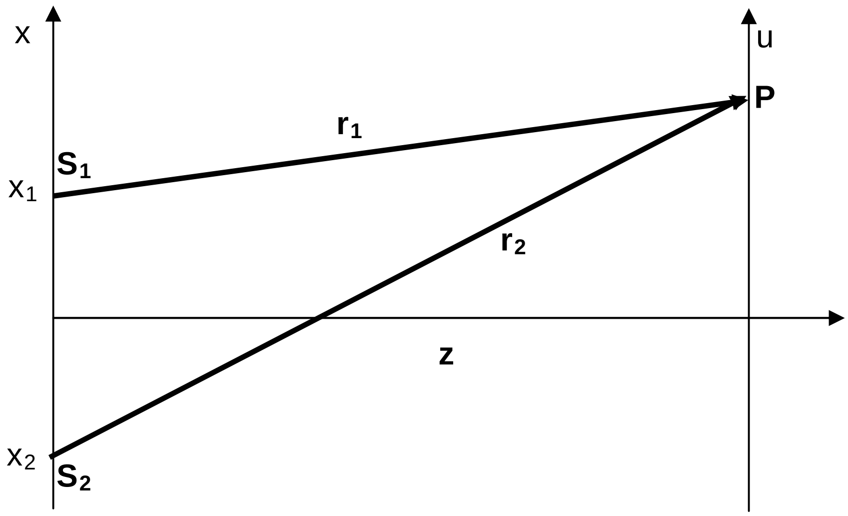
Interferencia entre dos ondas de sonido

Supongamos que tenemos dos emisores de sonido que emiten ondas esféricas a la misma frecuencia. Consideremos un punto P ubicado a distancia r_1 de la primera fuente y a distancia r_2 de la segunda, como se indica en la figura:



Si $\Psi_1(P)$ representa la perturbación producida por S_1 en *P* y $\Psi_2(P)$ la producida por S_2 en *P*, la perturbación resultante será:

$$\Psi_T = \Psi_1(P) + \Psi_2(P) = A(r_1)\, e^{i(kr_1 - wt)} + B(r_2)\, e^{i(kr_2 - wt)}$$

Siendo:

A y B: las amplitudes que dependen de r
k: el número de ondas
w: la frecuencia
t: el tiempo.

$$r_1 = \sqrt{(u - x_1)^2 + z^2} \quad ; \qquad r_2 = \sqrt{(u - x_2)^2 + z^2}$$

Definiendo:

$$O = \frac{A+B}{2} \qquad \text{y} \qquad \Delta = \frac{A-B}{2}$$

tenemos que

$$\Psi_T \;=\; \left(O+\Delta\right)e^{i(kr_1\,-\,wt)}+\left(O-\Delta\right)e^{i(kr_2\,-\,wt)}$$

que puede reordenarse como

$$\Psi_T \;=\; O\left(e^{i(kr_1\,-\,wt)}+e^{i(kr_2\,-\,wt)}\right)+\Delta\left(e^{i(kr_1\,-\,wt)}-e^{i(kr_2\,-\,wt)}\right)$$

$$\Psi_T \;=\; 2\,O\,e^{i\left[\frac{k(r_2+r_1)}{2}\,-\,wt\right]}\;\cos\left(\frac{k(r_2-r_1\,)}{2}\right)\;\;-\;2i\Delta\;e^{i\left[\frac{k(r_2+r_1)}{2}\,-\,wt\right]}\;sen\left(\frac{k(r_2-r_1\,)}{2}\right)$$

Ahora bien, hasta ahora hemos usado notación exponencial, sin embargo, como es sabido, la magnitud que tiene sentido físico es la parte real de la perturbación. Para simplificar la notación vamos a hacer las siguientes definiciones:

$$C=2\,O\cos\left[\frac{k\left(r_2-r_1\right)}{2}\right];\qquad D=2\,\Delta\,sen\left[\frac{k\left(r_2-r_1\right)}{2}\right]$$

$$\Phi=\frac{k\left(r_2+r_1\right)}{2}\qquad;\qquad\Theta=\frac{k\left(r_2+r_1\right)}{2}+\frac{\pi}{2}$$

Con lo cual podemos escribir:

$$\Re\left[\Psi_T\right]=\;C\cos\left(\Phi-wt\right)\;\;-\;D\cos\left(\Theta-wt\right)$$

Que también podemos expresarlo como:

$$\Re\left[\Psi_T\right]=\;C\left(\cos\left(\Phi\right)\cos\left(wt\right)+sen\left(\Phi\right)sen\left(wt\right)\right)-D\left(\cos\left(\Theta\right)\cos\left(wt\right)+sen\left(\Theta\right)sen\left(wt\right)\right)$$

$$\Re\left[\Psi_T\right]=\;\cos\left(wt\right)\left(C\cos\left(\Phi\right)-D\cos\left(\Theta\right)\right)+sen\left(wt\right)\left(C\,sen\left(\Phi\right)-D\,sen\left(\Theta\right)\right)$$

Analicemos que medimos en el osciloscopio: es una señal oscilatoria en el tiempo cuya amplitud se modula a medida que desplazamos el detector. Es decir, matemáticamente podría expresarse como una función del tipo

$$M\,\cos\left(wt+\varphi\right)=M\,\cos\left(wt\right)\cos\left(\varphi\right)-M\;sen\left(wt\right)sen\left(\varphi\right)$$

Queremos saber cuál es esa modulación ***M*** y cómo está relacionada con la perturbación. Para ello basta plantear las siguientes identidades

$$M\cos(\varphi) = C\cos(\Phi) - D\cos(\Theta)$$
$$M\,sen(\varphi) = -\left(C\,sen(\Phi) - D\,sen(\Theta)\right)$$

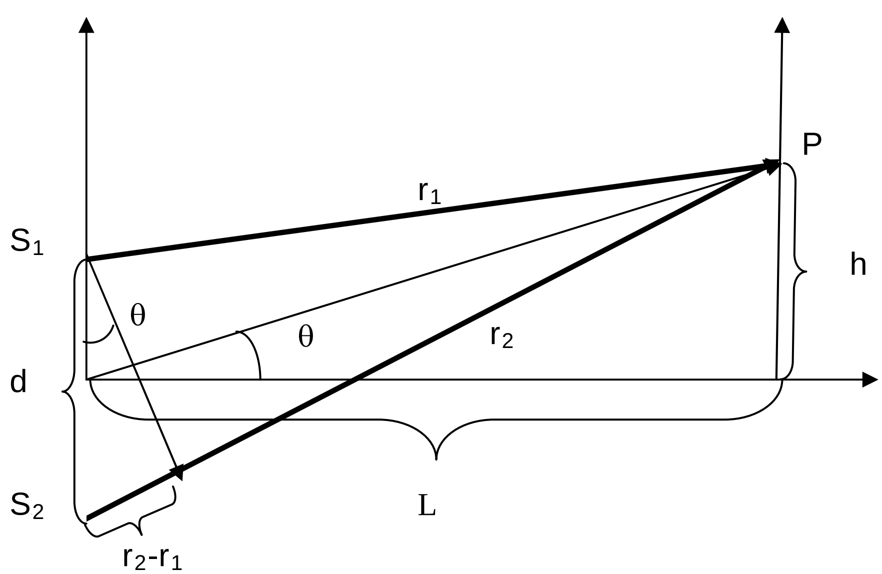
Elevando al cuadrado y sumando ambas ecuaciones tenemos que

$$M^2\cos^2(\varphi) = C^2\cos^2(\Phi) + D^2\cos^2(\Theta) - 2CD\cos(\Phi)\cos(\Theta)$$
$$M^2\,sen^2(\varphi) = C^2\,sen^2(\Phi) + D^2\,sen^2(\Theta) - 2CD\,sen(\Phi)\,sen(\Theta)$$
$$M^2 = C^2 + D^2 - 2CD\cos(\Phi - \Theta)$$

Dado que $\Phi - \Theta = -\frac{\pi}{2}$ y reemplazando ***C*** y ***D*** por sus expresiones llegamos a

$$M = \sqrt{4O^2\cos^2\left[\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right] + 4\Delta^2\,sen^2\left[\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right]}$$

Al final de este documento se muestra un programa hecho en *Matemática* que permite analizar esta modulación como función de la posición, teniendo como parámetros la disposición geométrica de las fuentes y el detector así como las amplitudes de las fuentes.
Es fácil ver que los máximos se obtienen cuando $r_2 - r_1 = \lambda$, por lo que en la aproximación paraxial tenemos que:



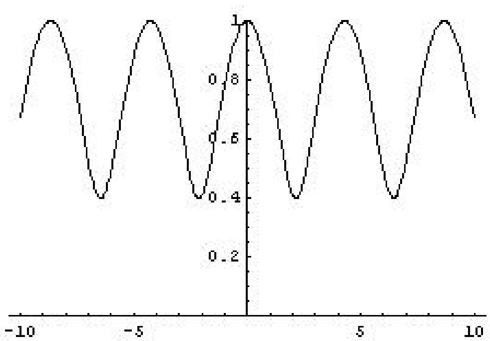
$$r_2 - r_1 = sen(\theta) / d \cong \frac{h \ d}{L}$$

Luego, puede definirse la interfranja como: $i = \frac{\lambda \ L}{d}$

programa

```
x1 = 5;
x2 = -5;
z = 50;
r1 = Sqrt[(u - x1) ^2 + z^2];
r2 = Sqrt[(u - x2) ^2 + z^2];
a = 1;
delta = 0.4;
k = 2 * Pi / 0.85;
f1[u_] := Sqrt[a^2 * Cos[k * (-Sqrt[(u - x1) ^ 2 + z ^2] + Sqrt[(u - x2) ^2 + z^2]) / 2]^2 +
    delta^2 * Sin[k * (-Sqrt[(u - x1) ^ 2 + z ^2] + Sqrt[(u - x2) ^2 + z^2]) / 2]^2];


Plot[f1[u], {u, -10, 10}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {0, 1}]
```




```
- Graphics -
```