Estadística en Física Experimental

Segundo Parcial

1. Sea $\{x_i\}$ con $i = 1, \ldots, n$ una muestra de una variable aleatoria con densidad de probabilidad exponencial, de la forma $f(x) = \theta^{-1} \exp -x/\theta$, con $\theta, x > 0$. Considere el siguiente estimador de θ:
$$\tilde{\theta} = \frac{x_1}{4} + \frac{\sum_{i=2}^{n-1} x_i}{2\,(n-2)} + \frac{x_n}{4}\,.$$
a. Muestre que $\tilde{\theta}$ no tiene bias.
b. Es $\tilde{\theta}$ suficiente? Justifique.
c. Calcule la eficiencia de $\tilde{\theta}$. ¿Debería tender a 100% para muestras grandes?

2. Para ciertos sucesos que ocurren en el tiempo, se quiere determinar si el intervalo entre dos consecutivos sigue una ley exponencial con constante 20 seg. Para ello, a partir de un cierto evento arbitrario, se miden los tiempos de ocurrencia de los 10 eventos posteriores a éste y se aplica el test de Kolmogorov. Se encuentra que la separación entre estos 10 sucesos nunca es menor que un dado t_0. ¿Cuánto debe ser t_0 para que ésto implique que se puede descartar la hipótesis con un nivel de confianza de al menos 95%? ¿Cómo varía su respuesta si se hubieran tomado 200 eventos, en vez de 10?

3. En el ejercicio 7 de la guía 8 se analizó el ajuste de "cuadrados mínimos" con errores gausianos en ambas variables. Aquí se pide, a partir del principio de máxima verosimilitud, estudiar el ajuste a un conjunto de n puntos $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, n$, pero esta vez con errores poissonianos independientes en x e y. Para simplificar, considere que la dependencia a ajustar es la función lineal $y = ax$.
Muestre que el estimador MV para a es $\hat{a} = \sum y_i / \sum x_i$.

4. Para cuatro valores de x_i se miden con un cierto instrumento los correspondientes y_i, obteniéndose los pares $\{x_i, y_i\}$: (0.5, 1.5±0.2), (1.0, 3.1±0.1), (1.5, 4.8±0.4) y (2.0, 8.0±0.6). Son despreciables los errores de x. Una recalibración del instrumento arroja una corrección $k = 1.17 \pm 0.05$, que se aplica multiplicativamente a los y_i. Se desea ajustar una función logarítmica, $y = a + b \ln x$, a los cuatro puntos.
a. Deje expresada la expresión numérica que, a menos de inversiones y multiplicaciones de matrices, permite resolver el problema.
b. Indique que forma tiene, y como se obtiene, la región del plano $\{a, b\}$ que corresponde a una región de confianza de 80%, bajo la suposición de errores gausianos. Exprese sus resultados en términos de V_{aa}, V_{ab} y V_{bb}, los elementos de la matriz de covarianza que hubiera hallado tras hacer las cuentas en (a).

5. Se ha recogido una muestra aleatoria de la previsión de inflación para el año próximo en siete países europeos. La muestra mencionada es:
1.5 – 2.1 – 1.9 – 2.3 – 2.5 – 3.2 – 3.0
a. Construya un intervalo de confianza al 99% para la desviación típica de la previsión de inflación en estos países, indicando qué supuestos necesita hacer.
b. Los economistas consultados sugieren construir un intervalo de confianza para la esperanza de la previsión de la inflación cuya longitud total sea de 1 punto. Acotar el nivel de confianza para este intervalo.