Grupos de Lie y ecuaciones diferenciales

Guía N° 2- Simetrías de ecuaciones diferenciales - 2° cuatrimestre 2001

Problema 1: Para los grupos de Lie de los problemas 1.1 y 1.3 halle

(a) La segunda extensión del grupo.
(b) La segunda prolongación del generador infinitesimal.
(c) Los invariantes diferenciales hasta segundo orden

Problema 2: Para la ecuación de Riccati

$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0$$

(a) Encuentre un grupo de simetría de dilataciones.
(b) Halle las variables canónicas de este grupo y transforme la ecuación a estas variables.
(c) Halle los invariantes diferenciales del grupo hasta primer orden. ¿Qué observa?.

Problema 3: Considere la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = \omega\left(\frac{y}{x}\right)$$

(a) Verifique que esta ecuación admite el grupo de dilataciones

$$\bar{x} = \mathrm{e}^{\varepsilon} x, \qquad \bar{y} = \mathrm{e}^{\varepsilon} y.$$

Hágalo tanto para la transformación finita como la infinitesimal.
(b) Transforme la ecuación a las variables canónicas.

Problema 4: Para cada una de las siguentes ecuaciones diferenciales de primer orden:

1. $y' = F(y)$
2. $y' = F(x)$
3. $y' = F(kx + ly)$
4. $y' = x^{k-1} F(y/x^k)$
5. $xy' = F\left(x\mathrm{e}^{-y}\right)$
6. $y' = yF\left(y\mathrm{e}^{-x}\right)$

donde F es una función arbitraria y k, l son constantes.

(a) Halle una simetría por inspección.

(b) Verifique que esta simetría satisface la condición de invariancia infinitesimal.

Problema 5: Para la ecuación de partícula libre

$$y'' = 0$$

(a) Halle todos los generadores infinitesimales del grupo de simetría. ¿Cuál es su dimensión?.
(b) Compare con los resultados del problema 1.10. ¿Qué conclusión saca?.

Problema 6: Encuentre los generadores infinitesimales admitidos por

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \mathrm{e}^{y} = 0$$

Problema 7: Considere la ecuación del oscilador armónico

$$y'' + y = 0$$

(a) Halle las simetrías admitidas por esta ecuación. Compare la dimensión de este grupo con el de la ecuación de partícula libre.
(b) Halle alguna transformación puntual que lleve de la ecuación del oscilador armónico a la de partícula libre. Sugerencia: pruebe $\tilde{y} = yf(x)$, $\tilde{x} = g(x)$.
(c) Reobtenga, mediante esta transformación, los generadores infinitesimales hallados en el problema 5.
(d) ¿Cómo se transforman las constantes de integración de las soluciones?.

Problema 8: Considere la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' = p(x)y' + q(x)y$$

(a) Demuestre que el cálculo de su grupo de simetrías equivale a resolverla.
(b) Calcule los generadores de simetrías suponiendo conocida la base $\{y_1(x), y_2(x)\}$ de soluciones independientes.

Problema 9: Halle las simetrias puntuales de $y''' = 0$.

Problema 10: Muestre que las ecuaciones

1. $y'' = xy + \mathrm{e}^{y'} + \mathrm{e}^{-y'}$
2. $y'' = \tan y'(y' \tan y - 1/x)$

no admiten ninguna simetría de Lie puntual.