Estadística en Física Experimental

Guía de Problemas No.8 (1^{er} cuatrimestre de 2011)

Intervalos de confianza frecuentistas y bayesianos

1. Tenemos una muestra al azar $\{X_i\}$ de una distribución uniforme $[0, \theta]$, y queremos obtener un intervalo de confianza para θ. Consideremos la estadística $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Claramente $\theta \geq Y$ por lo que dos intervalos razonables podrían ser $[aY, bY]$ o $[Y + c, Y + d]$ con $1 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, a ser elegidos según el nivel de confianza deseado. Muestre que
a. la densidad de probabilidad de Y es $f_Y(t) = nt^{n-1}/\theta^n$ (ayuda: piense en Bernoulli).
b. el nivel de confianza del intervalo $[aY, bY]$ es $a^{-n} - b^{-n}$.
c. el cubrimiento del intervalo $[Y + c, Y + d]$ es $(1 - a/\theta)^n - (1 - d/\theta)^n$, por lo que su CL es nulo.
d. al medir X se obtiene 7.2, 6.4, 9.1, 2.2, 5.3; obtenga el intervalo de 90%CL más corto posible. Estime cuantos datos serían necesarios para conseguir un intervalo de 90%CL de longitud 0.5.

2. Se realizan sucesivas mediciones de una magnitud física obteniéndose 128 281 291 238 155 148 154 232 316 96 146 151 100 213 208 157 48 217. Encuentre para ésta un intervalo de confianza frecuentista de 95% CL, bajo la suposición que los errores son gaussianos. [Rta: (146.25,218.09)]

3. Se mide repetidamente el nr. de decaimientos en 1 seg de una fuente radioactiva, obteniéndose 1 0 0 2 0 0 1 0 2 0. Muestre que el intervalo de confianza central frecuentista de 90% CL para la actividad de la fuente se expresa, en término de los cuantiles de la distribución χ^2, como $(1/20)\chi^2_{12,0.95} \leq \lambda \leq (1/20)\chi^2_{14,0.05}$. Recuerde que si $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$, entonces $P(Y \geq n) = P(X \leq 2\lambda)$ con $X \sim \chi^2_{2n}$. (Rta: [0.262,1.184])

4. Considere n mediciones independientes $\{X_i\}$ de una variable con error exponencial.
a. Muestre $T = \sum X_i$ tiene distribución Gama(n, λ), y que $Q = 2T/\lambda$ tiene distribución χ^2, independiente de λ (con cuántos grados de libertad?)
b. Utilice este resultado para encontrar una cota superior a λ de 90% CL [intervalo freecuentista $(0, \lambda)$], si al realizar las mediciones se obtiene 4.2, 1.0, 0.1, 2.0, 1.5 (Rta: $\lambda < 3.7$).

5. Se quiere estudiar la relación entre el brillo máximo de un cierto tipo de estrellas variables y el período de sus variaciones de brillo. Para ello se mide, para cada estrella i ($1 \leq i \leq 5$), la cantidad de fotones F_i que llegan al detector durante un tiempo t_i, en el momento que alcanza su máximo brillo. Se mide además la cantidad de fotones F_c que llegan de una región del cielo libre de estrellas durante un tiempo t_c. Los brillos se determinan mediante
$$B_i = \frac{F_i}{t_i} - \frac{F_c}{t_c}.$$
El período P_i de la variación del brillo de cada estrella se mide determinando el tiempo entre dos instantes de máximo brillo sucesivos. Esta medición es mucho más precisa, por lo que se considera de error despreciable. El valor obtenido para el cielo es $F_c = 1021$ fotones, medidos durante un $t_c = 100s$. Considere insignificante el error en t_c y t_i. Para las estrellas se obtuvieron los siguientes datos:

Estrella	1	2	3	4	5
P_i (s)	18.71	2.79	13.61	12.08	1.89
F_i (fotones)	4854	2586	3752	3753	2605
t_i (s)	200	100	150	150	100

Un modelo teórico predice que el brillo máximo de la estrella B y su período P están relacionados mediante la ecuación $B = \beta + \alpha \log P$. Determine el valor de los parámetros α y β del modelo con su matriz de error. Dibuje a mano alzada las regiones de confianza frecuentistas con una probabilidad conjunta del 39.3%, 86.5% y 98.9% CL. ¿Por qué hemos elegido en particular estos números?

6. Un experimento mide la amplitud de un proceso cuántico, A=a_1+ia_2, obteniendo a_1=0.12 y a_2=-0.25, con matriz de covarianza V_1. Un segundo experimento de distinto diseño es sensible sólo a la parte real, obteniendo a_1=0.01±0.08.

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.01 \\ -0.01 & 0.04 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0.004 & -0.004 \\ -0.004 & 0.035 \end{pmatrix}$$

a. Muestre que de la combinación de ambos resulta a_1=0.052 y a_2=-0.183, con matriz de error V_2.
b. Dibuje en el plano a_1-a_2 los intervalos de confianza frecuentistas $2\,\sigma$ para cada experimento separado y en conjunto. Explique a partir del gráfico como es posible que el segundo experimento haya modificado la estimación de la parte imaginaria, teniendo en cuenta que sólo midió la parte real.
c. Encuentre el intervalo de confianza de 68% CL para $\tan\phi = \Im(A)/\Re(A)$ [Rta: $\tan\phi$=-3.51±4.56] Discuta si presenta algún interés un resultado como éste, en que el error es mayor que el resultado. ¿Cómo varía $\tan\phi$ si se hubiera olvidado de considerar la correlación entre la parte real e imaginaria?

7. Para estimar la incerteza de un instrumento, se mide repetidas veces una magnitud obteniéndose 1002, 1000, 997, 1001, 1001, 999, 998, 999, 1000 y 1003. Obtenga una cota superior 95%CL a la varianza bajo la suposición que los errores son gausianos. [Rta: 9.02]

8. En el Tevatron de Fermilab chocan protones contra antiprotones cada 350 ns. En cada cruce hay una probabilidad p de producir un bosón Z. Un experimento consiste en contar cuantos cruces k se deben esperar para producir r=50 Zs. La distribución de k es la binomial negativa (ejercicio primer parcial):

$$P(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r\,(1-p)^{k-r} \qquad \mathrm{E}(k) = r\frac{1-p}{p} \qquad \mathrm{Var}(k) = r\frac{1-p}{p^2}$$

a. Muestre que la distribución conjugada de la binomial negativa es la Beta(α,β). Encuentre la relación de transformación de prior a posterior y la expresión del estimador $\hat{p}$.
b. Se realiza el experimento y se obtiene $k = 12341$. Exprese p con su error al 90% CL. Elija un prior razonable, y analice cuanto depende su resultado de esta elección.

9. Muestre que la distribución de Pareto, $\mathrm{Pa}(x|\alpha,x_0) = \alpha x_0^\alpha / x^{\alpha+1}$ $(x \geq x_0)$, es una familia conjugada para la distribución uniforme $[0,\theta]$.
a. Encuentre el estimador de Bayes para θ a partir de n datos $\{X_i\}$ y de los parámteros x_0, α del prior. [Rta: $\hat{\theta} = \max\{x_i, x_o\}\,(\alpha+n)/(\alpha+n-1)$]
b. Se realizan 5 mediciones obteniendose 3.1, 7.0, 1.6, 8.2, 6.8; halle $\hat{\theta}$ y un límite superior de 90%CL, tomando el prior impropio $\pi(\theta) = 1$ $(\theta > 0)$.

10. Se denomina branching ratio (BR) de un cierto canal de decaimiento de un núcleo o partícula inestable a la probabilidad que al decaer lo haga por ese canal. Un experimento intenta determinar una cota inferior (90% CL) al BR del canal $A \to B + C$ de una partícula A que es difícil de producir. Para ello logran generar 10 partículas y observan que en 9 casos decae por el canal $B+C$. Determinar el intervalo de confianza deseado tanto frecuentista como bayesiano (éste con prior uniforme). (Rta: 0.663 y 0.690)

11. El experimento DØ buscó monopolos pesados de Dirac en colisiones $p\bar{p}$ (Phys. Rev. Lett 81, 524, 1998) a través de la producción de pares de fotones con alto momento. Esta señal tiene un background debido a bosones Z, que decaen $Z \to ee$ con un BR de 3.4%, si ambos electrones son confundidos como fotones por ineficiencias en la reconstrucción (electrones se distinguen de fotones por dejar trazas en el detector central). Este background fue estimado mediante simulaciones en $\mu_b = 3.1$ para el año 1995.
a. En 1995 se observaron 5 eventos $\gamma\gamma$ de alto momento, consistentes con el background esperado. Se concluye entonces que no se puede establecer evidencia de producción de monopolos. Establezca una cota superior (intervalo de confianza $(0,\mu_m^{\mathrm{MAX}})$ de 90%CL) tanto frecuentista como bayesiana (prior impropio uniforme) para μ_m, el número esperado de monopolos durante 1995.
b. Suponga que no se hubiera observado ningún evento $\gamma\gamma$. Muestre que en este caso el intervalo de confianza frecuentista $(0,\mu_m)$ es el conjunto vacío, o que sea ni siquiera incluye μ_m=0. Explique porqué ésto no es inconsistente, al menos desde un punto de vista matemático. Muestre que por el contrario este problema no se presenta con la cota superior 90% CL bayesiana.

12. **Ejercicio para entregar.** Al bombardearse con neutrones térmicos una moneda de plata, se producen dos isótopos de vida corta, Ag^{108} y Ag^{110}, que decaen por emisión beta. El gráfico muestra el número de electrones detectados cada 15 segundos (datos disponibles en la página web). La dependencia temporal teórica es $y(t) = a_1 + a_2 \exp(-t/a_4) + a_3 \exp(-t/a_5)$, donde a_1 describe la radiación de fondo, y a_2 y a_3 las amplitudes de los isótopos con vidas media a_4 y a_5, respectivamente.

   (a) Considere que se conoce la vida media de ambos isótopos (a_4=209.69 s, a_5=34.244 s), y se desea averiguar su probabilidad relativa de formación, a_2/a_3. Este es un problema de ajuste lineal. Resuélvalo en forma exacta escribiendo un programa que multiplique las matrices adecuadas. Encuentre los tres parámetros y su matriz de covarianza exacta.

   (b) Si se desconocen las vidas medias de ambos isótopos, se debe realizar un ajuste *no lineal* de cinco parámetros. Minimice la función χ^2 numéricamente, y obtenga la matriz de covarianza aproximada a través de las derivadas segundas de χ^2.

En el caso no lineal el χ^2 no es cuadrático en los parámetros (por qué?), y por lo tanto el contorno correspondiente a un cierto nivel de confianza en un plano a_i-a_j no es exactamente una elipse. Una mejor aproximación se encuentra dibujando la curva con $\chi^2 = \chi^2_{min} + \delta$, con δ elegido según el grado de confianza deseado. El gráfico muestra el resultado para a_4-a_5 con δ=1. La curva continua corresponde a dejar los parámetros a_1, a_2 y a_3 en su valor mínimo, mientras que el contorno punteado al caso en que se permite variar a_1, a_2 y a_3 para minimizar el χ^2 en cada punto (a_4,a_5).

   (c) Obtenga estas curvas a partir de los datos y analice el significado de ambos contornos.

   (d) Indique cuál es el rango de 68% de confianza para a_4 y para a_5 por separado.

   (e) ¿Como obtendría los rangos de 95% CL para cada uno? ¿Y el contorno de 95% CL conjunto?