Estadística en Física Experimental

1$^{\text{er}}$ cuatrimestre de 2011

Guía de Problemas No.3

Variables aleatorias contínuas

1. La altura de la población masculina tiene distribución normal N(175 cm, 8 cm). Sabiendo que los colectivos tienen una altura de 1.95 m, ¿qué fracción puede viajar parada sin necesidad de reclinarse? [Rta: 0.9938]

2. Se mide una magnitud A con un detector bien calibrado cuya respuesta es gaussiana con ancho σ, obteniéndose el resultado x. ¿Qué rango $x \pm a$ debe informarse si se desea que haya 90 % de probabilidad de que éste incluya el verdadero valor de A? [Rta: $x \pm 1.645\sigma$]

3. Si X tiene distribución normal estándar, ¿qué distribución tiene Y=aX+b? ¿Cómo implementaría un generador de números al azar N(μ,σ) a partir de uno N(0,1)?

4. *Distribución exponencial.* Una fuente radiactiva de constante λ (decaimientos por unidad de tiempo) se ubica frente a un detector.
   (a) Muestre que X, el tiempo transcurrido hasta la detección de la primera partícula, tiene distribución exponencial $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Proceda de dos maneras alternativas, discutiendo la validez de cada paso:
   i. Obtenga primero $F_X(t) = P(X \leq t)$ como el complemento del suceso "el primer decaimiento ocurre a tiempo mayor que t", y luego por derivación, la densidad de probabilidad $f_X(t)$.
   ii. Escriba directamente $f_X(t)$ como el producto de la probabilidad de que no haya ningún decaimiento entre 0 y t, y que haya un decaimiento justo en el dt siguiente.
   (b) Verifique que la exponencial satisface que P(X>t+s|X>t)=P(X>s). ¿Por qué se llama a ésto "no tener memoria"? Convénzase que únicamente la exponencial posee esta propiedad (pruebe usando otras distribuciones), y relaciónelo con las hipótesis que llevan a la distribución de Poisson. Mencione otros tres ejemplos de procesos que tengan distribución exponencial.
   (c) En realidad, el detector cubre un ángulo sólido Ω visto desde la fuente, y la dirección en que se emiten las partículas es una variable aleatoria adicional. ¿Cómo modifica ésto la distribución $f_X(t)$ esperada?
   (d) Se tiene una fuente de 1 Bq (Becquerel $\equiv$ 1 decaimiento/seg):
   i. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer decaimiento ocurra recién después de 5 segundos? [Rta: 0.0067]

ii. Calcule las probabilidad de que el primer decaimiento ocurra en el primer segundo. Repita el cálculo para el tercer segundo. ¿Contradice ésto la “falta de memoria”? [Rta: 0.6321 y 0.0855]
iii. ¿Cuánto tiempo debe esperarse para que haya al menos un decaimiento, con una probabilidad del 99 %? [Rta: 4.60 s]

5. Una barra gira alrededor del punto (-1, 0), hasta detenerse al azar formando un ángulo Θ con el eje x, ($\Theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). La recta que contiene la barra corta al eje de ordenadas en un punto Y. Encuentre la función de distribución $F_\Theta(t)$, y a partir de ésta muestre que Y tiene densidad de probabilidad de Cauchy, $f_Y(t) = 1/[\pi(1+t^2)]$.

6. Utilice el resultado del problema anterior para generar con la computadora 10000 números al azar que sigan la distribución de Cauchy, a partir de una uniforme [0,1]. Presente los datos en un histograma y grafique sobre éstos la predicción teórica.

7. De ser posible, encuentre un ejemplo de una medida de probabilidad que no puede ser descrita por una densidad $f_X(t)$, y de otra que no pueda ser descripta por una distribución $F_X(t)$.

8. Enumere las propiedades que debe poseer una densidad $f_X(t)$ para que defina una medida de probabilidad. Muestre que la gaussiana, la de Cauchy y la exponencial satisfacen estas condiciones.

9. Muestre que la densidad de probabilidad de $Y{=}X^2$ se obtiene a partir de la de X como $f_Y(t) = [f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})]/2\sqrt{t}$. Halle $f_Y(t)$ si
(a) X es uniforme en [0,1] [Rta: $f_Y = (2\sqrt{y})^{-1}(0 < t < 1)$]
(b) X es normal N(0,1) (esta f_Y se denomina χ^2_1, chi^2 con un grado de libertad). [Rta: $f_Y = (1/\sqrt{2\pi t})e^{-t/2}$ $(t > 0)$]

10. La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en [0,1].
(a) Muestre que $Y = e^X$ tiene distribución $f_Y(t) = 1/t, 1 \leq t \leq e$. Note que ésto permite escribir una rutina que genere números con distribución $1/x$.
(b) **Ejercicio para entregar.** ¿Cómo haría para generar números al azar con distribución exponencial? Impleméntelo en la computadora, construya un histograma con los números generados y dibuje sobre éste la distribución teórica.

11. Las distribuciones de Cauchy y Gauss tienen ambas forma de campana invertida.
(a) Usando la computadora dibuje conjuntamente la distribución de Cauchy y la $N(0, 0{,}75)$, normalizada de modo que ambas curvas coincidan en $x = 0$. Note que en la zona central ambas tienen idénticamente la misma forma pero que difieren notablemente en el comportamiento en las colas (“colas no gausianas”).
(b) **Ejercicio para entregar.** Es común representar colas no gausianas usando la suma de dos gaussianas, $f(x) = aN(0, \sigma_1) + bN(0, \sigma_2)$ (con $a + b = 1$, ¿por qué?). Represente sobre

el gráfico anterior, normalizado en $x = 0$ a la de Cauchy, la densidad $f(x)$ para -6<x<6, con $a = \frac{1}{2}$, $\sigma_1 = 0{,}75$ y $\sigma_2 = 3$. Note cómo la suma de dos gausianas ha logrado representar colas marcadamente no gausianas que, para los parámetros y rango elegidos, corresponden con bastante precisión a la forma de la distribución de Cauchy. ¿Qué ocurre si se incrementa el rango del gráfico mucho más allá de $|x| < 6$?