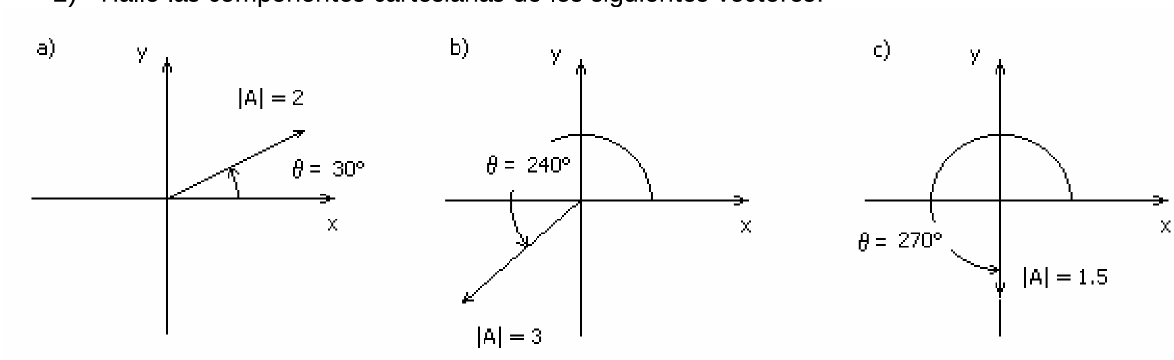
2. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

I. Vectores (primera parte)

1) Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Represéntelos gráficamente.
   a) **A**= (-4; 3) b) **B** = (2; 0) c) **C** = -2 $\hat{x}$ – 3 $\hat{y}$ d) **D** = 0 $\hat{x}$ – 5 $\hat{y}$

2) Halle las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



3) Dados los vectores **A** y **B** indicados, halle gráficamente su suma.

   a) **A** = (-3; 2) **B** = (-2; 5)

   b) **A** tal que |**A**| = 2 , θ = 240 ° **B** tal que |**B**|= 3 , θ = 135 °

   c) **A** = (-2; 0) **B** = (0; 4)

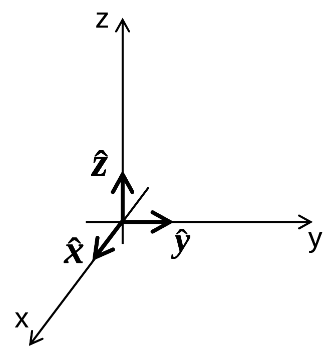
4) Sean **A** y **B** los vectores dados en el ejercicio anterior. Halle analíticamente las componentes cartesianas y polares del vector **A** + **B**, y del **A** – **B**. ¿El módulo del vector suma, **C = A** + **B**, es igual a la suma de los módulos de **A** y de **B**?

5) Halle el vector que tiene origen en el punto **A** y extremo en el punto **B** en los siguientes casos:
   a) **A**=(2; -1) y **B**=(-5; -2).
   b) **A** =(2; -5; 8) y **B**=(-4; -3; 2).

6) Dados los vectores:
   A = (3 $\hat{x}$ + 2 $\hat{y}$ + 3 $\hat{z}$) B = (4 – 3 + 2) C = (-2 – 5)
   efectúe las siguientes operaciones:
   a) (**A** – **B**)/|**C**| + **C**
   b) 5**A** - 2**C**
   c) –2 **A** + **B** – **C**/5

Se define el **producto escalar** de dos vectores como **A . B =** $|A||B|\cos\theta$ **,** donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.

7) Sean $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura.



$\hat{x}$ = (1;0;0) $\hat{y}$ = (0;1;0) $\hat{z}$ = (0;0;1)

Calcule $\hat{x}.\hat{x}$, $\hat{x}.\hat{y}$, $\hat{x}.\hat{z}$, $\hat{y}.\ \hat{x}$, $\hat{y}.\hat{y}$, $\hat{y}.\hat{z}$, $\hat{z}.\hat{x}$, $\hat{z}.\hat{y}$, $\hat{z}.\ \hat{z}$

8) Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si

A = $A_x\ \hat{x} + A_y\ \hat{y} + A_z\ \hat{z}$ **B** = $B_x\ \hat{x} + B_y\ \hat{y} + B_z\ \hat{z}$

entonces

$$\boxed{\mathbf{A}\,.\mathbf{B} = A_x\ B_x + A_y\ B_y + A_z\ B_z}$$

9) Efectúe el producto escalar de los vectores **A** y **B** y diga si en algún caso **A** es perpendicular a **B**.

a) **A** = $3\hat{x} - 2\hat{j} + \hat{z}$ **B** = $-\ \hat{x} + 3\hat{z}$

b) **A** = (2; 3; -1) **B** = (6; -5; 2)

c) |**A**| = 3 |**B**| = 2 $\theta = 60°$ (θ: ángulo entre **A** y **B**)

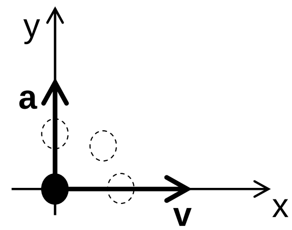
10) La posición de una partícula en el espacio se puede describir con el siguiente vector posición **r**(t) **=** $(t^3 + 2t + 1)\ \hat{x} - e^{2t}\ \hat{y}$ **+** $\cos(3t)\ \hat{z}$ halle :

a) **v** (t) = d**r** **/**dt
b) |**v**| (t) = |d**r**/dt|
c) **a** (t)= d² **r**/d²t

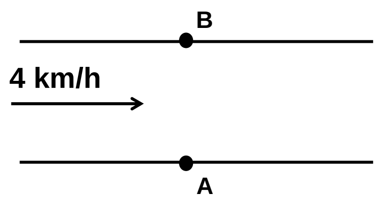
En los tres casos especializar en t = 0 y en t = $\pi/6$.

II. Vectores (segunda parte)

1) Una partícula pasa por el punto (0,0) con la velocidad y aceleración que se indican en la figura. ¿Cuál de los tres círculos punteados puede representar la posición de la partícula un instante breve después? Justifique.



2) Un río de orillas rectas y paralelas tiene un ancho de 40 m. El agua del río baja a una velocidad de 4 km/h paralela a los márgenes. Un nadador quiere cruzar el río en línea recta desde el punto A hasta el B.

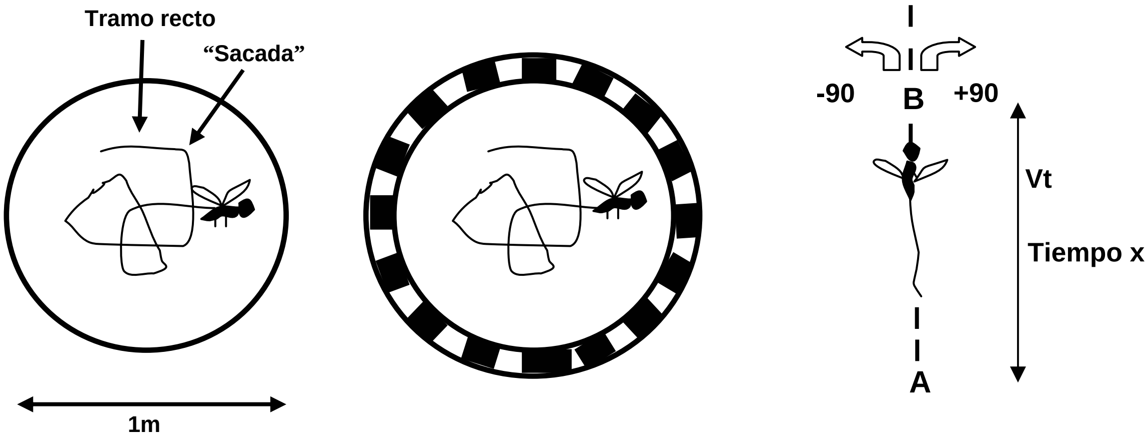


a) ¿En qué dirección tiene que nadar para llegar a B en 1 minuto? ¿a qué velocidad nada?
b) ¿Cuál es la mínima velocidad que puede tener el nadador para poder llegar a **B** (siempre en línea recta)?

3) El mismo nadador del ejercicio anterior quiere volver de **B** hasta **A** un tiempo después pero observa que el río corre en el mismo sentido que antes pero al parecer un poco más rápido. Decide nadar a 6 km/h en cierta dirección pero llega a la otra orilla a 20 metros de **A** (río abajo) después de nadar 1,5 minutos.

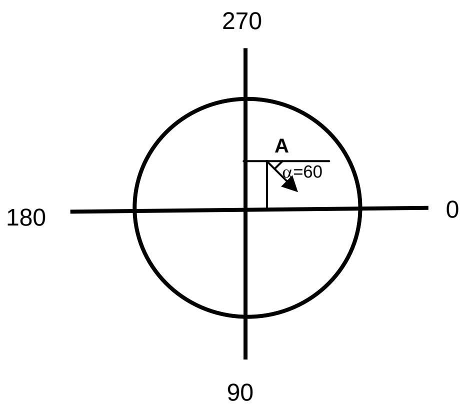
a) ¿Cuál es la velocidad del agua del río ahora? ¿En qué dirección nadó?
b) ¿Podría haber llegado justo al punto **A** eligiendo una mejor dirección de nado?

4) Dickinson y Tamero estudiaron las trayectorias de vuelo de moscas sometidas a diferentes estímulos visuales; estos estudios revelaron que las moscas construyen sus trayectorias mediante una alternancia entre tramos de vuelo en línea recta y “sacadas” que consisten en giros rápidos de aprox 90º en una de dos direcciones seguidos de un nuevo vuelo en línea recta. Para identificar los estímulos que disparan la ocurrencia de las sacadas, los autores construyeron una arena donde las moscas vuelan libremente y son sometidas a diferentes tipos de imágenes mientras se registra su trayectoria de vuelo mediante un sistema de video:



Para analizar las diferencias entre el vuelo libre en una arena uniforme (U) y una arena con un patrón visual “estructurado” (E), los investigadores registraron la trayectoria de una mosca en la arena U y tomaron los siguientes datos:

Punto de partida A ubicado 20 cm por encima y 10 cm a la derecha del centro de la arena (ver esquema). La mosca estudiada volaba en la dirección que indica la figura.
Velocidad de vuelo recto constante = 30 cm/seg



Tramo	Tiempo de vuelo	Giro al fin del tramo*	Posición final
1 (A a B)	0,85 seg	Vuelo 60º	B
2 (B a C)	0,5 seg	+ 85	C
3 (C a D)	0,45 seg	+ 92	D
4 (D a E)	1,1 seg	- 79	E

* ángulo del giro respecto a la dirección de vuelo (Se define + en sentido horario y - en sentido antihorario; ver figura)

a) calcular la posición final de la mosca en cada tramo en coordenadas cartesianas. Representar la trayectoria en la arena gráficamente

Después de nuevos experimentos en el ambiente estructurado, los investigadores descubrieron que las moscas compensan este estimulo visual modulando su velocidad de vuelo. En un experimento, una mosca paso por los siguientes puntos a los tiempos indicados:

A= (-15; -20) t = 12 seg
B= (-29,63; -5,37) t = 12,9 seg
C= (-17.99; 19,63) t = 14,1 seg

b) cual es la nueva velocidad de vuelo (suponga una velocidad de vuelo constante) en la arena E ? Cambio la velocidad de vuelo respecto a la arena U?

referencia: Tammero LF, and Dickinson MH. *J.Exp.Biol.* (2002) 205:327-343

Respuestas:

2) a) 59º (medidos desde la dirección **AB** y río arriba)
   b) 4 km/h
3) a) 6.58 km/h ; 74.5º (medidos desde la dirección **BA** y río arriba)
4) a) B= (22,75; -2,08) C= (10,47; -10,68) D= (3,12; 0,64) E= (-27,48; -11,72) (datos en cm)
   b) v = 23 cm/seg

III. Ecuaciones Diferenciales

1) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Es decir, encuentra las funciones y(t). En todos los casos, y_0 es una constante.

(a) $\frac{dy}{dt} = 2\ ;\ \ y(0) = 0$

(b) $\frac{dy}{dt} = a\ ;\ \ y(0) = y_0$

(c) $\frac{dy}{dt} = e^t + 2\ ;\ \ y(0) = y_0$

(d) $\frac{dy}{dt} - \sin(3t) = 0\ ;\ \ y(0) = y_0$

(e) $\frac{dy}{dt} = 2y\ ;\ \ y(1) = y_0$

(f) $t\frac{dy}{dt} = 1;\ \ y(1) = y_0$

2) Suponga una colonia que tiene N_0 bacterias al tiempo t=0. Si la colonia crece a una tasa proporcional a su población, entonces:

$$\frac{dN}{dt} = k.N$$

con $k>0$.

a) Resuelva esta ecuación para encontrar $N(t)$. Grafique cualitativamente la solución.

b) ¿Cuánto tarda la población inicial en duplicarse? ¿Cuánto tiempo más hay que esperar para que se vuelva a duplicar?

3) La ecuación del ejercicio 2) (crecimiento exponencial o Malthusiano) tiene una aplicación limitada porque no es razonable que la colonia siga creciendo para siempre. Una mejora es considerar que la tasa de crecimiento depende del número de bacterias de forma tal que si N es un número "chico" la colonia crezca pero si es un número "grande" disminuya. Esto puede tenerse en cuenta de la siguiente forma (¿por qué?):

$$\frac{dN}{dt} = r.N\left(1 - \frac{N}{k}\right)$$

En la ecuación anterior, r es una constante positiva y k (también positiva) se conoce como *capacidad de carga*.

a) ¿Para qué conjunto de valores de N, la población disminuye y para cuales crece?

b) ¿Para qué valores de N, la población no crece ni disminuye?

c) ¿Existe algún valor de N *estable*? Por estable queremos decir que si N aumenta o disminuye respecto de ese valor, la población vuelve a ese valor.

d) Encuentre la solución $N(t)$. Para hacerlo considere la ayuda.

e) Grafique cualitativamente la solución para distintas condiciones iniciales e interprete el resultado en función de las respuestas anteriores. Para graficar, puede usar un programa como el Matlab.

Ayuda:

$$\int \frac{1}{x\left(1 - \frac{x}{k}\right)} = \ln\left(\frac{x}{x-k}\right)$$

4) Sea $\mathbf{X} = (x\,;\,y)$ una función de $\Re^2$ en $\Re^2$. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{X}} = \left(\frac{dx}{dt};\frac{dy}{dt}\right) = \left(2;4y\right)$$

Encuentre la solución con condiciones iniciales $\mathbf{X}(t=0)=(1;1)$ y exprésela en forma vectorial.

5) Una reacción química autocatalítica es una en la que la producción de una sustancia está estimulada por la propia sustancia. Este proceso (*retroalimentación positiva*) llevaría a un crecimiento descontrolado de la sustancia en cuestión si no estuviera limitado de alguna forma. Supongamos que llamamos c a la concentración de la sustancia C y $f(c)$ a su tasa de producción por unidad de tiempo dc/dt. La siguiente ecuación es un ejemplo de una ecuación que modela una reacción autocatalítica:

$$\frac{dc}{dt} = f(c) = 2\frac{1}{\text{seg}}\cdot c - 1\frac{1}{\text{molar.seg}}\cdot c^2$$

a) Haga un gráfico de la tasa de producción en función de c.

b) ¿Para qué valores de c la tasa de producción es positiva y para qué valores es negativa?

c) Si inicialmente la concentración de C es 0.75 molar, ¿subirá o disminuirá la concentración con el tiempo?

d) Encuentre una expresión para $c(t)$.

e) ¿Qué relación tiene este problema con el del crecimiento logístico (ejercicio 3)

6) Bajo ciertas condiciones que estudiaremos cuando veamos mecánica a escala celular y molecular, la aceleración de un objeto que se mueve en un fluido es $a = -r.v$, donde r es una constante positiva que depende de la masa y de la forma del objeto y de la viscosidad del fluido. Si la velocidad inicial es $v_0>0$, encuentre la velocidad en función del tiempo para el objeto.

7) Un problema clásico de la *psicofísica* es cómo se traduce un estímulo físico en una sensación o percepción. Usualmente, los estímulos que percibimos, como la luz, el sonido y la presión, tienen una amplia gama de intensidades, que varía en muchos órdenes de magnitud. Por esta razón, los mecanismos sensoriales tienen que tener la doble capacidad de ser muy sensibles (detectar pequeños estímulos) y a la vez tener un *rango dinámico* amplio (detectar estímulos de muy diversa magnitud sin saturar).
Este tema fue estudiado por Ernst H. Weber (1795–1878). En uno de sus experimentos clásicos, un sujeto sostenía un peso con una mano y los ojos vendados. Lentamente, se iba agregando un peso extra y la persona debía decir en qué momento empezaba a sentir que el peso cambiaba. Lo que Weber descubrió fue que la percepción era proporcional al incremento relativo en el peso. Es decir, si una persona sostenía inicialmente 1 kg de peso y sentía el primer cambio cuando se agregaban 100 gr, esa misma persona necesitaría un incremento de 200 gr para sentir un cambio si sostenía un peso de 2 kg. En términos matemáticos, si llamamos p a la percepción y s al peso:

$$\Delta p = k\frac{\Delta s}{s}$$

, donde k es la constante de proporcionalidad. Es decir, los cambios en la percepción (Δp) son proporcionales a los cambios relativos en el peso ($\Delta s/s$). Pasando Δs dividiendo y considerando cambios infinitesimales, podemos escribir una ecuación diferencial:

$$\frac{dp}{ds} = \frac{k}{s}$$

a) Resolver la ecuación anterior para encontrar la percepción en función del estímulo (en este caso el peso s). Suponga que s_0 es el estímulo umbral debajo del cual no se percibe nada.

b) Suponga que si usa un estimulo de magnitud s_0, la percepción es p_0. ¿En cuánto se incrementa la percepción si se multiplica la magnitud del estímulo por 10? ¿Y si se vuelve a multiplicar por 10? Interprete este resultado en términos de la ventaja de tener un rango dinámico amplio.

8) Resuelva estas ecuaciones diferenciales de segundo orden. Tome como condición inicial en todos los casos $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$ (F y A son dos constantes)

a) $\mathrm{m}\, x'' = F$; b) $x'' = A.t$ c) $x'' = e^t$

Ayuda: Muchas veces, para resolver una de segundo orden, conviene primero asignarle un nuevo nombre a la derivada primera. Por ejemplo, en lugar de x'', usar x'=v y x''=v'.

Notación: $x' = \frac{dx}{dt}$ y $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$

9) Probar que $x = \cos(3t)$ es una solución de la ecuación $x'' = -9.x$

10) Encontrar una solución para las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas

a) $\boldsymbol{x''} = -4.\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x(0)} = 3$; $\boldsymbol{x'(0)} = 0$
b) $\boldsymbol{x''} = -4.\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x(0)} = 0$; $\boldsymbol{x'(0)} = 6$
c) $\boldsymbol{x''} = -4.\boldsymbol{x} - 12$; $\boldsymbol{x(0)} = 0$; $\boldsymbol{x'(0)} = 0$