

# Estadística en Física Experimental

1<sup>er</sup> cuatrimestre de 2011

## Guía de Problemas No.1

### Probabilidad Elemental - Combinatoria - Teorema de Bayes

1. Discuta cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios. Para aquellos que lo sean defina la(s) variable(s) aleatoria(s) y encuentre el espacio muestral. En los casos en que dicho espacio sea finito, calcule su cardinal.
  - (a) Se determina el resultado de tirar una moneda cuatro veces.
  - (b) Se determina el resultado de tirar cuatro monedas indistinguibles.
  - (c) Se tira una moneda cuatro veces, y se determina cuándo aparece la primera ceca.
  - (d) Se cuenta el número de libros de una biblioteca.
  - (e) Se cuenta el número de galaxias en un volumen de  $1000 \text{ Mpc}^3$  a una distancia de  $3000 \text{ Mpc}$  de la Tierra.<sup>1</sup>
  - (f) Se determina el número de fotones provenientes de una estrella dada en un intervalo de tiempo de  $1000 \text{ s}$ .
  - (g) Se determina el número de fotones provenientes de una estrella dada, detectados por el telescopio Hubble entre las 15:25 y las 15:26 del 20 de julio de 2007.
  - (h) Se determina el tiempo que pasa hasta que se colectan 1000 fotones provenientes de una determinada estrella.
  - (i) Se mide la distancia que se debe recorrer para viajar entre dos ciudades separadas por más de  $1000 \text{ km}$ , usando los mojones del camino.
  - (j) Se mide la misma distancia del punto anterior, pero usando el cuentakilómetros de un automóvil.
  - (k) Se mide la velocidad de una molécula en un gas en equilibrio, a una dada presión y temperatura.
  - (l) Se mide la temperatura de un gas en equilibrio térmico.
  - (m) Se determina la energía de un fotón proveniente de la transición entre el segundo y el primer estado excitado del átomo de hidrógeno.
  - (n) Se mide el número de decaimientos de una fuente de  $^{60}\text{Co}$  en un intervalo de  $10 \text{ s}$ .
2. Nuestro alfabeto consta de 27 letras. Con ellas se forman los 88431 vocablos del diccionario de la Real Academia Española de 2001.
  - (a) ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con nuestro alfabeto? [Rta: 531441]

---

<sup>1</sup> $1 \text{ Mpc} = 3,086 \cdot 10^{19} \text{ km}$ .

- (b) ¿Cuántos subconjuntos de 4 letras se pueden construir? [Rta: 17550]
- (c) Idem (a), pero sin repetir letras en las palabras. [Rta: 421200]
- (d) ¿Cuántos anagramas tiene la palabra “jardines”? ¿Y la palabra “anagrama”? [Rta: 40320 y 1680]
3. Sean tres sucesos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos ocurra, si  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ ,  $P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0$  y  $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$ . [Rta:  $\frac{5}{8}$ ]
4. ¿Cuándo es más probable obtener al menos un as de espadas: al extraer dos cartas de un mazo de truco (que consta de 40 cartas), o al extraerlas de dos mazos, una carta de cada mazo? [Rta: las probabilidades son 0.05 y 0.049375 respectivamente]
5. Entre los números del 1 al 100 se eligen dos al azar. Encuentre la probabilidad de que sean consecutivos si se los elige, (a) sin, y (b) con reposición. [Rta: (a) 0.02, (b) 0.0198]
6. Se tiran dos dados. Calcule la probabilidad de que:
- (a) No salga ningún as. [Rta: 0.6944]
- (b) No salga ningún as y ningún seis. [Rta: 0.4444]
7. Una caja contiene 7 alfajores de dulce de leche y 3 de fruta. Se extraen dos alfajores. Calcule la probabilidad de que:
- (a) Ambos sean de dulce de leche. [Rta:  $\frac{7}{15}$ ]
- (b) Ambos sean del mismo gusto. [Rta:  $\frac{8}{15}$ ]
- (c) Al menos uno sea de fruta. [Rta:  $\frac{8}{15}$ ]
8. En un partido de truco entre 4 jugadores que dura 15 manos, encuentre la probabilidad de que:
- (a) A un dado jugador nunca le toque el ancho de espadas. [Rta: 0.31]
- (b) El as de espadas no salga en todo el partido. [Rta: 0.0047]
9. En una caja de resistencias hay 20 defectuosas y 80 buenas. Tomamos 10 al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la mitad sean buenas? [Rta: 0.0215]
10. Para determinar si es un truco, se somete a un adivino a un test que consiste en disponer boca abajo sobre la mesa diez cartas de truco, 5 espadas y 5 bastos, y pedirle que adivine cuáles son los cinco bastos. Encuentre la probabilidad de que acierte tres o más bastos por pura casualidad. [Rta: 0.5]

11. Una moneda no cargada se lanza 15 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que en la última tirada se obtenga cara, sabiendo que en las primeras catorce tiradas salió seca? [Rta: 0.5]
12. Una urna A tiene 7 bolas blancas y 3 negras, y una urna B, 5 blancas y 5 negras. Se extrae al azar una bola de A y se la coloca en B. A continuación se extrae al azar una bola de B. Encuentre la probabilidad de que ambas bolas extraídas sean negras. [Rta:  $\frac{9}{55}$ ]
13. Un dado se fabrica de modo que la probabilidad de sacar un número es proporcional al mismo. Calcule:
- (a) La probabilidad de obtener un 2. [Rta:  $\frac{2}{21}$ ]
- (b) La probabilidad de haber obtenido un 2 dado que se obtuvo un número par. [Rta:  $\frac{1}{6}$ ]
14. Se tira un par de dados, obteniéndose  $a$  y  $b$  como resultado. Considere los siguientes sucesos:  $A = \{a \text{ es impar}\}$ ;  $B = \{b \text{ es impar}\}$ ;  $C = \{a + b \text{ es impar}\}$  y  $D = \{\text{al menos } a \text{ o } b \text{ es múltiplo de } 3\}$ . Muestre que  $A$ ,  $B$  y  $C$  no son independientes, aunque sí son independientes de  $a$  pares. ¿Son independientes  $C$  y  $D$ ?
15. Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos con  $P(A) = 0,4$ ,  $P(A \cup B) = 0,7$  y  $P(B) = p$ . ¿Cuánto debe valer  $p$  para que  $A$  y  $B$  sean (a) mutuamente excluyentes? (b) independientes? [Rtas: (a) 0.3, (b) 0.5]
16. La evaluación de esta materia consta de dos parciales. El 5% de los estudiantes desapueba el primer parcial, el 6% el segundo, y el 90% aprueba ambos.
- (a) Muestre que las desaprobaciones de ambos parciales no son sucesos independientes.
- (b) De los que no aprueban el primer parcial, ¿qué porcentaje desapueba el segundo? [Rta: 0.2]
17. Una sonda espacial pasa por las cercanías de Io, una de las lunas de Júpiter. Io es el objeto geológicamente más activo del Sistema Solar, y durante el tiempo de contacto con la sonda hay una probabilidad de 70% que dentro del campo de visión de esta se produzca una erupción volcánica. La sonda envía muchos datos a la Tierra, entre ellos si observó o no una erupción. Por perturbaciones con el campo magnético solar, sin embargo, hay una probabilidad del 10% de que la información recibida de la sonda sea incorrecta. Si el sistema reporta que observó una erupción, cuál es la probabilidad de que realmente lo haya hecho? [Rta: 0.9545]
18. Una caja contiene tres monedas, dos normales y una con caras de ambos lados. Se escoge una moneda y se la lanza cuatro veces sucesivas, obteniéndose siempre cara. ¿Cuál es la probabilidad que sea la moneda de dos caras? [Rta:  $\frac{8}{9}$ ] Suponga que volvemos a tirar la misma moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara? [Rta:  $\frac{17}{18}$ ]

19. Cierta artículo se manufactura en sólo tres fábricas. La primera produce el doble de unidades por día que la segunda o la tercera. El 2 % de lo producido por las dos primeras es defectuoso, mientras que para la tercera es el 4 %. Sabiendo que se compró un artículo defectuoso, calcule cuál es la probabilidad de que haya sido manufacturado en la tercer fábrica. [Rta: 0.4]
20. Un análisis de sangre tiene una efectividad del 97 % para una cierta enfermedad, pero da un falso positivo en 0.4 % de los casos en pacientes sanos. Se sabe que el 0.5 % de la población sufre esta enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad que una persona esté realmente enferma cuando el test le da positivo? [Rta: 0.55]
21. Un físico tiene tres estudiantes de doctorado, A, B y C, que producen el 15 %, 35 % y 50 % de sus artículos, respectivamente. La probabilidad de que los artículos no sean aceptados para publicar es del 3 %, 2 % y 1 % para A, B y C respectivamente.
- (a) Si el físico elige un artículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea aceptado para publicar? [Rta: 0.9835]
- (b) Si el artículo fue aceptado, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya escrito B? [Rta: 0.3488]
22. Un haz de partículas compuesto en proporciones iguales por electrones, piones y muones, atraviesa un detector Cerenkov, que tiene una eficiencia de 95 %, 50 % y 30 % para cada una de ellas, respectivamente. Si para una dada partícula el detector da señal, ¿cuál es la probabilidad que se trate de un electrón? [Rta: 0.543]
23. *Ejemplo de espacio muestral infinito numerable.* Se lanza una moneda cargada repetidamente hasta que el primer resultado vuelve a aparecer. Muestre que:
- (a) La probabilidad de que el juego termine en el lanzamiento  $n + 2$  es  $P_n = p^2q^n + q^2p^n$ , donde  $p$  es la probabilidad de que salga cara y  $q = 1 - p$ .
- (b)  $P_n$  satisface las tres propiedades de una probabilidad.
- (c) La probabilidad de que el juego dure más de  $n + 2$  lanzamientos es  $qp^{n+1} + pq^{n+1}$ .
- (d) Una moneda pareja ( $p = \frac{1}{2}$ ) maximiza la duración del juego.
24. ¿Un juego de ingenio? Un condenado recibe el siguiente indulto del rey (experto en probabilidades): Se le darán dos cajas, una con 50 bolitas blancas y la otra con 50 bolitas negras. El condenado podrá redistribuir las bolitas en las cajas, conservando el total de bolitas y sin dejar ninguna caja vacía. Al otro día, el rey elegirá una caja, de la cual extraerá una bolita. Si ésta fuera blanca, el condenado será liberado. ¿Cómo debe distribuir el condenado las bolitas para maximizar la probabilidad de ser liberado?