Electromagnetismo - Estática

	Electricidad	Magnetismo
Elemento Fuente	$dQ'=\begin{cases}\lambda(\bar r')\,dl'\\ \sigma(\bar r')\,dS'\\ \rho(\bar r')\,dV'\end{cases}$ **λ** densidad lineal de carga [*C/m*] **σ** densidad superficial de carga [*C/m²*] **ρ** densidad volumétrica de carga [*C/m³*]	$q'\bar v=\begin{cases} I\,d\bar l, & \bar I=\lambda\bar v\\ \bar g\,dA, & \bar g=\sigma\bar v\\ \bar J\,dV, & \bar J=\rho\bar v\end{cases}$ ***I***: cantidad de carga que pasa por unidad de tiempo = *dQ/dt [C/seg=Ampere]* ***g***: densidad superf. de corriente [*A/m*] ***J***: densidad volumétrica [*C/m³*m/s=A/m²*]
Campo	$\bar E(\bar r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\bar r-\bar r')}{\lVert\bar r-\bar r'\rVert^3}$ $\bar E(\bar r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dQ'(\bar r-\bar r')}{\lVert\bar r-\bar r'\rVert^3}$ [*N/C=V/m*]	$\bar B(\bar r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(q\bar v)\times(\bar r-\bar r')}{\lVert\bar r-\bar r'\rVert^3}$ [*T (Tesla)=N/(C m/s)=N/A m*] 1 Gauss= 10^{-4} T
Campo en Distrib continuas	$\bar E(\bar r)=k_e\int_C\frac{\lambda(\bar r')dl'\bar R}{R^3}$ $\bar E(\bar r)=k_e\iint_S\frac{\sigma(\bar r')dS'\bar R}{R^3}$ $\bar E(\bar r)=k_e\iiint_V\frac{\rho(\bar r')dV'\bar R}{R^3}$ $k_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$\bar B(\bar r)=k_m\int_C\frac{(i\,d\bar l')\times\bar R}{R^3}$ $\bar B(\bar r)=k_m\iint_S\frac{(\bar g\,dS')\times\bar R}{R^3}$ $\bar B(\bar r)=k_m\iiint_V\frac{(\bar J\,dV')\times\bar R}{R^3}$ $k_m=\frac{\mu_0}{4\pi}$
	$\bar R=\bar r-\bar r'$, $R=\lVert\bar R\rVert$ $\bar r$: vector donde evalúo el campo	$\bar r'$: vector de fuente de campo, sobre el cual integro
Leyes (estática)	*Forma Integral* / *Forma Diferencial* **Gauss**: $\oiint\bar E\cdot d\bar S=\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$ / $\bar\nabla\cdot\bar E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ **$\bar E$ conservativo**: $\oint\bar E\cdot d\bar l=0$ / $\bar\nabla\times\bar E=0$	*Forma Integral* / *Forma Diferencial* **Ampere**: $\oint\bar B\cdot d\bar l=\mu_0 I_{enc}$ / $\bar\nabla\times\bar B=\mu_0\bar J$ **∄ monopolo**: $\oiint\bar B\cdot d\bar S=0$ / $\bar\nabla\cdot\bar B=0$
Potencial	$V_B-V_A=-\int_A^B\bar E\cdot d\bar l=\frac{\Delta W}{Q}$ $V(\bar r)=k_e\int\frac{dQ'}{r}$ $\bar E=-\nabla V$ Trabajo = Fuerza x Dist. Potencial = Trabajo /Carga = Campo x Dist.	$\bar A(\bar r)=k_m\iiint_V\frac{\bar J(\bar r')dV'}{R}$ $\bar B=\bar\nabla\times\bar A$ Potencial vectorial con gauge de Coulomb
Fuerza	$\bar F=Q\bar E=-Q\nabla V(\bar r)=-\nabla U(\bar r)$	$\bar F=q\bar v\times\bar B$ $\bar F=I\,d\bar l\times\bar B$
Poisson	$\nabla^2V=-\rho/\varepsilon_0$	$\nabla^2\bar A=-\mu_0\bar J$

Expansión Multipolar y Momentos

	Electricidad	Magnetismo
Expansión Multipolar	*Expansión del potencial V* $V(\bar r)\approx k_e\left[\frac{Q}{r}+\frac{\bar p\cdot\bar r}{r^3}+\frac{\bar r\bar{\bar Q}\bar r}{2r^5}+\cdots\right]$ *Campo $\bar E$ del dipolo* $\bar E(\bar r)\approx k_e\left(-\frac{\bar p}{r^3}+3\frac{(\bar p\cdot\bar r)\bar r}{r^5}\right)$	*Expansión del potencial $\bar A$* $\bar A(\bar r)\approx k_m\left[\frac{\bar m\times\bar r}{r^3}+\cdots\right]$ *Campo $\bar B$ del dipolo* $\bar B(\bar r)=k_m\left(-\frac{\bar m}{r^3}+3\frac{(\bar m\cdot\bar r)\bar r}{r^5}\right)$
Momentos	***Monopolo*** *Q:* carga total ***Dipolo*** $\bar p=q\bar d$ (dir de - → +) $\bar p=\iiint_V\bar r'\rho(\bar r')dV'$ *[C m²]* ***Cuadrup.*** $\bar{\bar Q}/Q_{i,j}=\iiint_V\rho(\bar r')(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})dV'$ *[C m²]* $x_{i,j}$*= x, y o z.* δ_{ij}*: delta de Kronecker.*	***Monopolo*** No existe monopolo magnético ***Dipolo*** $\bar m=IS\hat n=I\bar S$ $\bar m=\frac12 I\oint_C\bar r'\times d\bar l'$ $d\bar m=\frac12\bar r\times\bar J\,dv$ *S: Área del dipolo.* $\hat n$ *Normal a la corriente con mano derecha.* $\bar m$ *en [A m²]*
Fuerzas Dip	$\bar F_{E\,fijo}=0$ $\bar F_{E\,var}=\nabla(\bar p\cdot\bar E)$ $\bar\tau=\bar p\times\bar E$ $U=-\bar p\cdot\bar E$	$\bar F_{B\,fijo}=0$ $\bar F_{B\,var}=\nabla(\bar m\cdot\bar B)$ $\bar\tau=\bar m\times\bar B$ $U=-\bar m\cdot\bar B$

Electromagnetismo en Medios Materiales

	Electricidad	Magnetismo
Campos	Desplazamiento $\bar D=\varepsilon_0\bar E+\bar P$	Intensidad Magnética $\bar H=\bar B/\mu_0-\bar M$
Leyes en Medios	$\bar\nabla\times\bar E=0$ $\bar\nabla\cdot\bar E=\frac{\rho_L+\rho_P}{\varepsilon_0}$ $\bar\nabla\times\bar D=\bar\nabla\times\bar P$ $\bar\nabla\cdot\bar D=\rho_0$ o $\oiint_S\bar D\cdot d\bar S=Q_{L\,enc}$ **Ley de Gauss en medios eléct.,** rotor ≠ 0	$\bar\nabla\times\bar B=\mu_0(\bar J_L+\bar J_M)$ $\bar\nabla\cdot\bar B=0$ $\bar\nabla\times\bar H=\bar J_L$ o $\oint_C\bar H\cdot d\bar l=\iint_S\bar J_L\cdot d\bar S$ **Ley de Ampere en medios magnéticos,** pero $\bar\nabla\cdot\bar H=-\bar\nabla\cdot\bar M=\rho_M$ (divergencia ≠ 0) Si $\bar J_M$=0, Ampere en $\bar B$ / Si ρ_M=0, Ampere en $\bar H$
Fuentes	$\bar E$: $\rho_L,\sigma_L,\rho_P,\sigma_P$ $\bar D$: $\rho_L,\sigma_L,\bar\nabla\times\bar P,\bar P\times\hat n$ $\bar P$: $\rho_P,\sigma_P,\bar\nabla\times\bar D,\bar D\times\hat n$.	$\bar B$: $\bar J_L,\bar g_L$ $\bar J_M,\bar g_M$ $\bar H$: $\bar J_L,\bar g_L$ ρ_M,σ_M $\bar M$: $\bar J_M,\bar g_M$ $-\rho_M,-\sigma_M$ $\bar J_M=\bar\nabla\times\bar M$, $\bar g_M=\bar M\times\hat n$ **Densidades** volumétrica ($\bar J_M$)y superficial ($\bar g_M$) **de corriente de magnetización**. $\bar J_L$ y $\bar g_L$ densidades de corriente libres. $\hat n$ separa los medios.
Teoría Macros-cópica	$\rho_P=-\bar\nabla\cdot\bar P$ $\sigma_P=\bar P\cdot\hat n$ **Densidades** volumétrica (ρ_P) y superficial (σ_P) **de carga de polarización**. ρ_L y σ_L dens. de cargas libres. $\hat n$ separa medios. $\bar P=\Delta\bar p/\Delta v$ es la **polarización** del medio (momento dipolar por unidad de volumen) $\langle V(\bar r)\rangle=k_e\left[\iiint_V\frac{\rho_P(\bar r')}{\lVert\bar r-\bar r'\rVert}dV'+\oiint_S\frac{\sigma_P(\bar r')}{\lVert\bar r-\bar r'\rVert}dA'\right]$ Potencial eléctrico	$\rho_M=-\bar\nabla\cdot\bar M$ $\sigma_M=\bar M\cdot\hat n$ **Densidades** volumétrica (ρ_M) y superficial (σ_M) **de carga magnética**. Funcionan como cargas magnéticas, en pares (σ_M polos Norte y Sur). $\hat n$ separa los medios. $\bar M=\Delta\bar m/\Delta v$ es la **magnetización** del medio (momento magnético por unidad de volumen) $\langle\bar A(\bar r)\rangle=k_m\left[\iiint_V\frac{\bar J_M(\bar r)}{\lVert\bar r-\bar r'\rVert}dV'+\oiint_S\frac{\bar g_M(\bar r)}{\lVert\bar r-\bar r'\rVert}dA'\right]$ Potencial magnético vectorial $V_M(\bar r)=k_m\left[\iiint_V\frac{\rho_M(\bar r)}{\lVert\bar r-\bar r'\rVert}dV'+\oiint_S\frac{\sigma_M(\bar r)}{\lVert\bar r-\bar r'\rVert}dA'\right]$ Potencial magnético escalar
En Medios LIH	$\bar P=\chi_e\bar E$ $\chi_e=\varepsilon-\varepsilon_0$ $\bar D=\varepsilon\bar E$ $\varepsilon=k_e\varepsilon_0$ $k_e=1+\chi_e$ **k**: constante dieléctrica, ≥ 1 χ_e: suceptibilidad dieléctrica *Electrete*: Con $\bar E_{ext}$=0: $\bar P\neq0$ y puede ∃ $\bar D\neq0$. $\bar\nabla\times\bar D=\bar\nabla\times\bar P$	$\bar M=\chi_m\bar H$ $\chi_m=\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}$ $\bar H=\bar B/\mu$ $\mu=k_m\mu_0$ $k_m=1+\chi_m$ **μ:** Permeabilidad magnética χ_m: Suceptibilidad mag.. *Diamagnéticos* <0, *Paramagnéticos* >0, *Ferromagnéticos* >>0 k_m: Permeabilidad relativa.
C. Cont.	$\bar E_1\parallel=\bar E_2\parallel$ $\bar D_1\perp=\bar D_2\perp$	$\bar B_1\perp=\bar B_2\perp$ $\bar H_1\parallel=\bar H_2\parallel$

Conductores Ideales

Toda la carga en las superficies. En interior: $\bar E=\bar D=\bar P=0$ o V=cte. $\bar E\perp$ superficie del conductor, con valor σ/ε_0

Corrientes

$I=\iint_S \bar{\boldsymbol{J}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS$. Por conservación de cargas, corriente ingresando en superficie cerrada S: $I=-\oiint_S \bar{\boldsymbol{J}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS=-\iiint_V \bar{\nabla}\cdot\bar{\boldsymbol{J}}\,dV$. Normal hacia afuera de S, I positivo si entra carga en S. $I=\frac{dQ}{dq}=\frac{d}{dt}\iiint_V \rho(\bar{\boldsymbol{r}}')\,dV\Rightarrow\iiint_v\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\bar{\nabla}\cdot\bar{\boldsymbol{J}}\right)dV=0\Rightarrow$

<u>Ecuación de Continuidad:</u> $\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\bar{\nabla}\cdot\bar{\boldsymbol{J}}=0}$ **<u>Ley de Ohm Microscópica:</u>** $\boxed{\bar{\boldsymbol{J}}=\sigma\bar{\boldsymbol{E}}}$. σ: conductibilidad (en $[\Omega\, m]$), $\rho = 1/\sigma$ resistividad.

En un cable recto, la diferencia de potencial es $\Delta V=-\int_C \bar{\boldsymbol{E}}\cdot d\bar{\boldsymbol{l}}=E\,l$. Pero $I=\iint_S \bar{\boldsymbol{J}}\cdot d\bar{\boldsymbol{S}}=JS=\sigma ES\Rightarrow\quad I=JS/l\,\Delta V$. Llamo $JS/l = R$ la **resistencia** del cable, y queda: $\boxed{\Delta V=RI}$ **Ley de Ohm Macroscópica.** R en $[V/A = Ohm\ (\Omega)]$

Inducción

<u>Ley de Faraday</u>: $\boxed{\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}}$. $\varepsilon=\oint\bar{\boldsymbol{E}}\,d\bar{\boldsymbol{S}}$ **Flujo Magnético**: $\Phi=\iint\bar{\boldsymbol{B}}\cdot d\bar{\boldsymbol{S}}$ (unidades: Weber, [1 Wb = 1 T.m^2]).

<u>Ley de Lenz</u>: La dirección de la corriente inducida produce un campo magnético que se opone al cambio en el flujo magnético que genera esa corriente (**1**-Defino $\hat{\boldsymbol{n}}$ para la superficie. **2**-Veo signo de Φ. **3**-Veo signo de $d\Phi/dt$, si >0, ε<0 y viceversa. **4**-Dirección de la corriente para ε>0 con regla mano derecha pulgar apuntando en $\hat{\boldsymbol{n}}$, al revés para ε<0). $\bar{\nabla}\times\bar{\boldsymbol{E}}=-\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$

<u>Autoinductancia</u>. $L=\frac{d\Phi}{dI}$, queda $\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt}\Rightarrow$ $\boxed{\varepsilon=-L\frac{dI}{dt}}$ para un circuito fijo

<u>Inductancia Mutua</u>. $\varepsilon_{12}=-\frac{d\Phi_{12}}{dt}$ $M_{12}=\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial I_2}$ $\varepsilon_{12}=-M_{12}\frac{dI_2}{dt}$ $\Phi_{12}=\iint_1\bar{\boldsymbol{B}}_2\cdot d\bar{\boldsymbol{S}}_1$. Φ_{12} es el flujo del campo magnético del objeto 2 sobre el área del objeto 1. ε_{12} es la emf asociada al cambio de este flujo con el tiempo. $M_{12} = M_{21} = M$. $\varepsilon_1=-L_1\frac{dI_1}{dt}-M\frac{dI_2}{dt}$, $\varepsilon_2=-M\frac{dI_1}{dt}-L_2\frac{dI_2}{dt}$

Circuitos

Elemento	Voltaje	React. (Ω)	Imped. (Ω)	Amplit. I	Fase ϕ	t=0	t=∞	Complejos
Resistencia	$V=IR$	R	$\bar{Z}_R=R$	$I_{R0}=V_0/R$	I en fase con V: $V\rightarrow$, $I\rightarrow$			$\bar{Z}=a+b\,\boldsymbol{i}=\lvert\bar{Z}\rvert e^{\boldsymbol{i}\varphi}$
Capacitor	$V=Q/C$	$X_C=1/\omega C$	$\bar{Z}_C=-\boldsymbol{i}/(\omega C)$	$I_{C0}=V_0/Z_C$	I delante de V 90°: V→, I↑			$\lvert\bar{Z}\rvert=\sqrt{a^2+b^2},\varphi=\tan^{-1}(b/a)$
Inductor	$V=L\,dI/dt$	$X_L=\omega L$	$\bar{Z}_L=\boldsymbol{i}\,\omega L$	$I_{L0}=V_0/Z_L$	I atrás de V 90°: V→, I↓			$r\,e^{\boldsymbol{i}\varphi}=r(\cos\varphi+\boldsymbol{i}\sin\varphi)$

<u>Resistencia:</u> En serie: $R = R_1 + R_2$ En paralelo: $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ Resistencia único elemento que disipa potencia, $\boldsymbol{P}=I^2R=IV$

<u>Capacitancia:</u> Placas paralelas $C=\frac{\varepsilon_0 A}{d},\bar{\boldsymbol{E}}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{A\varepsilon_0}$ Cilíndrico $C=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$. Esférico $C=4\pi\varepsilon_0\frac{a\,b}{b-a}$. Esfera aislada $C=4\pi\varepsilon_0 R$

En serie: $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ En paralelo: $C = C_1 + C_2$ Con Dieléctrico: $C=k_e\,C_0$ ($k_e=\varepsilon/\varepsilon_0$)

<u>Inductancia</u>: Cable: $L=\frac{\mu_0 l}{8\pi}$ Cilindro hueco: $L=\frac{\mu_0 l}{2\pi}(\ln(2l/r)-1),l\gg r$ Cables paralelos: $L=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln(d/r),l\gg d\gg r$ Coaxil: $L=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln(b/a)$

En serie: $L = L_1 + L_2$ En paralelo: $1/L = 1/L_1 + 1/L_2$ [r radio del cilindro / cable, d dist. entre cables, a y b radios coaxil]

<u>Impedancia:</u> En serie: $\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ En paralelo: $1/\bar{Z} = 1/\bar{Z}_1 + 1/\bar{Z}_2$ $\bar{Z}$ complejo: Re($\bar{Z}$)= Resistencia (R), Im($\bar{Z}$)=Reactancia (X)

<u>Leyes de Kirchoff:</u> ***1.Ley de Nodos****:* La suma de las corrientes en cada nodo = 0 (corriente que entra al nodo = a la que sale). ***2.Ley de Mallas***.En cada malla (o loop) la suma de las diferencias de tensión (V) = 0. Para sumar elijo una Dir para cada I, y una Dir de Giro en la malla. En **bats**, si Dir de Giro va de | a │ ⇒ +ε . En ***R****s*, si Dir de Giro = Dir de I ⇒ ***-RI***. En ***C****s*, si Dir de Giro va de +q│ a │-q ⇒ ***-q/C***

<u>Thevenin</u>: **1**-Remover R_L y reemplazar por terminales abiertas A y B. **2**-Encontrar Is con Kirchoff (circuito ab. en A y B para Is). **3**-Encontrar V_{th} agregando bat V_{th} entre A y B, con cualquier malla que pase por V_{th}, y con Is calculadas en 2 (I=0 para elementos en terminales abiertas). **4**-Encontrar R_{th} con cortocircuito en baterías (salvo sus resistencias si tienen) y calculando R equivalente = R_{th}.

<u>Corriente Alterna</u>. *<u>Régimen transitorio</u>*: *1er orden (Circ RL)*: $\dot{x}+(1/\tau)x=b,\ \ x_h(t)=k\,e^{-t/\tau},\ \ x_p(t)=b\tau,\ \ x(t)=x_h+x_p=k\,e^{-t/\tau}+b\tau$

2do Orden (Circ. RLC)

$$\ddot{x}+2b\,\dot{x}+\omega_0^2x=F(t),\ x_h(t)=A\,e^{\lambda_1 t}+B\,e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2}=-b\pm\underbrace{\sqrt{b^2-\omega_0^2}}_{\alpha},\quad\omega=\sqrt{\omega_0^2-b^2}$$

$b>\omega_0$	Sobreamortiguado	$x_h(t)=e^{-bt}(A\,e^{\alpha t}+B\,e^{-\alpha t})$	Antioscilador
$b<\omega_0$	Subamortiguado	$x_h(t)=e^{-bt}(A\,e^{\boldsymbol{i}\omega t}+B\,e^{-\boldsymbol{i}\omega t})=A_1\,e^{-bt}\cos(\omega t+\varphi_0)$	$\ddot{x}-\omega_0^2x=F(t)$
$b=\omega_0$	Amortig. Crítico	$x_h(t)=e^{-bt}(A+B\,t)$	$x_h(t)=Ae^{\omega_0 t}+Be^{\omega_0 t}$
$b=0$	Osc. Armónico	$x_h(t)=A\,e^{\boldsymbol{i}\,\omega_0 t}+B\,e^{-\boldsymbol{i}\,\omega_0 t}=A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$	

***<u>Régimen estacionario</u>*: Ley de Ohm de Fasores:** $\boxed{\bar{\varepsilon}=\bar{Z}\,\bar{I}}$. $V(t)=V_0\cos(\omega t)$. $\bar{V}(t)=V_0\,e^{\,\boldsymbol{i}\omega t}$. $I(t)=I_0\cos(\omega t-\phi)$. $\bar{I}(t)=I_0\,e^{\,\boldsymbol{i}(\omega t-\phi)}$. $\lvert Z\rvert=V_{ef}/I_{ef}$

En Serie: $I(t)$ igual para todos los elementos, $V(t)$ desfasado. Dibujar Fasores de V. **En paralelo**: $I(t)$ desfasada, $V(t)$ igual. Dibujar Fasores de I.

Potencia entregada x fuente: $\boldsymbol{P(t)}=I(t)V(t)$. $\boxed{\langle P\rangle=\frac{I_0V_0}{2}\cos(\phi)=\frac{V_0^2}{2\lvert\bar{Z}_T\rvert}\cos(\phi_{ZT})=I_{rms}V_{rms}\cos(\phi)=I_{rms}^2R}$.ϕ: fase de $\bar{Z}eq$, $\cos(\phi)$:Factor de Potencia, $V_{rms}=V_0/\sqrt{2}$. ***Transformador Ideal***: $\frac{V_2}{V_1}=\frac{N_2}{N_1}=\frac{I_1}{I_2}$, $M^2=L_1L_2$, $P_{in}=I_1V_1=P_{out}=I_2V_2$.

Energía

	Electricidad		Magnetismo	
Distribuciones Discretas	$U=\frac{1}{2}\sum_j{}' q_jV_{ij},\ \ con\,V_{ij}=\frac{k_eq_i}{\lvert\bar{\boldsymbol{r}}_i-\bar{\boldsymbol{r}}_j\rvert}$		$U=\frac{1}{2}\sum_j I_j\Phi_j,\ \ con\,d\Phi_j=\sum_i\frac{d\Phi_{ji}}{dI_i}dI_i=\sum_i M_{ji}dI_i$	
Continuas	$U=\frac{1}{2}\iiint_{V'}\rho(\bar{\boldsymbol{r}}')V(\bar{\boldsymbol{r}}')\,dV'$	$U=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_\infty\lvert\bar{\boldsymbol{E}}\rvert^2dV$	$U=\frac{1}{2}\sum_j\oint_{C_j}d\bar{\boldsymbol{l}}_j\cdot\bar{\boldsymbol{A}}$	$U=\frac{1}{2\mu_0}\iiint_\infty\lvert\bar{\boldsymbol{B}}\rvert^2dV$
En medios	$U=\frac{1}{2}\iiint_\infty\bar{\boldsymbol{E}}\cdot\bar{\boldsymbol{D}}\,dV$		$U=\frac{1}{2}\iiint_\infty\bar{\boldsymbol{B}}\cdot\bar{\boldsymbol{H}}\,dV$	
Densidad	$u_E=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2$	Energía de un Capacitor: $U_E=\frac{q^2}{2C}=\frac{CV^2}{2}$	$u_B=\frac{B^2}{2\mu_0}$	Energía de un solenoide: $U_B=\frac{1}{2}Li^2$

Ejemplos de Campos

	Electricidad		
Carga Puntual	$\bar{E}=k_e\frac{q}{r^2}\hat{r}$	$V=k_e Q\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{ref}}\right)$	q: carga, r: distancia. V=0 en $\lvert z\rvert=\infty$
Esfera carga un.	$\bar{E}=k_e\frac{Q}{r^2}\hat{r}$	$V=k_e\frac{Q}{r}, r\geq R$	Adentro $\bar{E}$=0. Q: Carga total. Similar a esf. conductora
Línea de carga ∞	$\bar{E}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r}$	$V=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_{ref}}{r}\right)$	r: distancia ⊥ a la línea. V=0 en $r=R_{ref}$
Plano ∞	$\bar{E}=\pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$	$V=V_0-\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma\lvert z\rvert$	V=V_0 en z=0
Anillo uniforme	$\bar{E}=k_e\frac{Qz}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$	$V=k_e\frac{Q}{\sqrt{(z^2+R^2)}}$	$\bar{E}$ medido en eje z. R: radio. V=0 en $\lvert z\rvert=\infty$
Disco uniforme	$\bar{E}=\pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{\lvert z\rvert}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{z}$	$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\lvert z\rvert\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}-1\right)$	$\bar{E}$ medido en eje z. V=0 $\lvert z\rvert=\infty$

	Magnetismo		
Cable finito	$\bar{B}=k_m\frac{I}{r}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\hat{\theta}$		r distancia ⊥ al cable, θ_1 y θ_2 ángulos subtendidos en **r** por los extremos
Cable ∞	$\bar{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\hat{\theta}$		r distancia ⊥ al cable. Cable en dirección z.
Plano ∞	$\bar{B}=\pm\frac{\mu_0 g}{2}\hat{y},\ z\gtrless 0$		Plano en xy, $\bar{g}$ en dirección x+
Solenoide ∞	$\bar{B}=\mu_0 n I\hat{z}$	$L=\mu_0 n^2 A l$	Solenoide en xy, I en dirección x+, $n=N/l$ (densidad de espiras)
Espira circular	$\bar{B}=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$		$\bar{B}$ en eje de la espira. Espira en plano xy. R radio espira
Toroide	$\bar{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{N I}{r}\hat{\theta}$	$L=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{N^2 S}{r}$	$\bar{B}$ dentro del toroide. N: vueltas totales. r: radio toroide. S: área tor.

Constantes

Constante eléctrica	Permitiv. el. vacío	Coulomb	Constante magnética	Permeab. mg. vacío	Velocidad de la luz
$k_e=8.988\times10^9\frac{N m^2}{C^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\frac{C^2}{N m^2}$	$1C=6.2\times10^{18}e$ e=carga electrón	$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\frac{T\cdot m}{A}=\frac{N}{A^2}$	$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\frac{T\cdot m}{A}$	$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_0}}\approx3\times10^8\frac{m}{seg}$

Apédice Matemática

Tipos de Integrales

	De función escalar $f(\bar{r})$	De campo vectorial $\bar{F}(\bar{r})$
Simple	**Integral simple** $\int f(t)dt=k$	**Integral simple sobre un campo** $\int\bar{F}(t)dt=\int F_1(t)dt\,\hat{x}+\int F_2(t)dt\,\hat{y}+\int F_3(t)dt\,\hat{z}=\bar{r}$
Curva	**Integral de línea** $\int_C f(\bar{r})dl=\int_a^b f(\bar{\gamma}(t))\lVert\bar{\gamma}'(t)\rVert dt=k$ $\gamma(t):[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^3$ parametrización regular de C Si $f(\bar{r})\geqslant0$ se puede interpretar como el "área de una valla"	**Circulación de un campo – Vector dot $\overline{\mathbf{dl}}$** = escalar $\int_C\bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{l}=\int_a^b\bar{F}(\bar{\gamma}(t))\cdot\bar{\gamma}'(t)dt=\int_C F_x dx+F_y dy+F_z dz=k$ **Vector por dl = Vector** $\int_C\bar{F}(\bar{r})dl=\int_C F_1(\bar{r})dl\,\hat{x}+\int_C F_2(\bar{r})dl\,\hat{y}+\int_C F_3(\bar{r})dl\,\hat{z}=\bar{r}$
Doble	**Integral doble / de área** $\iint_D f(x,y)dA=\iint_D f(x,y)dx\,dy=k$	**Integral doble sobre un campo** $\iint_D\bar{F}(x,y)dA=\iint_D F_1(x,y)dx\,dy\,\hat{x}+\iint_D F_2(x,y)dx\,dy\,\hat{y}=\bar{r}$
Superficie	**Integral de superficie** $\iint_S f(\bar{r})dS=\iint_D f(\bar{T}(u,v))\lVert\bar{T}_u\times\bar{T}_v\rVert du\,dv=k$	**Flujo de un Campo – Vector dot $\overline{\mathbf{dS}}$** = escalar $\iint_S\bar{F}\cdot d\bar{S}=\iint_S\bar{F}(\bar{r})\cdot\hat{n}\,dS=\iint F_n dA=k$ **Integral de superficie sobre un campo - vector por** dS $\iint_S\bar{F}(\bar{r})dS=\iint_S F_1(\bar{r})dS\,\hat{x}+\iint_S F_2(\bar{r})dS\,\hat{y}+\iint_S F_3(\bar{r})dS\,\hat{z}=\bar{r}$ Ejemplo: Campo eléctrico de una superficie
Volumen	**Integral triple / de volumen** $\iiint_V f(\bar{r})dV=\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=k$	**Integral de volumen sobre un campo** $\iiint_V\bar{F}(\bar{r})dt=\iiint_V F_1(\bar{r})dV\,\hat{x}+\iiint_V F_2(\bar{r})dV\,\hat{y}+\iiint_V F_3(\bar{r})dV\,\hat{z}=\bar{r}$

Teoremas de Cálculo Vectorial

<u>Cambio de Variable</u>: $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ inyec. y C^1. $D^*\subset\mathbb{R}^2$ acotado y $f:D=T(D^*)\rightarrow\mathbb{R}$ integrable. Si D$\boldsymbol{T}$ inversible en $D^*\Rightarrow$

$$\int_D f=\int_{D^*}(f\circ t)\lvert det(\mathrm{D}\boldsymbol{T})\rvert$$

. Ej. polares, **D** círculo r=R, **D*** r x θ: [0,R] x [0,2π], $\boldsymbol{T}(r,\theta)=\{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\}$

$$\begin{tikzcd} D^* \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f\circ T"'] & D \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Green (o Stokes en áreas de $\mathbb{R}^2$)	Stokes	Gauss
$\oint_{\partial D=C}\bar{F}\cdot d\bar{l}=\iint_D(\bar{\nabla}\times\bar{F})\cdot\hat{k}\,dA$	$\iint_S(\bar{\nabla}\times\bar{F})\cdot d\bar{S}=\oint_{\partial S=C}\bar{F}\cdot d\bar{l}$	$\iiint_V(\bar{\nabla}\cdot\bar{F})dV=\oiint_{\partial V=S}\bar{F}\cdot\hat{n}\,dS$
La integral del rotor de un campo en un área de $\mathbb{R}^2$ es igual a la circulación del campo sobre el borde	El flujo del rotor de un campo sobre una superficie es igual a la circulación del campo sobre la frontera	La integral de volumen de la div. de un campo es igual al flujo del campo sobre la superficie que envuelve al vol.

Expansión Binomial: $(1\pm\varepsilon)^n\simeq1\pm n\varepsilon+\ldots\ (\varepsilon\ll1)$ **. Ej.:** $\frac{1}{\sqrt{r^2+L^2}}=\frac{1}{\sqrt{r^2(1+L^2/r^2)}}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{L^2}{r^2}\right)^{-1/2}\simeq\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\frac{L^2}{r^2}\right)=\frac{1}{r}-\frac{L^2}{2r^3}\ \left(L\ll r,\varepsilon=\frac{L^2}{r^2}\right)$

Integrales Relevantes

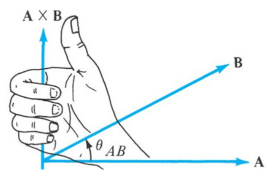
$\oint_C d\bar{l}=0$	$\oint_C\bar{r}\cdot d\bar{l}=0$	$\oint_C\bar{r}\times d\bar{l}=2A$ (A:Área encerrada)	$\oint_{C'}\frac{d\bar{l}'\cdot(\bar{r}-\bar{r}')}{\lvert\bar{r}-\bar{r}'\rvert^3}=0$	$\oint_{C'}\frac{d\bar{l}'\times(\bar{r}-\bar{r}')}{\lvert\bar{r}-\bar{r}'\rvert^3}=\bar{\nabla}\times\oint_{C'}\frac{d\bar{l}'}{\lvert\bar{r}-\bar{r}'\rvert}$	$\iiint_{V'}\frac{\bar{A}\times(\bar{r}-\bar{r}')}{\lvert\bar{r}-\bar{r}'\rvert^3}dV'=\bar{\nabla}\times\iiint_{V'}\frac{\bar{A}}{\lvert\bar{r}-\bar{r}'\rvert}dV'$

Productos Escalar y Vectorial

$$\bar{A}\cdot\bar{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=|A||B|\cos\theta$$

$$\bar{A}\times\bar{B}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}=-\bar{B}\times\bar{A}=|A||B|\sin\theta\,\hat{e},\quad\hat{e}\perp(\bar{A},\bar{B})$$

Regla de la mano derecha: Pulgar $\bar{A}$, Índice $\bar{B}$, del Medio $\bar{A}$ x $\bar{B}$

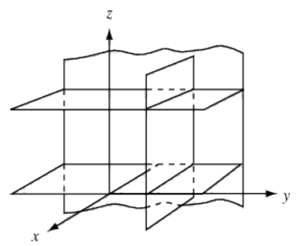
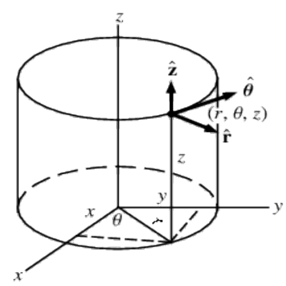
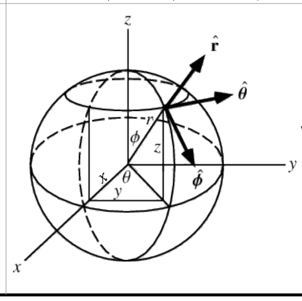
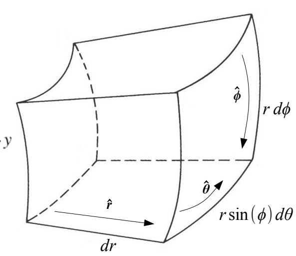


Identidades y Operaciones Simples

Con Gradiente	$\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$	$\nabla(f g)=g\nabla f+f\nabla g$	$\nabla(\bar{A}\cdot\bar{B})=(\bar{B}\cdot\bar{\nabla})\bar{A}+(\bar{A}\cdot\bar{\nabla})\bar{B}+\bar{B}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A})+\bar{A}\times(\bar{\nabla}\times\bar{B})$	
Con Divergencia	$\bar{\nabla}\cdot(\bar{A}+\bar{B})=\bar{\nabla}\cdot\bar{A}+\bar{\nabla}\cdot\bar{B}$	$\bar{\nabla}\cdot(f\bar{A})=(\nabla f)\cdot\bar{A}+f(\bar{\nabla}\cdot\bar{A})$	$\bar{\nabla}\cdot(\bar{A}\times\bar{B})=\bar{B}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{A})-\bar{A}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{B})$	$\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\times f)=0$
Con Rotor	$\bar{\nabla}\times(\bar{A}+\bar{B})=\bar{\nabla}\times\bar{A}+\bar{\nabla}\times\bar{B}$	$\bar{\nabla}\times(f\bar{A})=(\nabla f)\times\bar{A}+f(\bar{\nabla}\times\bar{A})$	$\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A})=\nabla(\bar{\nabla}\cdot\bar{A})-\nabla^2\bar{A}$	$\bar{\nabla}\times(\nabla f)=0$
	$\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C})=\bar{B}(\bar{A}\cdot\bar{C})-\bar{C}(\bar{A}\cdot\bar{B})$	$(\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{C}=\bar{B}(\bar{A}\cdot\bar{C})-\bar{A}(\bar{B}\cdot\bar{C})$	$\nabla\times(\bar{A}\times\bar{B})=(\bar{B}\cdot\bar{\nabla})\bar{A}-(\bar{A}\cdot\bar{\nabla})\bar{B}-\bar{B}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A})+\bar{A}(\bar{\nabla}\cdot\bar{B})$	
Con Laplaciano	$\nabla^2(f g)=g\nabla^2 f+f\nabla^2 g+2(\nabla f\cdot\nabla g)$			

Operaciones Simples	$\nabla r=\hat{r}=\frac{\bar{r}}{r}$	$\nabla r^n=n\, r^{n-1}\hat{r}=n\, r^{n-2}\,\bar{r}$	$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\hat{r}}{r^2}=-\frac{\bar{r}}{r^3}$	$\nabla\frac{1}{r^2}=-2\frac{\hat{r}}{r^3}=-2\frac{\bar{r}}{r^4}$	$\nabla\frac{1}{r^n}=-n\frac{\hat{r}}{r^{n+1}}=-n\frac{\bar{r}}{r^{n+2}},\ n>0$
	$\nabla(\bar{A}\cdot\bar{r})=\bar{A}$	$\bar{\nabla}\cdot\bar{r}/r^3=0$	$\bar{\nabla}\cdot\bar{r}=3$	$\bar{\nabla}\times\bar{r}=0$	$\nabla^2(1/r)=-4\pi\,\delta(\bar{r})$

Coordenadas

	Cartesianas $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$	**Polares / Cilíndricas** $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{z})$	**Esféricas** $(\hat{r},\hat{\phi},\hat{\theta})$ *ϕ cenital, θ azimutal*
Vectores	$\bar{F}=F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z}$	$\bar{F}=F_r\hat{r}+F_\theta\hat{\theta}+F_z\hat{z}$	$\bar{F}=F_r\hat{r}+F_\phi\hat{\phi}+F_\theta\hat{\theta}$
Coord	Cart.: $\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}\quad\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}\quad\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$ Cilíndricas: Notación altern: (ρ, θ o φ, z) $\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{z}\quad\hat{\theta}\times\hat{z}=\hat{r}\quad\hat{z}\times\hat{r}=\hat{\theta}$	$r=\sqrt{x^2+y^2}:[0,+\infty)$ $\theta=\tan^{-1}(y/x):[0,2\pi]$ $z=z(-\infty,+\infty)$ $x=r\cos(\theta)$ $y=r\sin(\theta)$ $z=z$	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}:[0,+\infty)$ $\phi=\cos^{-1}(z/r):[0,\pi]$ $\theta=\tan^{-1}(y/x):[0,2\pi]$ $x=r\cos(\theta)\sin(\phi)$ $y=r\sin(\theta)\sin(\phi)$ $z=r\cos(\phi)$
Versores	Esféricas: Notación alter.: (r, θ, φ o ϕ) (radial, cenital, azimutal) $\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{z}\quad\hat{\theta}\times\hat{z}=\hat{r}\quad\hat{z}\times\hat{r}=\hat{\theta}$	$\hat{r}=x/r\,\hat{x}+y/r\,\hat{y}$ $\hat{\theta}=-y/r\,\hat{x}+x/r\,\hat{y}$ $\hat{z}=\hat{z}$ $\hat{x}=\cos\theta\,\hat{r}-\sin\theta\,\hat{\theta}$ $\hat{y}=\sin\theta\,\hat{r}+\cos\theta\,\hat{\theta}$ $\hat{z}=\hat{z}$	$\hat{r}=\sin\phi\cos\theta\,\hat{x}+\sin\phi\sin\theta\,\hat{y}+\cos\phi\,\hat{z}$ $\hat{\phi}=\cos\phi\cos\theta\,\hat{x}+\cos\phi\sin\theta\,\hat{y}-\sin\phi\,\hat{z}\quad\hat{\theta}=-\sin\theta\,\hat{x}+\cos\theta\,\hat{y}$ $\hat{x}=\sin\phi\cos\theta\,\hat{r}+\cos\phi\cos\theta\,\hat{\phi}-\sin\theta\,\hat{\theta}$ $\hat{y}=\sin\phi\sin\theta\,\hat{r}+\cos\phi\sin\theta\,\hat{\phi}+\cos\theta\,\hat{\theta}\quad\hat{z}=\cos\phi\,\hat{r}-\sin\phi\,\hat{\phi}$
Jacob.	1	r	$r^2\sin\phi$
$d\bar{l}$	$dx\,\hat{x}+dy\,\hat{y}+dz\,\hat{z}$	$dr\,\hat{r}+r\,d\theta\,\hat{\theta}+dz\,\hat{z}$	$dr\,\hat{r}+r\,d\phi\,\hat{\phi}+r\sin\phi\,d\theta\,\hat{\theta}$
$d\bar{S}$	$dy\,dz\,\hat{x}$; $dx\,dz\,\hat{y}$; $dx\,dy\,\hat{z}$	$r\,d\theta\,dz\,\hat{r}$; $dr\,dz\,\hat{\theta}$; $r\,dr\,d\theta\,\hat{z}$	$r^2\sin(\phi)\,d\phi\,d\theta\,\hat{r}$; $r\sin(\phi)\,dr\,d\theta\,\hat{\phi}$; $r\,dr\,d\phi\,\hat{\theta}$
dV	$dx\,dy\,dz$	$r\,dr\,d\theta\,dz$	$r^2\sin\phi\,d\theta\,d\phi\,dr$
$\bar{\nabla} f$	$\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}+\frac{1}{r\sin(\phi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}$
$\bar{\nabla}\cdot\bar{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_r)+\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial z}(r F_z)\right]$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r)+\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\,F_\phi)+\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}$
$\bar{\nabla}\times\bar{F}$	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{r}+\left(\frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\theta}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\hat{z}$	$\frac{1}{r\sin\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\,F_\theta)-\frac{\partial F_\phi}{\partial\theta}\right]\hat{r}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta)\right]\hat{\phi}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_\phi)-\frac{\partial F_r}{\partial\phi}\right]\hat{\theta}$
$\bar{\nabla}\times\bar{F}$ **Det.**	$\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_r & r F_\theta & F_z\end{vmatrix}$	$\frac{1}{r^2\sin\phi}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\phi} & r\sin\phi\,\hat{\theta}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial\theta}\\ F_r & r F_\phi & r\sin\phi\,F_\theta\end{vmatrix}$
$\dot{\bar{r}},\ \ddot{\bar{r}}$	$\dot{\bar{r}}=\dot{x}\,\hat{x}+\dot{y}\,\hat{y}+\dot{z}\,\hat{z}$ $\ddot{\bar{r}}=\ddot{x}\,\hat{x}+\ddot{y}\,\hat{y}+\ddot{z}\,\hat{z}$	$\dot{\bar{r}}=\dot{r}\,\hat{r}+r\dot{\theta}\,\hat{\theta}+\dot{z}\,\hat{z}$ $\ddot{\bar{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\,\hat{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\,\hat{\theta}+\ddot{z}\,\hat{z}$	$\dot{\bar{r}}=\dot{r}\,\hat{r}+r\sin(\phi)\dot{\theta}\,\hat{\theta}+r\dot{\phi}\,\hat{\phi}$ $\ddot{\bar{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2-r\sin^2\phi\,\dot{\theta}^2)\,\hat{r}+(2\sin\phi\,\dot{\theta}\,\dot{r}+2r\cos\phi\,\dot{\theta}\dot{\phi}+r\sin\phi\,\ddot{\theta})\,\hat{\theta}+(2\dot{r}\dot{\phi}+r\ddot{\phi}-r\sin\phi\cos\phi\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\phi}$
$\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$
			 

Áreas / Volúmenes

Esfera: *Area*: $4\pi r^2$ *Vol*: $4/3\,\pi r^3$. **Cilindro**: *Area*: $2\pi r^2+2\pi r h$ *Vol*: $\pi r^2 h$. ***Círculo***: *Area*: πr^2 *Diámetro*: $2\pi r$.