Estadística en Física Experimental - 1er Parcial 2011

1. Considere la siguiente cadena de decaimiento:

$$Kr^{98} \xrightarrow{\lambda_1 = 46 ms^{-1}} Rb^{98m} \xrightarrow{\lambda_2 = 96 ms^{-1}} Rb^{98} \xrightarrow{\lambda_3 = 114 ms^{-1}} Sr^{98}$$

   a) Calcule la media y la varianza del tiempo T que tarda en producirse un Sr^{98} a partir de un Kr^{98}.

   b) Muestre explícitamente que si se tiene una cadena muy larga de decaimiento en la que los λ_i son similares ($\lambda_i \sim \lambda$) la distribución de T tiende a una normal. **Ayuda:** la función característica de la normal es $e^{i\mu t - 1/2\sigma^2 t^2}$.

2. Suponga que los únicos posibles padres, con igual probabilidad, del hijo de Juanita Viale son su esposo ("el manguera") y Martín Lousteau. Sabiendo que "el manguera" tiene ojos azules y que Lousteau tiene ojos marrones calcule:

   a) La probabilidad de que "el manguera" sea el padre dado que el niño tiene ojos azules.

   b) Repita ahora para el caso en que los candidatos a ser padre de la criatura son 10 ("el manguera" y 9 individuos de color de ojos desconocido).

   Nota: recuerde que todas las personas tenemos dos copias de todos los genes. Una heredada de la madre y la otra del padre. Al momento de la concepción los padres pasan a su descendencia una de sus dos copias con igual probabilidad. Una persona solo tiene color de ojos azul si sus dos copias son azules. En la población argentina la frecuencia del gen de ojos azules es f_a. **Ayuda:** no es relevante el color de ojos de Juanita. El hecho de que su hijo tenga ojos azules implica que, de las dos copias del gen, Juanita tiene al menos una que es azul y que fue pasada a su retoño.

3. Encontrar una fórmula que permita, a partir de un generador de números uniformes entre 0 y 1, producir números al azar con distribución

$$f(x) = \frac{2x}{\sigma^2}\, e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \qquad \text{con } x \in \mathbf{R}_{\geq 0}$$

4. Para determinar C_P, el calor específico a presión constante del helio, se dispone una masa M de He en un contenedor con un pistón libre a presión fija, y se mide la variación de su temperatura ΔT_p cuando se le entrega una energía $\Delta E_P = i^2 R\, t_P$, haciendo circular una corriente i por una resistencia R durante un tiempo t_P. Se repite el experimento para determinar C_V, el calor específico a volumen constante, dejando esta vez el pistón trabado a un volumen fijo, y midiendo t_V y ΔT_V:

$$C_P = \frac{1}{n}\frac{\Delta E_P}{\Delta T_P} = \frac{i^2 R\, t_P}{(M/PA)\,\Delta T_P} \qquad\qquad C_V = \frac{1}{n}\frac{\Delta E_V}{\Delta T_V} = \frac{i^2 R\, t_V}{(M/PA)\,\Delta T_V}$$

   donde PA es el peso atómico del He (4.0026 g/mol) y n el número de moles en M. La medición de la corriente i entregada por la fuente se realiza una sola vez obteniendose:
   $i = 9{,}780 \pm 0{,}01\,\mathrm{mA}$
   Las temperaturas ΔT_P y ΔT_V están dominadas por errores estadísticos esencialmente no correlacionados:
   $\Delta T_P = 1{,}5195 \pm 0{,}004\,\mathrm{K}$; $\Delta T_V = 2{,}5325 \pm 0{,}004\,\mathrm{K}$
   Las incertezas en la determinación del tiempo t, la resistencia R y la masa M pueden considerarse despreciables frente a las anteriores:
   $t = 350\,\mathrm{s}$; $R = 12{,}522\,\Omega$; $M = 53{,}123\,\mathrm{mg}$

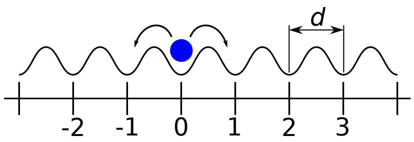
   a) Con estos resultados $C_P = 20{,}78635\,\mathrm{J/mol.K}$ y $C_V = 12{,}47181\,\mathrm{J/mol.K}$ ¿Cómo se publican junto con sus errores?

b) En un estudio de las leyes de los gases ideales se utiliza el resultado publicado en (a) para determinar la constante de Boltzmann k_B mediante $k_B = (C_P - C_V)/N_A$, donde $N_A = 6{,}02214 \times 10^{23}$ es el número de Avogrado. Se obtiene $k_B = 8{,}31454\,\mathrm{J/mol.K}.N_A$ ¿Qué valor debe informarse para su error?

5. Considere un electrón que se mueve por agitación térmica a lo largo de un nano-tubo de carbono. El nano-tubo puede modelarse como una serie de pozos de potencial, separados una distancia d, en los que el electrón es atrapado antes de poder seguir. Al ser capturado, el electrón se detiene momentáneamente y tiene igual probabilidad de saltar al pozo siguiente o al anterior. De esta forma el viaje del electrón se puede pensar como una serie de saltos entre pozos consecutivos.

   a) Encuentre la distribución de la distancia al origen $k \cdot d$ (con k el índice del pozo) en función de la cantidad total de saltos N.

   b) **(extra puntos)** Si después de una cantidad de saltos desconocida el electrón se encuentra en una dada posición $i \cdot d$ calcule la/s cantidad/es más probable/s de saltos que ha dado.



Algunas cosas útiles:

		Media	Varianza
Binomial	$B_k(n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	npq
Poisson	$P_k(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Uniforme	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{1}{2}(b+a)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
Normal	$N(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	μ	σ^2
Exponencial	$\lambda e^{-\lambda x}$	λ^{-1}	λ^{-2}
Cauchy	$\frac{1}{\pi\gamma\left[1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$	–	–

Función característica:

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{itX}\right]$$

$$\mathrm{E}[X^k] = (-i)^k \varphi_X^{(k)}(0)$$

Función generatriz:

$$G(z) = \mathrm{E}(z^X)$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{X!}{(X-k)!}\right] = G^{(k)}(1), \quad k \geq 0.$$

1) $Kr^{98} \xrightarrow[\lambda_1]{} Rb^{98m} \xrightarrow[\lambda_2]{} Rb^{98} \xrightarrow[\lambda_3]{} Sr^{98}$

a)

$T = x_1 + x_2 + x_3$ con x_i de una dist $f_i(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(T) = E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) = \dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2} + \dfrac{1}{\lambda_3} \\ Var(T) = Var(x_1) + Var(x_2) + Var(x_3) = \dfrac{1}{\lambda_1^2} + \dfrac{1}{\lambda_2^2} + \dfrac{1}{\lambda_3^2} \end{cases}$$

// Listo!

Otra forma:

$\phi_T(t) = \phi_{x_1}(t) \cdot \phi_{x_2}(t) \cdot \phi_{x_3}(t)$

función característica

$$\phi_{x_j} = \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda_j e^{-\lambda_j x}\, dx =$$

$$= \lambda_j \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda_j)x}\, dx = \lambda_j \left[\frac{1}{it-\lambda_j} e^{(it-\lambda_j)x}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{-\lambda_j}{it-\lambda_j} = \boxed{\frac{\lambda_j}{\lambda_j - it}} \rightarrow \left[\phi_{x_j} = \frac{1}{1-\frac{it}{\lambda_j}}\right]$$

$$\Rightarrow \phi_T(t) = \frac{1}{(1-it/\lambda_1)} \frac{1}{(1-it/\lambda_2)} \frac{1}{(1-it/\lambda_3)}$$

$$E(T) = (-i)^1 \phi_T'(0) = -i\left(\phi_{x_1}'(0)\phi_{x_2}(0)\phi_{x_3}(0) + \phi_{x_1}(0)\phi_{x_2}'(0)\phi_{x_3}(0) + \phi_{x_1}(0)\phi_{x_2}(0)\phi_{x_3}'(0)\right) = \star$$

$$\phi_{x_j}'(0) = \frac{i}{\lambda_j} \left.\frac{1}{(1-it/\lambda_j)^2}\right|_0 = \frac{i}{\lambda_j} \quad ; \text{ además } \phi_{x_j}(0) = 1$$

$$\Rightarrow \star = -i\left(\frac{i}{\lambda_1} + \frac{i}{\lambda_2} + \frac{i}{\lambda_3}\right) = \boxed{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}}$$

// Listo

Para calcular $Var(T)$ hay que usar $E(T^2) = (-i)^2 \phi_T''(0)$ y $Var(T) = E(T^2) - (E(T))^2$ //

b) Defino $T' = \dfrac{T - E(T)}{\sqrt{Var(T)}} \Rightarrow \begin{cases} E(T') = 0 \\ Var(T') = 1 \end{cases}$

Si la cadena se hace muy larga $\Rightarrow$ el número de sumandos tiende a $+\infty$

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \begin{cases} E(T) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(x_i)}_{\frac{1}{\lambda}} = \dfrac{n}{\lambda} \\ Var(T) = \sum_{i=1}^{n} Var(x_i) = \dfrac{n}{\lambda^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T' = \frac{\sum^{n} x_i - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} = \boxed{\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sum^{n} x_i - \sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \phi_{T'}(t) = \left[\phi_X\left(\tfrac{\lambda}{\sqrt{n}} t\right)\right]^n e^{-i\sqrt{n}\,t} = \left[\frac{1}{1 - i\frac{t}{\sqrt{n}}}\right]^n e^{-i\sqrt{n}\,t}$$

$$\Rightarrow \ln(\phi_{T'}(t)) = n\left[\ln(1) - \ln(1 - it/\sqrt{n})\right] - i\sqrt{n}\,t =$$

$$= n\left[\cancel{\ln(1)} - \left(\cancel{\ln(1)} + \underbrace{\ln'\left(1 - \tfrac{it}{\sqrt{n}}\right)\Big|_{t=0}}_{-i/\sqrt{n}} t + \underbrace{\ln''\left(1 - \tfrac{it}{\sqrt{n}}\right)\Big|_{t=0}}_{-(i/\sqrt{n})^2} \frac{t^2}{2} + O\left(\tfrac{1}{n^{3/2}}\right)\right)\right] - i\sqrt{n}\,t =$$

$$= n\left[\frac{it}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\frac{t^2}{2} + O\left(\tfrac{1}{n^{3/2}}\right)\right] - i\sqrt{n}\,t =$$

$$= \cancel{i\sqrt{n}\,t} - \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \cancel{i\sqrt{n}\,t} = \frac{-t^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \boxed{\frac{-t^2}{2}}$$

// Listo

2)

a)

$$P(M|A) = \frac{P(A|M)\cdot P(M)}{P(A)}$$

M : mamguera es el padre

L : Lousteau es el padre

A : le pasa azul al hijo

$$P(A) = P(A|M)\,P(M) + P(A|L)\,P_L$$

Mamguera tiene a a (sólo pasa a)

$P(M) = P(L) = 1/2$; $P(A|M) = 1$

Falta calcular $P(A|L)$..

$P(A|L)$ = P(el padre le pasa azul | padre tiene ojos marrones) =

= $\dfrac{P(\{\text{le pasa azul}\} \cap \{\text{tiene ojos marrones}\})}{P(\text{ojos marrones})}$

P(ojos marrones) = 1 - P(ojos azules) = $1 - f_a^2$

$$P(aa) = f_a^2$$

$$\left.\begin{array}{l} P(a\bar{a}) = f_a(1-f_a) \\ P(\bar{a}a) = f_a(1-f_a) \\ P(\bar{a}\bar{a}) = (1-f_a)^2 \end{array}\right\} \text{marrones}$$

P({le pasa a} ∩ { tiene ojos marrones}) = $\frac{1}{2} f_a(1-f_a) + \frac{1}{2}(1-f_a)f_a =$

$= f_a(1-f_a)$

$$\Rightarrow P(A|L) = \frac{f_a(1-f_a)}{1-f_a^2} = \boxed{\frac{f_a}{1+f_a}}$$

$$\Rightarrow P(M|A) = \frac{\overset{1}{P(A|M)}\cdot \overset{1/2}{P(M)}}{\underset{1}{P(A|M)}\cdot \underset{1/2}{P(M)} + \underset{\frac{f_a}{1+f_a}}{P(A|L)}\,\underset{1/2}{P(L)}} = \boxed{\frac{1}{1+\frac{f_a}{1+f_a}}}$$

//

b)

$$P(M|A) = \frac{P(A|M)\,P(M)}{P(A|M)\,P(M) + \sum_{i=1}^{9} P(A|X_i)\,P(X_i)}$$

$P(A|M) = 1$; $P(M) = P(X_i) = \frac{1}{10}$

Falta calcular $P(A|X_i)$..

Si agarro a alguien al azar y le miro una de las copias del gen esta tiene una proba f_a de ser azul.

$\Rightarrow \boxed{P(A|X_i) = f_a}$

Otra forma de verlo:

$$P(A|X) = \underbrace{P(A|AA)}_{1}\,\underbrace{P(AA)}_{f_a^2} + \underbrace{P(A|A\bar{A})}_{1/2}\,\underbrace{P(A\bar{A})}_{f_a(1-f_a)} + \overbrace{P(A|\bar{A}A)}^{1/2}\,\overbrace{P(\bar{A}A)}^{(1-f_a)f_a} + \underbrace{P(A|\bar{A}\bar{A})}_{=0}\,P(\bar{A}\bar{A})$$

$$= f_a^2 + \tfrac{1}{2}f_a(1-f_a) + \tfrac{1}{2}(1-f_a)f_a = \boxed{f_a}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(M|A) = \frac{1}{1+9f_a}}$$

3) $f_x(x) = \frac{2x}{\sigma^2} e^{-x^2/\sigma^2}$ con $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

t viene de una $U[0,1]$ $\Rightarrow$ $f_t(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$\underbrace{f_t(t)}_{1} dt = \underbrace{f_x(x)}_{\frac{2x}{\sigma^2} e^{-x^2/\sigma^2}} dx$ $\Rightarrow$ $\int_0^{t(x)} dt' = \int_0^x \frac{2x'}{\sigma^2} e^{-x'^2/\sigma^2} dx'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $t(x) = \left[-e^{-x'^2/\sigma^2} \right]_0^x = 1 - e^{-x^2/\sigma^2}$ $\Rightarrow$ $e^{-x^2/\sigma^2} = 1 - t$

$\Rightarrow$ $-\frac{x^2}{\sigma^2} = \ln(1-t)$ $\Rightarrow$ $\left[x = \sqrt{-\sigma^2 \ln(1-t)} \right]$ //

4)

$$C_p(i, \Delta T_p) = \frac{i^2 R t}{(M/PA)\Delta T_p} \quad y \quad C_v(i, \Delta T_v) = \frac{i^2 R t}{(M/PA)\Delta T_v}$$

a)

$$\Rightarrow Var(C_p) = \left(\frac{\partial C_p}{\partial i}\right)^2 \sigma_i^2 + \left(\frac{\partial C_p}{\partial \Delta T_p}\right)^2 \sigma_{\Delta T_p}^2$$

$$Var(C_v) = \left(\frac{\partial C_v}{\partial i}\right)^2 \sigma_i^2 + \left(\frac{\partial C_v}{\partial \Delta T_v}\right)^2 \sigma_{\Delta T_v}^2$$

Porque $CoV(i, \Delta T_x) = 0$ $CoV(\Delta T_p, \Delta T_v) = 0$

$$\frac{\partial C_x}{\partial i} = \frac{2}{i} C_x \quad y \quad \frac{\partial C_x}{\partial \Delta T_x} = -\frac{1}{\Delta T_x} C_x$$

b)

Como $Cov(C_p, C_v) \neq 0$ tengo que tener cuidado..

$$R_B = \frac{1}{N_A}(C_p - C_v) \Rightarrow Var(k_B) = \frac{1}{N_A^2}\left[\left(\frac{\partial k_B}{\partial C_p}\right)^2 Var(C_p) + \left(\frac{\partial k_B}{\partial C_v}\right)^2 Var(C_v) + 2\frac{\partial k_B}{\partial C_v}\frac{\partial k_B}{\partial C_p} CoV(C_p, C_v)\right]$$

Quiero calcular $CoV(C_p, C_v)$

$coV(i, \Delta T_x) = CoV(\Delta T_p, \Delta T_v) = 0$

$$\frac{\partial C_p}{\partial \Delta T_v} = \frac{\partial C_v}{\partial \Delta T_p} = 0$$

$$\Rightarrow CoV(C_p, C_v) = \frac{\partial C_p}{\partial i}\frac{\partial C_v}{\partial i}\sigma_i^2$$

$$\Rightarrow \boxed{CoV(C_p, C_v) = \frac{4}{i^2} C_p C_v \sigma_i^2}$$

// Listo.

5) $p_+ = p_- = 1/2$; hay N saltos

a)

Quiero la distr. de $d \cdot R = d(m_+ - m_-) \Rightarrow R = m_+ - m_-$

$$R = m_+ - \underbrace{m_-}_{N - m_+} = \boxed{2m_+ - N} \Rightarrow \text{Casi listo!}$$

m_+ tiene una dist. $B_{m_+}(N, 1/2)$

$$P(R = j) = P(2m_+ - N = j) = P\left(m_+ = \frac{N+j}{2}\right) = \begin{cases} B_{\frac{N+j}{2}}(N, \frac{1}{2}) & \text{si } N+j \text{ es par} \\ 0 & \text{si } N+j \text{ impar} \end{cases}$$