4. Movimiento Oscilatorio

Cinemática del movimiento oscilatorio

1) El desplazamiento de un objeto está determinado por la ecuación y(t) = 3cm sen(20π/s t). Grafique *y* en función del tiempo y señale la amplitud y el periodo de las oscilaciones.

2) La coordenada de un objeto viene dada por (0.057m) cos[(3.9/s)t].
    a) ¿Cuánto valen la amplitud *A*, la frecuencia angular ω, la frecuencia *f*, el período *T* y la fase ϕ?
    b) Escriba las expresiones para la velocidad *v* y la aceleración *a* del cuerpo.
    c) Determine *y*, *v* y *a* en t=0.25 segundos.

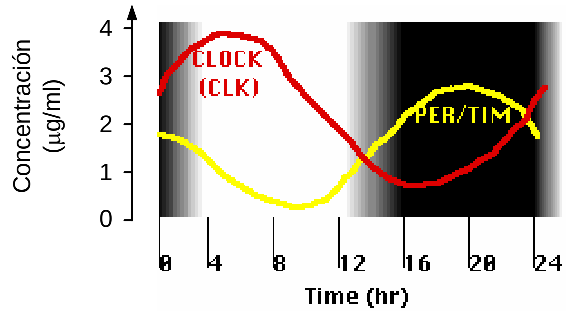
3) Un objeto que tiene un movimiento armónico simple tiene su máximo desplazamiento 0,2 m en t = 0. Su frecuencia es de 8 Hz.
    a) Hallar los instantes en que las elongaciones son por primera vez 0,1 m; 0 m; -0,1m; -0,2m
    b) Halle las velocidades en dichos instantes.

4) Un objeto describe un movimiento armónico simple con una amplitud *A* = 63 mm y una frecuencia ω = 4.1 1/s. Considere t=0 cuando el objeto pasa por el punto medio del recorrido.
    a) Escriba las expresiones para x, v, a.
    b) Determine *x*, *v* y *a* para t=1.7 segundos.

5) Un objeto oscila con frecuencia 10 Hz y tiene una velocidad máxima de 3 m/s. ¿Cuál es la amplitud del movimiento?

6) ¿Para qué desplazamiento de un objeto en un movimiento armónico simple es máximo el módulo de
    a) La velocidad.
    b) La aceleración.

7) En biología encontramos fenómenos oscilatorios por todos lados (ritmos circadianos, actividad cardiaca, crecimiento estacional, actividad neuronal rítmica, etc, etc). En gran parte de los casos, la variable que sigue un comportamiento oscilatorio no es la posición de un objeto sino de algún otro tipo (concentración de proteínas, flujo, tamaño, voltaje, etc). Asimismo, difícilmente las variables sigan funciones sinusoidales puras.
El siguiente gráfico muestra la fluctuación en las concentraciones de las proteínas PER/TIM y CLOCK en el transcurso de un día en células de la mosca *Drosophila melanogaster*. Estas proteínas controlan el ritmo circadiano de la mosca. Hay una tercera oscilación en la figura: la luminosidad (en tonos de gris). ¿Cuál es el período de cada oscilación? ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones de concentración? ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos curvas? Exprese las diferencias en horas, en radianes y en grados, considerando que el período corresponde a 2π.



Respuestas

1) 3cm y 0,1 s

3) a) 0,02s; 0,031s; 0,042s; 0,062s b) –8,67m/s; -10m/s; -8,67m/s; 0m/s

5) 4,8 cm

Dinámica del movimiento oscilatorio

1) Un cuerpo de masa m está apoyado sobre una mesa, unido a un resorte de longitud natural ℓ_0 y constante elástica k. Se lo desplaza de su posición de equilibrio una distancia d y en $t = 0$ se lo suelta.

    a) Haga el diagrama de cuerpo libre del cuerpo y plantee la ecuación diferencial para su posición a partir de la ley de Hooke y la 2ª Ley de Newton.
    b) Considerando las condiciones iniciales del problema encuentre la solución $x(t)$ que describe la posición del cuerpo en el tiempo. ¿Cómo se relaciona la velocidad angular ω con los parámetros del problema?
    c) Escriba las ecuaciones de la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

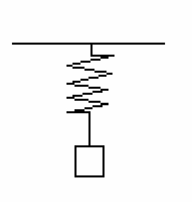
    Se agarra ahora el mismo resorte y cuerpo y se los cuelga del techo.

    d) Repita los puntos a y b, encontrando una expresión para $y(t)$, la distancia del cuerpo al techo.

2) La frecuencia con la que oscila un cuerpo unido al extremo de un resorte es 5 Hz ¿Cuál es la aceleración del cuerpo cuando el desplazamiento es 15 cm?

3) Para estirar 5 cm un resorte horizontal es necesario aplicarle una fuerza de 40 N. Uno de los extremos de este resorte está fijo a una pared mientras que en el otro hay un cuerpo de 2 kg. La masa del resorte es despreciable. Si se estira el resorte 10 cm a partir de su posición de equilibrio y se lo suelta:
    a) ¿Cuál es la amplitud y la frecuencia del movimiento? ¿Cuánto tiempo tarda en hacer una oscilación completa?
    b) Obtenga la expresión de posición en función del tiempo y grafíquela señalando la posición de equilibrio.
    c) Calcule la posición, la velocidad y la aceleración al cabo de 0,2 seg. Describa cualitativamente en que etapa del movimiento oscilatorio está.

4) Un cuerpo de masa 800 g está suspendido de un resorte de longitud natural 15 cm y constante elástica K=320 N/m, que se encuentra colgado del techo.

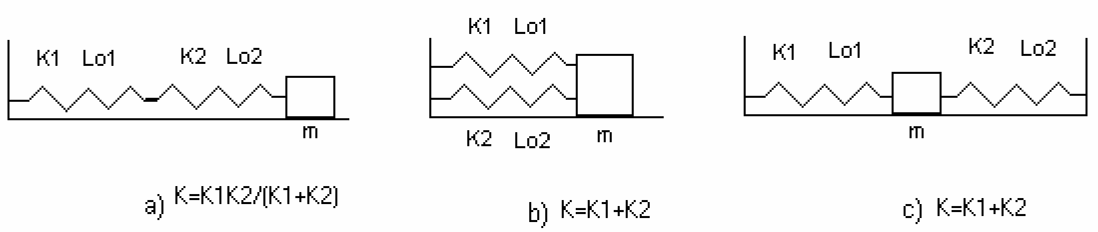


a) Halle la posición de equilibrio.
b) Si se desplaza al cuerpo 1,5 cm hacia abajo a partir de la posición de equilibrio y se lo suelta, halle su posición en función del tiempo.

5) Usando los órganos sensoriales del sus patas, las arañas detectan las vibraciones de sus telas cuando una presa queda atrapada.
a) Si al quedar atrapado un insecto de 1 gr la tela vibra a 15 Hz, ¿cuál es la constante elástica de la tela?
b) ¿Cuál seria la frecuencia cuando queda capturado un insecto de 4 gr?

6) Cuando una persona de 80 kg sube a su coche, los amortiguadores se comprimen 2 cm. Si la masa total que soportan es de 900 kg (incluidos auto y pasajero),
a) Calcule la constante elástica de los amortiguadores
b) Halle la frecuencia de oscilación.

7) Un cuerpo de masa m está unido a resortes de constante k1 y k2 como se indica en cada uno de los siguientes casos. Demuestre que las mismas situaciones se pueden representar por un único resorte de cte. elástica K tal que



8) Escriba la ecuación diferencial para pequeñas oscilaciones de un péndulo. Demuestre que su período de oscilación es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde L es el largo del péndulo, y es independiente de la masa.

9) El periodo de oscilación de un péndulo es una función de los parámetros que caracterizan al sistema en cuestión y también, en principio, de las condiciones iniciales. Existe un tipo de argumento, bien general, que permite encontrar la dependencia funcional de una magnitud característica de la evolución de un sistema, como puede ser el período de oscilación, a

partir de la consideración de las dimensiones (el tipo de unidades) que de debe tener dicha magnitud.

a) Ante todo, enumere las n variables v_i (i=1,...,n) de las que, en principio, podría depender el período de un péndulo, sin tener en cuenta las unidades.

b) Dejemos momentáneamente de lado las condiciones iniciales, restringiendo el análisis al resto de los parámetros que determinan el sistema. El periodo dependerá de estos últimos de alguna forma desconocida, pero con la constricción de que esta combinación debe ser tal que posea dimensiones de tiempo. Piense un rato y vea que es razonable concluir la necesidad de una relación de la forma $T = \beta . \nu_1{}^{a_1} . \nu_2{}^{a_2} \cdots \nu_n{}^{a_n}$, donde β es una constante adimensional de proporcionalidad y las $a_1, \cdots a_n$ son potencias a determinar. Recordar que entonces debe valer $[T] = [\nu_1]^{a_1} . [\nu_2]^{a_2} \cdots [\nu_n]^{a_n}$, con $[T] = seg$, $[m] = kg$, etc. Encontrar las potencias $a_1, \cdots a_n$ y comparar el resultado con el del ejercicio 8.

c) Así, omitiendo la dependencia de las condiciones iniciales se recupera un resultado que se sabía válido bajo la aproximación de pequeñas oscilaciones. Esto es esperable. Consideremos como única condición inicial relevante, por simplicidad, el ángulo θ_0 de apartamiento inicial medido desde el punto de equilibrio (aunque el argumento puede extenderse si se tiene en cuenta una versión adimensionalizada de la velocidad inicial). [Observación: θ_0 es adimensional] Piense otro rato y convénzase de que la incorporación de θ_0 como variable implica hacer que la constante de proporcionalidad β se convierta en una función de θ_0. ¿Por qué? Si θ_0 es pequeño, la función β puede aproximarse por su polinomio de Taylor hasta orden dos: $\beta \approx \beta|_{\theta_0=0} + \beta'|_{\theta_0=0} . \theta_0 + \beta''|_{\theta_0=0} . \frac{\theta_0{}^2}{2}$. Sin embargo, por la simetría del problema frente a una reflexión alrededor del eje vertical que pasa por el punto de equilibrio, la función β debe ser invariante frente al cambio $\theta_0 \to -\theta_0$. Siga pensando, y note que ello implica que el término lineal del desarrollo de Taylor debe tener un coeficiente $\beta'|_{\theta_0=0}$ nulo. ¿Por qué? Así, hemos demostrado que la dependencia con las condiciones iniciales tiene un efecto recién a segundo orden en un desarrollo de la constante β.

10) La aceleración de la gravedad varía ligeramente sobre la superficie de la tierra. Si un péndulo tiene un período de T = 3,00 segundos en un lugar en donde g = 9,803 m/s² y un período de T = 3.0024 segundos en otro lugar. ¿Cuál es el valor de g en este último lugar?

11) En la *Microscopía de Fuerza Atómica*, una punta de prueba se utiliza para explorar superficies con resolución nanométrica. En una de las aplicaciones de esta técnica, a la superficie se unen previamente copias de alguna biomolécula de la cual se quiera investigar el detalle de sus propiedades físicas como ser resistencia a la tensión, elasticidad y estructura. Se busca en cada experimento pegar con la punta de prueba un extremo de una biomolécula única (el otro permanece adherido a la superficie). Al retraer la punta hacia arriba, la biomolécula comienza a estirarse y ejerce una fuerza hacia abajo sobre la punta (Fig 1a). La punta de prueba se comporta como un resorte del cual el experimentador conoce la constante elástica (K_1) y puede medir en cada instante su elongación (L_1) y la de la biomolécula (L_2) (Fig 1b).

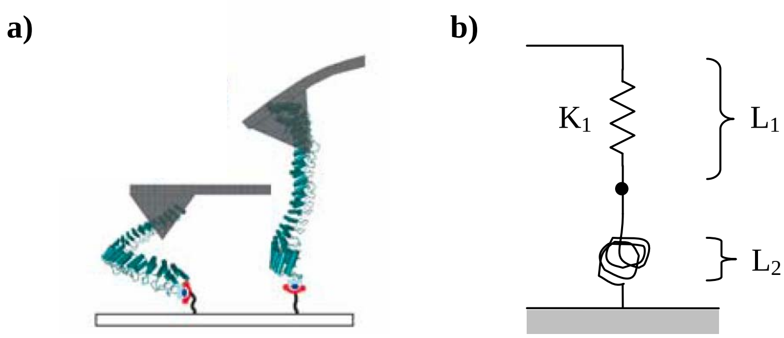


Figura 1. a) La caricatura muestra cuando la punta de prueba toca una molécula de proteína (izq) y la estira (der). La punta se deforma elásticamente por la fuerza realizada por la molécula al estirarse. **b)** En el modelo, el resorte representa a la punta de prueba y el ovillo a la biomolécula de interés. L1 y L2 son nulos cuando la punta de prueba o la proteína, respectivamente, tienen su longitud natural.

1) ¿Cómo se calcula con este sistema la fuerza que ejerce la biomolécula en función de su estiramiento?

2) En un trabajo publicado en la revista Nature en marzo de 2006, el grupo de Piotr Marszalek de la Universidad de Duke estudia las propiedades elásticas de una proteína con dominios estructurales de ankirina. Los investigadores descubrieron que la proteína misma se comporta en ciertas condiciones como un resorte de dimensiones nanométricas.
La figura 2 muestra mediciones de microscopía de fuerza atómica obtenidas para tres proteínas distintas. Se grafica la fuerza que ejerce la proteína en función de su estiramiento.

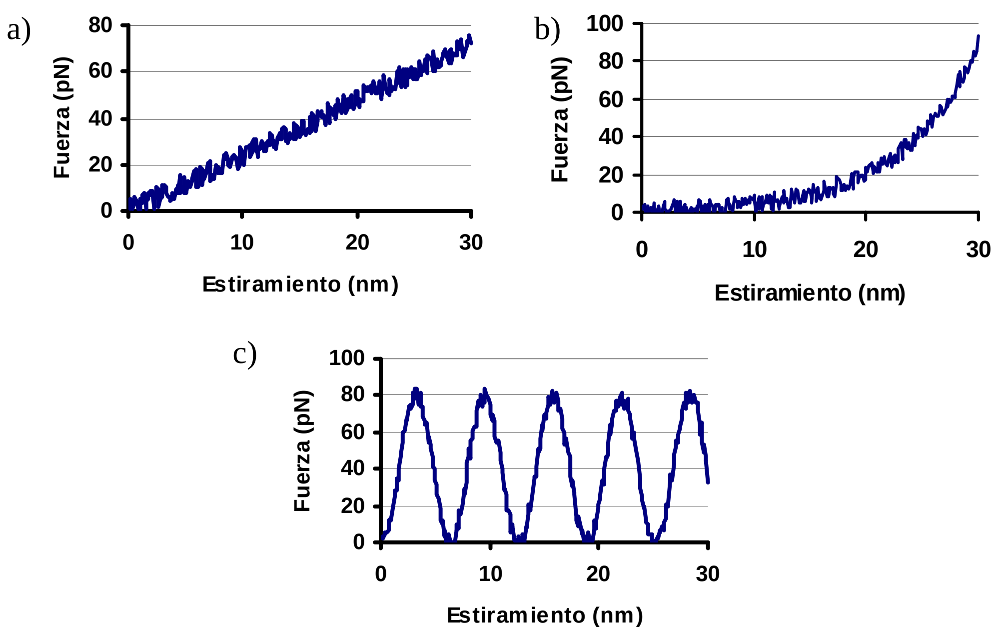


Figura 2.

¿Cuál de estos gráficos se correspondería con la proteína estudiada por Marszalek? Justifique. Averigüe aproximadamente su constante elástica.

3) Si se construye una serie de proteínas con distinto número de repeticiones de ankirina y se mide su constante elástica se obtiene un gráfico como el de la figura 3.

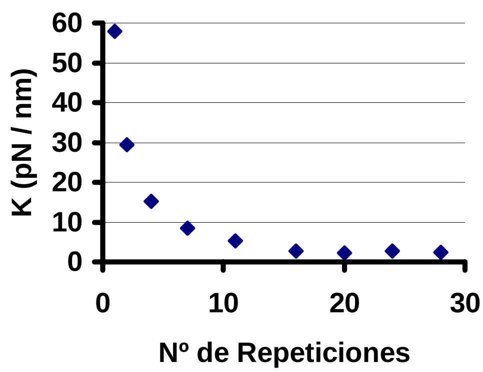


Figura 3

a. ¿Cómo interpreta este resultado? (Pista: repase el problema 13).
b. ¿Más o menos cuántas repeticiones de ankirina tiene la proteína estudiada por Piotr?

Respuestas

2) 148 m/s^2

4) a) 17,5 cm del techo

5) a) 8,9 N/m b) 7,5 Hz

6) a) 40000 N/m b) 1,06 Hz

10) 9,787 m/s^2