Grupos de Lie y ecuaciones diferenciales

Guía N° 1- Grupos de Lie - 2° cuatrimestre 2001

Problema 1: Para cada una de estas transformaciones del plano (x, y), dependientes de un parámetro

1. $\bar{x} = x + \varepsilon, \quad \bar{y} = y, \quad \varepsilon \in \mathrm{R}$
2. $\bar{x} = \alpha x, \quad \bar{y} = \alpha^2 y, \quad 0 < \alpha < \infty$
3. $\bar{x} = x + 2\varepsilon, \quad \bar{y} = y + 3\varepsilon$
4. $\bar{x} = x - \varepsilon y, \quad \bar{y} = y + \varepsilon x$
5. $\bar{x} = x + \varepsilon^2, \quad \bar{y} = y$
6. $\bar{x} = x + \varepsilon, \quad \bar{y} = \frac{xy}{x+\varepsilon}$

Verifique si es un grupo de Lie. En caso afirmativo

(a) Exprese la ley de composición del parámetro. Si no es de la forma canónica, halle la transformación a esta forma.
(b) Halle el dominio de definición de la transformación. Dibuje las órbitas que pasan por los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$, si es que estan dentro de este dominio.

Problema 2: Para los grupos de Lie del problema (1) halle:

(a) El generador infinitesimal.
(b) Las variables canónicas.
(c) El invariante.

Problema 3: Considere el grupo de rotaciones en el plano SO(2):

$$\bar{x} = x \cos \varepsilon + y \operatorname{sen} \varepsilon$$

$$\bar{y} = -x \operatorname{sen} \varepsilon + y \cos \varepsilon$$

(a) Calcule el generador infinitesimal.
(b) Sume la serie de Lie.
(c) Integre el problema de valor inicial.
(d) Halle las cooordenadas canónicas.
(e) Determine los puntos y las familias de curvas invariantes.

Problema 4: Considere las transformaciones de coordenadas de Lorentz debidas al cambio de sistema de referencia

$$\bar{t} = \gamma \left(t - vx/c^2 \right), \qquad \bar{x} = \gamma \left(x - vt \right)$$

donde (t, x) son las coordenadas en el sistema A, $(\bar{t}, \bar{x})$ son las coordenadas en el sistema B, v es la velocidad relativa del sistema B respecto al A y $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

(a) Verifique que estas transformaciones son un grupo de Lie (el grupo de Lorentz restringido en el plano) con parámetro v. ¿Cuál es la ley de composición?.

(b) Reexprese la transformación de Lorentz en términos del parámetro canónico $\varepsilon = \operatorname{arctanh}(v/c)$, también denominado parámetro hiperbólico o rapidez

$$c\bar{t} = ct \cosh \varepsilon - x \operatorname{senh} \varepsilon$$

$$\bar{x} = -ct \operatorname{senh} \varepsilon + x \cosh \varepsilon$$

(c) Repita los cálculos del problema (3).

Problema 5: Encuentre los grupos de transformaciones y las coordenadas canónicas correspondientes a los generadores infinitesimales:

(a)
$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

(b)
$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

(c)
$$X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

Problema 6: Para el generador infinitesimal

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{y^2}{4} + \frac{x}{2}\right) z\frac{\partial}{\partial z}$$

(a) Encuentre las funciones invariantes, los puntos invariantes y las coordenadas canónicas.

(b) Determine el grupo de Lie uniparamétrico.

Problema 7: Considere el grupo de movimientos rígidos en R^2

$$\bar{x} = x \cos \varepsilon_1 + y \operatorname{sen} \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\bar{y} = -x \operatorname{sen} \varepsilon_1 + y \cos \varepsilon_1 + \varepsilon_3$$

(a) Halle sus generadores infinitesimales.

(b) Verifique que estos generadores preservan la distancia entre cualquier par de puntos en R^2.

Problema 8: Considere la acción de las matrices 2×2 reales de determinante unitario, como transformaciones lineales sobre el espacio R^2.

(a) Verifique que es un grupo de Lie (su nombre es SL(2,R)), y determine su dimensión.
(b) Obtenga los generadores infinitesimales.

Problema 9: Si cada punto (x, y) en R^2 se identifica con $(\lambda x, \lambda y)$, para todo $\lambda \in \mathrm{R}$, obtenemos el espacio proyectivo real unidimensional $\mathrm{P}_1(\mathrm{R})$. Este espacio es equivalente a la recta real mas el punto en infinito. En la porción de $\mathrm{P}_1(\mathrm{R})$ donde $x \neq 0$ se puede usar la coordenada inhomogénea $u = y/x$. Si el grupo SL(2,R) actúa sobre R^2

(a) Escriba la acción de SL(2,R) sobre $\mathrm{P}_1(\mathrm{R})$ como una ley de transformación para la coordenada u.
(b) Determine la dimensión de este grupo.
(c) Calcule sus generadores infinitesimales.
(d) Describa la acción de cada subgrupo uniparamétrico.

Problema 10: El espacio proyectivo $\mathrm{P}_2(R)$ se obtiene identificando cada punto $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$ con $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $\lambda \in \mathrm{R}$. Este espacio es equivalente al plano real mas el punto en infinito. En la porción de $\mathrm{P}_2(\mathrm{R})$ donde $x \neq 0$, se pueden usar las coordenadas inhomogéneas $u = y/x$, $v = z/x$. Si SL(3,R) actúa sobre R^3

(a) Escriba la acción de SL(3,R) sobre $\mathrm{P}_2(R)$ como una ley de transformación para las coordenadas u y v.
(b) Determine la dimensión de este grupo.
(c) Verifique que en $\mathrm{P}_2(\mathrm{R})$ transforma rectas en rectas, y halle la ley de transformación de la pendiente y la ordenada al origen.
(d) Calcule los generadores infinitesimales.
(e) Describa la acción de cada subgrupo uniparamétrico.