Grupos de Lie y ecuaciones diferenciales

Guía N° 4- Algebras de Lie - 2° cuatrimestre 2001

Problema 1: Para el grupo de transformaciones de movimientos rígidos en el plano (problema 1.7)

(a) Calcule la tabla de conmutadores.

(b) Compruebe que si un sistema tiene simetría de rotación en el plano (x, y) y simetría de traslación en dirección x, también tiene simetría de traslación en dirección y.

Problema 2: El grupo de similitud en el plano consiste en dilataciones uniformes y movimientos rígidos en R^2:

$$\bar{x} = \mathrm{e}^{\varepsilon_4} (x \cos \varepsilon_1 + y \operatorname{sen} \varepsilon_1) + \varepsilon_2$$
$$\bar{y} = \mathrm{e}^{\varepsilon_4} (-x \operatorname{sen} \varepsilon_1 + y \cos \varepsilon_1) + \varepsilon_3$$

(a) Obtenga una base del álgebra y calcule la tabla de conmutadores.

(b) Verifique que el grupo de movimientos rígidos es un subgrupo del grupo de similitud, comparando sus respectivas álgebras.

Problema 3: Para el grupo de Lie SL(3,R) de transformaciones proyectivas sobre el plano

(a) Calcule la tabla de conmutadores.

(b) Verifique que el grupo de similitud es un subgrupo de SL(3,R).

(c) Muestre que los generadores infinitesimales $x\partial_x, y\partial_x, x\partial_y, y\partial_y$ forman una subálgebra de dimensión 4, y halle el subgrupo de transformaciones correspondiente.

Problema 4: Considere el álgebra de Lie del grupo especial lineal SL(2,R)

(a) Elija una base para sus generadores infinitesimales y calcule la tabla de conmutadores.

(b) Repita el cálculo utilizando la representación matricial de esta base.

(c) Obtenga las constantes de estructura.

(d) Verifique que el álgebra sl(2,R) es simple.

Problema 5: Utilizando los generadores infinitesimales de la acción del grupo SL(2,R) sobre la recta real (problema 1.9)

(a) Calcule la tabla de conmutadores.

(b) Verifique que esta es otra representación del algebra del problema 4.

Problema 6: Considere estas dos bases de generadores infinitesimales:

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x - y\partial_y, \qquad X_3 = x^2\partial_x - 2xy\partial_y \tag{1}$$

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x - y\partial_y, \qquad X_3 = x^2\partial_x - (2xy+1)\,\partial_y \tag{2}$$

(a) Verifique que estas bases generan otras dos representaciones puntualmente inequivalentes del álgebra sl(2,R).
(b) Obtenga la base (1) prolongando la base del problema (1.9) y haciendo un cambio de variables.
(c) Análogamente obtenga la base (2) a partir de la (1).

Problema 7: Considere el espacio vectorial R^3 con el producto vectorial usual

(a) Pruebe que este espacio forma un álgebra de Lie con el conmutador

$$[\vec{v}, \vec{w}] = \vec{v} \times \vec{w}, \qquad \vec{v}, \vec{w} \in \mathrm{R}^3$$

(b) ¿Cuáles son las constantes de estructura de este álgebra para la base cartesiana de R^3?.
(c) Pruebe que esta álgebra de Lie es isomorfa a so(3), el álgebra de Lie del grupo de rotaciones tridimensional SO(3).
(d) Muestre que este isomorfismo puede construirse de manera que a cada vector $\vec{v} \in \mathrm{R}^3$ le corresponda un generador infinitesimal de un grupo monoparamétrico de rotaciones derechas alrededor del eje en la dirección de $\vec{v}$.
(e) Compruebe que el álgebra so(3) es simple y no tiene subálgebras de dimensión 2.

Problema 8: Verifique que el álgebra so(3) también se puede realizar en términos de estos generadores de transformaciones sobre el plano:

$$X_1 = y\partial_x - x\partial_y, \qquad X_2 = \frac{1}{2}\left(1 + x^2 - y^2\right)\partial_x + xy\partial_y$$

$$X_3 = xy\partial_x + \frac{1}{2}\left(1 - x^2 + y^2\right)\partial_y$$

Problema 9: Considere las álgebras de Lie generadas por:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x + y\partial_y, \quad X_3 = \partial_y, \tag{1}$$

$$X_1 = 3x\partial_x + 2y\partial_y, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_x, \quad X_4 = y\partial_x, \tag{2}$$

$$X_1 = \partial_y, \quad X_2 = x\partial_y, \quad X_3 = x^2\partial_y, \quad X_4 = \partial_x, \quad X_5 = x\partial_x, \tag{3}$$

(a) Pruebe que son solubles.
(b) Halle una base canónica.