Estadística en Física Experimental

1$^{\text{er}}$ cuatrimestre de 2011

Guía de Problemas No.2

Variables aleatorias discretas - Binomial y Poisson

1. Se lanzan diez dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente tres seis? [Rta: 0.155]

2. Al lanzarse un par de dados se espera que en promedio salga un doble seis cada 36 tiradas. Si se hacen sólo 25 tiradas, ¿conviene apostar a favor o en contra de la aparición de al menos un doble seis? [Rta: a favor, P=0.5055]

3. Se tira n veces un par de dados, y se apuesta cuantas veces van a sumar 7. ¿Dentro de qué rango de n conviene apostar a 10 veces? [Rta: $59 \leq n \leq 65$]

4. El 1 % de la población tiene planeado votar un cierto candidato A. Se realiza una encuesta tomando 500 habitantes al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de intención de voto para A sea mayor o igual que el 2 %? Dicho de otra manera, ¿cuál es la probabilidad de que la encuesta se equivoque por más del 100 %? Para hacer las cuentas puede requerir el uso de la aproximación de Stirling para el factorial, $\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \frac{1}{12n}$. [Rta: 0.0310]

5. Una fábrica produce integrados, de los cuales el 20 % son defectuosos en promedio, y los comercializa en cajas de 10. Un comprador quiere rechazar las cajas que contienen más de 2 chips defectuosos, es decir, más que el promedio. Para ganar tiempo, en vez de probar todos los chips a comprar, decide implementar el siguiente test. De cada caja toma 6 chips al azar: (*i*) si ninguno es malo, acepta la caja; (*ii*) si uno sólo es malo, revisa el resto de la caja; (*iii*) si 2 o más son malos, devuelve la caja al fabricante.
   (a) ¿En qué fracción de las cajas deberá probar los 10 integrados? [Rta: 0.3932]
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 3 chips malos en una caja aceptada? [Rta: 0.0114]

6. Una fuente radiactiva tiene una actividad de 4 Bq[1] . Calcule la probabilidad de observar al menos un decaimiento en (a) 1 seg, (b) 2 seg. [Rta: 0.9817 y 0.9997]

[1]

a) Becquerel = 1 decaimiento/seg

7. Un jugador participa en el juego del ejercicio 23 de la guía 1. Si el primer resultado es ceca (S), gana \$1 por cada cara (C) que salga hasta volver a obtener ceca. Si el primer resultado es cara, gana \$1 por cada ceca subsiguiente (por ejemplo, con CSSSSC gana \$4, con CC no gana nada).
(a) ¿Hasta cuánto le conviene pagar al jugador por participar? [Rta: \$1]
(b) ¿Depende el resultado de que la moneda sea pareja o esté cargada? [Rta: no]
(Sugerencia: le conviene calcular $E(X)$, siendo X la variable aleatoria monto ganado)

8. Obtenga la esperanza y la varianza de las distribuciones binomial y poissoniana.

9. Se determina que la concentración de glóbulos blancos en una paciente es $4000(\mu\ell)^{-1}$. El procedimiento es el siguiente: se toma una muestra de 1 mm^3 de sangre, se diluye 10 veces para hacerla traslúcida, y se cuentan los glóbulos contenidos en 1 mm^3 de solución diluída. ¿Cuál es el error estadístico porcentual de la medición? [Rta: 5 %]

10. Cuánta gente deberá encuestarse si se desea conocer dentro de un 1 % la intención de voto a un candidato con un nivel de confianza de 95 %, sabiendo que aproximadamente (a) el 45 % (b) el 5 % del electorado votará por él. Discuta intuitivamente por qué obtiene distintos resultados para los casos (a) y (b). [Rta: 9900 y 1900]

11. La intensidad de un haz es de 100 part s^{-1}. Durante cuánto tiempo deberá contarse partículas si se desea conocer la intensidad del haz con una precisión de 1 en 1000. [Rta: 2.8 hs]

12. Un haz en la dirección $\hat{z}$ está compuesto de partículas de espín $\frac{1}{2}$ polarizadas perpendicularmente al haz. Se lo hace incidir contra un aparato de Stern-Gerlach orientado según $\hat{x}$ y se observa que 9430 partículas se deflectan según $+x$ y 7100 según -x. Determinar el ángulo de polarización del haz con su error. [Rta: $(81.9\pm0.5)^{o}$]

13. Un detector gigante para decaimiento de protones opera en una mina subterránea. Observa en promedio dos señales de neutrinos por día, que son un fondo debido a decaimientos radiactivos en las cercanías del detector y ruido electrónico.
(a) El día en que telescopios en la superficie observaron la explosión de la supernova 1987A, el detector observó 8 neutrinos. ¿Cuál es la probabilidad de que se detecten 8 o más neutrinos debido a una fluctuación del fondo? Se puede publicar entonces que hay evidencia experimental de que las supernovas emiten neutrinos? [Rta: 0.001]
(b) Consideremos ahora que no hubo observación óptica, que se tomaron datos durante todo 1987, y que cierto día se observan 8 señales de neutrinos. ¿Cuál es la probabilidad de observar 8 o más neutrinos en al menos un día del año? Se puede concluir que por algún fenómeno cosmológico ese día aumentó el flujo de neutrinos sobre la Tierra? [Rta: 0.33]

14. *Adición de distribuciones poissonianas.* Una fuente radiactiva emite λ partículas por unidad de tiempo. Se la ubica frente a un detector en presencia de un fondo radiactivo de μ emisiones por unidad de tiempo. El detector cuenta indistintamente las partículas del fondo y de la

fuente. Sabiendo que el número de partículas emitidas en un tiempo t por la fuente (i) y el fondo (j) tienen distribuciones poissonianas $P_i(\lambda t)$ y $P_j(\mu t)$ respectivamente, muestre que el número total de cuentas en el detector tiene distribución poissoniana con constante $(\lambda+\mu)t$. Sugerencia: para observar n cuentas es necesario que la fuente haya emitido k partículas y el fondo $n-k$, con $0 \leq k \leq n$. Esto es, $P_n = \sum_{k=0}^{n} P_k(\lambda t)P_{n-k}(\mu t)$ (¿por qué corresponde un *producto* de poissonianas dentro de la sumatoria?)

15. *Composición de una distribución poissoniana con una binomial.* Un detector tiene una eficiencia $\epsilon \leq 1$ para registrar partículas. Si le llegan n partículas, la probabilidad de detectar k será entonces la binomial $B_k(n,\epsilon)$. Se coloca frente a él una fuente radiactiva que en promedio emite λ partículas en un tiempo t. Muestre que el número de registros r obtenidos por el detector en un tiempo t, tiene una distribución poissoniana con constante $\epsilon\lambda t$.
Nota: este problema describe la práctica de nuclear de Laboratorio 5, donde se obtiene un gráfico de Poisson midiendo una fuente radiactiva (poissoniana) con un detector que no tiene eficiencia 100 % (binomial).

16. **Ejercicio para entregar.** Simulación de la medición de una fuente luminosa con un detector de eficiencia $\epsilon < 1$. Realice la siguiente simulación, justificando cada uno de los pasos.

    (a) La mayor parte de los lenguajes de programación y muchos programas con orientación científica incluyen generadores de números pseudoaleatorios con distribución uniforme en [0,1]. Cualquier conjuto de dichos números constituye una muestra de una variable aleatoria continua (tema de la guía siguiente) con dicha distribución, pero aquí nos interesa solamente el hecho de que pueden ser usados para simular experimentos de Bernoulli. Convénzase de que la probabilidad de que tal generador entregue un número en [0,p] ($0 \leq p \leq 1$) es p (y en [p, 1] es $1-p$). Implemente, a partir de esta propiedad, un programa que genere el resultado de una serie de n experimentos de Bernoulli independientes y cuente el número de éxitos obtenido. Considere n y la probabilidad de éxito p como parámetros libres.

    (b) Suponga que inciden exactamente $n = 15$ fotones sobre un detector con una eficiencia $\epsilon = 0{,}75$. Use el programa escrito en el punto anterior para determinar cuántos fotones son detectados en un experimento particular. Repita el experimento 1000 veces y realice un histograma de los resultados (i.e., del número de fotones detectados en cada experimento). Compárelo con la distribución de probabilidad teórica para dicha variable aleatoria. No olvide normalizar correctamente el histograma para realizar la comparación.

    (c) Ahora considere una fuente de intensidad media $I = 15$ fot s^{-1}. Simule el número de fotones emitidos por la fuente en $\Delta t = 1$ s del siguiente modo. Subdivida el intervalo Δt en $m \gg 1$ subintervalos iguales dt (sugerencia: use $m = 1000$). Aproxime la probabilidad de que la fuente emita un fotón en dt como Idt, y desprecie la probabilidad de emitir más de 1 fotón en el mismo intervalo (¿cómo justifica estas hipótesis?). Simule entonces el número de fotones emitidos en cada dt usando el programa desarrollado en el punto (a) (¿por qué es válido usar un programa que simula experimentos de Bernoulli?), y sumando sobre todos los dt calcule el número total de fotones emitidos durante Δt. Repita el experimento 1000 veces, construya un histograma de los resultados y superponga a éste la distribución teórica correspondiente (no olvide normalizar). Discuta el procedimiento y los resultados en base a las hipótesis del proceso de Poisson.

(d) Dado el resultado de cada uno de los 1000 experimentos del punto anterior, use el mismo programa para calcular el número de fotones *detectados* por el detector del punto (b), suponiendo que éste opera durante $\Delta t = 1$s, y que todos los fotones emitidos llegan a él (i.e., que el detector subtiende un ángulo sólido de 4π visto desde la fuente). Realice el histograma correspondiente y compárelo con la distribución teórica (no olvide normalizar). Discuta los resultados (vea el ejercicio 15).

(e) Para ahorrar tiempo, usted podría haber considerado la emisión y detección de cada fotón en forma conjunta, suponiendo una probabilidad *efectiva* (¿de qué valor?) para este proceso (¿cómo justifica esta hipótesis?). Realice la simulación de este modo, grafique los histogramas y sus correspondientes distribuciones teóricas. Muestre que el resultado es el mismo que el del punto anterior (en sentido estadístico). Discuta el procedimiento y los resultados a la luz de la composición de un proceso de Poisson con uno de Bernoulli.

(f) ¿Qué distribución espera para que el número de datos en una determinada clase de un histograma y por qué? Use la desviación estándar como una estimación de la incerteza de dicha variable y grafique barras de error sobre los histogramas realizados. Discuta el sentido en que deben interpretarse las posibles discrepancias entre las distribuciones de probabilidad teóricas y los histogramas.

Haga un **breve** informe de la simulación, incluyendo los gráficos y poniendo énfasis en la justificación de los distintos pasos.