# Estadística en Física Experimental

## Segundo Parcial

1. Considere un histograma de 100 canales, y llamemos respectivamente $n_i$ y $x_i$ al número de entradas y al valor de la abscisa para el bin $i$ ($i$=1,100). Los $n_i$ pueden ser pequeños, por lo que no es válida la aproximación poisson$\rightarrow$gauss. Se desea ajustar este histograma con una función $f(x, \vec{a})$, que depende de tres parámetros $\vec{a} = a_1, a_2, a_3$. A partir del principio de máxima verosimilitud, escriba las ecuaciones que permiten obtener los estimadores de $a_1, a_2, a_3$.

2. En física experimental, el grado de interacción entre partículas se expresa por medio de la sección eficaz $\Sigma$. Así, si se hace incidir un haz de $F_e$ electrones por unidad de tiempo y por unidad de área contra un blanco compuesto de $N_p$ protones, y se observan $n_p$ interacciones durante un tiempo $T$, la sección eficaz electrón-protón se calcula como $\Sigma_p = n_p/(F_e N_p T)$. La sección eficaz electrón-neutrón, $\Sigma_n$, no se puede sin embargo medir directamente pues no es posible construir un blanco de neutrones. Se recurre entonces a un método indirecto que consiste en emplear blancos de deuterio, D ($pn$), o de He$^3$ ($ppn$), y utilizar que $\Sigma_D = \Sigma_p + \Sigma_n$ y $\Sigma_{He} = 2\,\Sigma_p + \Sigma_n$. La sección eficaz tiene unidades de superficie y es común medirla en barns ($10^{-24}$cm$^2$), o fracciones (mb, $\mu$b, nb, pb).
   a. En un acelerador que provee un haz de electrones de $F_e$=$10^9$part/cm$^2$seg, medido con una precisión del 1%, se obtuvieron los siguientes resultados

| *Blanco* | $T$ | $N$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| protones | 10000 seg | $10^{24}$ | 10150 |
| deuterio | 7000 seg | $10^{24}$ | 10483 |
| He$^3$ | 4000 seg | $10^{24}$ | 9882 |

   Despreciando los errores en la medición de $T$ y de $N$, y recordando que $F_e$ es común a los tres experimentos, ajuste $\Sigma_p$ y $\Sigma_n$ por cuadrados mínimos y obtenga su matriz de covarianza (*Nota:* deje expresadas las cuentas en términos de matrices).
   b. Suponga que $\hat{\Sigma}_p$ y $\hat{\Sigma}_n$ dan 1.01 y 0.52 nb, respectivamente, con matriz de covarianza $V(\Sigma_p, \Sigma_p)$=3.24 $10^{-4}$ nb$^2$, $V(\Sigma_n, \Sigma_n)$=6.76 $10^{-4}$ nb$^2$ y $V(\Sigma_p, \Sigma_n)$=1.87 $10^{-4}$ nb$^2$. Dibuje a mano alzada la elipse de covarianza de 39.35% de CL en el plano $(\Sigma_p, \Sigma_n)$.

3. a. Se hace un ajuste de cuadrados mínimos con tres parámetros, y se desea establecer en el espacio $\{a_1, a_2, a_3\}$ una región de confianza de 80% como aquellos puntos para los cuales $\chi^2(\vec{a}) \leq \chi^2_{\min} + \delta$. Encuentre cuanto debe valer $\delta$.
   b. Suponga ahora que el problema es lineal y los errores son gaussianos. ¿Qué forma tiene la región hallada en (a)? Se encierra esta región con un paralelepípedo centrado en $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$. Sus lados valen $d_1, d_2, d_3$. ¿Cuál es la probabilidad que el intervalo $(\hat{a}_1 - \frac{d_1}{2}, \hat{a}_1 + \frac{d_1}{2})$ contenga el verdadero valor de $a_1$?

4. Se tiene una muestra $\{x_i\}$ extraída de una distribución $f(x)$ arbitraria, de esperanza $\mu$ y varianza finita $\sigma^2$. Se desea encontrar un estimador no sesgado de $M \equiv \mu^2$.
   (a) Muestre que tanto $\sum x_i^2/n$ como $\bar{x}^2 = (\sum x_i/n)^2$ son estimadores sesgados, mientras que la combinación $T = \frac{1}{n(n-1)}[(\sum x_i)^2 - \sum x_i^2]$ tiene bias nulo.
   (b) Para el caso que $\{x_i\}$ proviene de una normal $N(\mu, \sigma)$, aplicando la desigualdad de Cramer-Rao muestre que la varianza de $T$, o de cualquier estimador no sesgado de $M$, debe ser superior a $4\,\sigma^2\mu^2/n$.