8. Mecánica a escala celular y molecular
Parte II: Oscilaciones amortiguadas

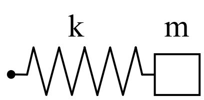
Movimiento oscilatorio amortiguado.

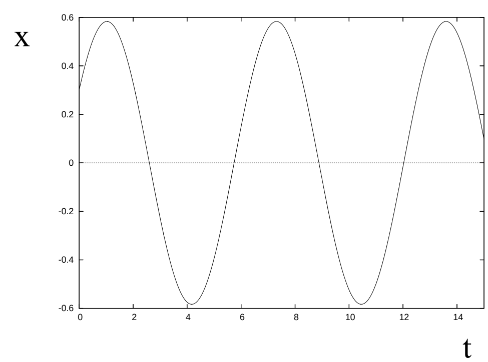
1) Para una partícula de masa m sometida a una fuerza $\bar{F}$, las dinámicas posibles en un espacio acotado se reducen a movimientos oscilatorios o bien a la convergencia a un punto de equilibrio.

   El primer caso se modela paradigmáticamente como un oscilador caracterizado por una fuerza proporcional al desplazamiento respecto del equilibrio, con una constante elástica k. En una dimensión, la ecuación a resolver es:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$





   i) Escriba la solución general $x(t)$ y encuentre que la frecuencia de oscilaciones es de $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

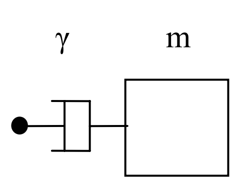
   ii) Encuentre la trayectoria que describe un oscilador que se mueve después de soltarlo (con velocidad nula) tras aplicarle un desplazamiento inicial de 1m.

   iii) ¿Todas las condiciones iniciales devienen en soluciones oscilatorias?

   El segundo caso se modela proponiendo una disipación lineal γ. En este caso, la ecuación resulta

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0$$

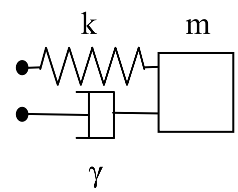


iv) Escriba la solución general de esta ecuación diferencial y caracterice su comportamiento.

v) ¿La partícula se detiene totalmente en algún momento?

El caso más genérico se construye con un oscilador amortiguado, que se describe mediante la ecuación

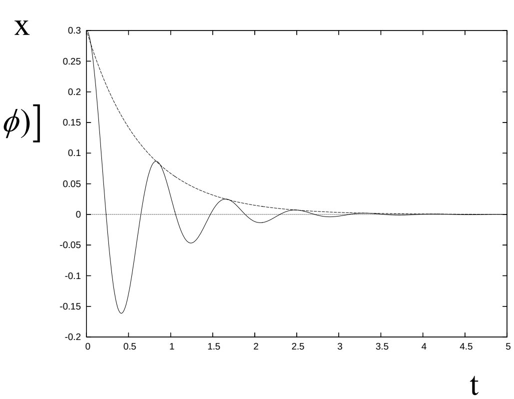
$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0$$
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0$$



Aquí los dos efectos (restitución y disipación) compiten. Las formas de las soluciones en este caso dependen de ciertas relaciones entre los parámetros *m*, *k*, y *γ*. El resultado de las combinaciones de parámetros resulta en dos tipos de movimiento, caracterizados por *oscilaciones subamortiguadas*, o *decaimientos sobreamortiguados*. En todos los casos, la disipación hará decaer asintóticamente la solución a un equilibrio, alrededor del cual el sistema puede oscilar o decaer sin oscilaciones.

- En el rango $\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 < \omega_0^2$ (1) domina el término inertivo (de masa) y las soluciones presentan oscilaciones amortiguadas

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_{am}t + \phi)$$
$$v(t) = -Ae^{-\lambda t}\left[\lambda\cos(\omega_{am}t + \phi) + \omega_{am}\sin(\omega_{am}t + \phi)\right]$$
$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\gamma}{2m} \\ \omega_{am}^2 = \omega_0^2 - \left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2 \end{cases}$$



vi) Compare la frecuencia de oscilación para este caso con la del oscilador no amortiguado. Interprete.

vii) Verifique que las constantes A y B para un movimiento de condiciones iniciales $x(0)=x_0$ y $v(0)=0$ son $\phi=\arctan\left(-\dfrac{\lambda}{\omega_{am}}\right)$ y $A=\dfrac{x(0)}{\cos(\phi)}$.

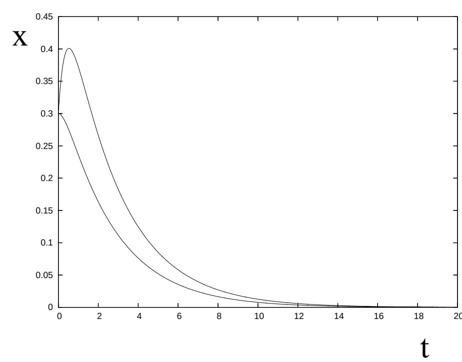
viii) Encuentre el tiempo τ para el que la amplitud de oscilaciones cae a e^{-1} veces su valor inicial. A pesar de que el sistema oscilará indefinidamente, este tiempo puede considerarse un estimador del tiempo en que el sistema se mueve en un rango "del orden" de la amplitud inicial.

Estime el número de oscilaciones que el sistema despliega hasta ese tiempo (aproxime el tiempo de oscilación por $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$). ¿En qué casos vale esa aproximación? Calcule para el caso particular $\dfrac{\gamma}{m}=\dfrac{\omega_0}{5}$.

- Por otra parte, en el rango $\left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2>\omega_0^2$ (2) domina el término disipativo y las soluciones no oscilan, sino que decaen al origen. Se trata de un movimiento *sobreamortiguado* cuya solución general se escribe como

$$x(t)=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{cases}\lambda_1=-\dfrac{\gamma}{2m}+\sqrt{\left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2-\omega_0^2}\\[2ex]\lambda_2=-\dfrac{\gamma}{2m}-\sqrt{\left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2-\omega_0^2}\end{cases}$$



ix) Describa la solución cuando $\left(\dfrac{\gamma}{2m}\right)^2\gg\omega_0^2$. Interprete.

x) En la figura se ven ejemplos de dos simulaciones numéricas con condiciones iniciales distintas. En una de ellas, el objeto se aleja primero y luego converge al equilibrio. ¿Es este movimiento posible?

Cambio de escalas: dinámica en el mundo microscópico.

2) El problema del oscilador amortiguado puede pensarse como un modelo simple para el movimiento de un cuerpo sumergido en un medio viscoso y ligado por una fuerza de restitución al equilibrio.

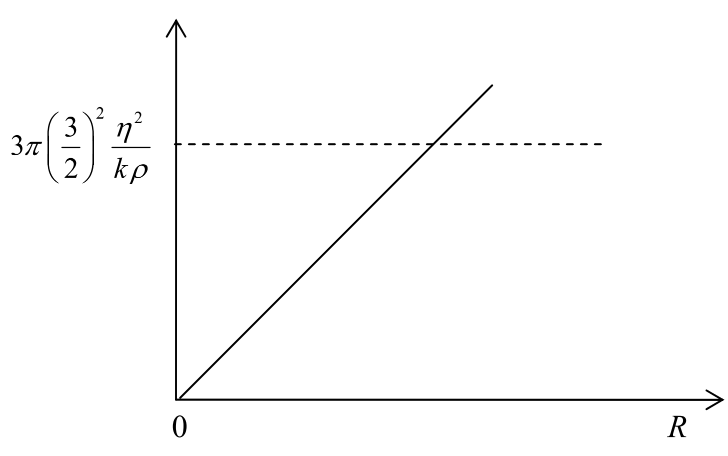
   Los parámetros del problema son la masa m, la constante de restitución elástica k y la constante de disipación γ. Ahora trataremos de ver cómo cambia la dinámica cuando cambiamos la escala espacial del sistema. Dejamos entonces de considerar objetos puntuales y pensamos en una esfera de radio R sumergida en un fluido y sometida a una fuerza elástica.

Lo primero que nos preguntamos es por el cambio en los parámetros cuando comprimimos o dilatamos la escala del problema.

- Si consideramos objetos esféricos de densidad ρ y radio R, sus masas m estarán dadas por $m = \rho V = \rho 4\pi/3\, R^3$. Es decir, la masa de un objeto esférico de densidad constante cambia con el cubo de su radio.
- Supongamos que los objetos estudiados están sumergidos en agua. El agua, como todos los fluidos, opone una fuerza al desplazamiento de los objetos. Cada fluido está caracterizado por una viscosidad η. El coeficiente de amortiguación γ del oscilador propuesto está relacionado con la viscosidad del medio en el que se lo sumerge según $\gamma = 6\pi R\eta$, llamada ley de Stokes. Para el agua $\eta = 10^{-3}\, {kg}/{m \cdot s}$.

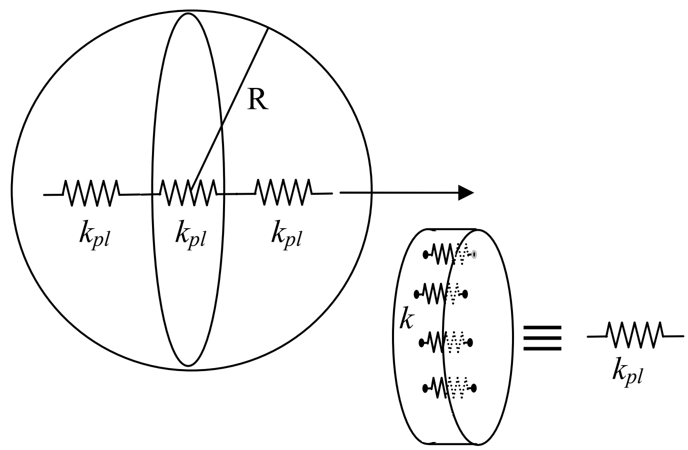
  Según esta ley, el coeficiente de disipación γ es proporcional al radio R del objeto. En realidad, las cosas no son tan simples. Todos hemos comprobado la existencia de distintos regímenes que puede mostrar un fluido en movimiento. Conforme abrimos el paso de agua de una canilla, por ejemplo, el flujo de agua, que al principio es laminar, se vuelve turbulento, desordenado (incluso, hasta cierto punto, impredecible). Fenómenos como éste cambian la fuerza que siente un objeto en movimiento sumergido en un fluido. Esto impone restricciones sobre los movimientos posibles que mantienen válida la ley de Stokes. Aquí nos restringimos a sistemas que la cumplen.
- Finalmente, supongamos que la constante elástica no cambia, es decir que k no depende de escalas espaciales.

xi) Considerando estas hipótesis, encuentre las condiciones de movimiento *subamortiguado* [(1)] y *sobreamortiguado* [(2)] en función de R. Compare con la figura y describa la información que obtiene de ella.



xii) Si en lugar de pensar en un objeto ligado a una fuerza restitutiva externa ahora consideramos que el objeto mismo tiene cierta elasticidad, entonces debemos considerar cómo cambia su constante elástica con la escala del problema. Supongamos que, a grandes rasgos, podemos la siguiente analogía con los resortes en serie y paralelo ya estudiados.

Vimos que si tiramos de N osciladores de constante k_{pl} conectados en serie, la constante efectiva del conjunto era $k_{ef} = k_{pl}/N$. Significa que la constante elástica *disminuye* con el *incremento* de osciladores en la dirección de elongación.



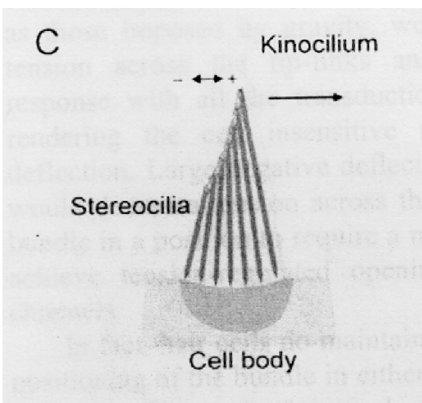
Sin embargo, en el objeto esférico, cada uno de los osciladores k_{pl} puede pensarse representando a un "plano" perpendicular a la dirección de estiramiento conformado por N^2 osciladores en paralelo idénticos k, de manera que todo el plano funciona como un único oscilador de $k_{pl} = kN^2$. Considerando que la cantidad N de osciladores es proporcional al radio R de la esfera, tenemos que $k_{ef} = kN^2/N = kN = \kappa R$. En este caso la constante κ se llama *elasticidad*, y tiene unidades de presión, $[\kappa] = Pa = N/m^2$.

¿Cómo cambia la relación de *amortiguamiento crítico* encontrada antes? Encuentre el radio crítico R_c correspondiente a este comportamiento. Considere el caso de una proteína rígida de $\kappa = 1GPa$, densidad $\rho = 10^3\ kg/m^3$ en agua.

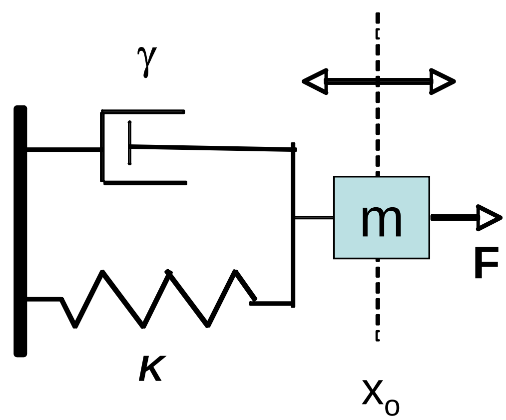
A modo de conclusión, podemos decir que a medida que las dimensiones de un sistema se contraen, las fuerzas viscosas aumentan respecto de las inertivas de lo que resulta que el movimiento global de objetos pequeños, comparativamente elásticos (como las proteínas) sumergidos en una solución acuosa es típicamente *sobreamortiguado*, a diferencia de muchos de los fenómenos típicos a nuestra escala.

Hair Cells

Las células sensoriales del oído (Hair cells) median la percepción del sonido, la aceleración lineal, angular y la gravedad (sistemas de equilibrio) en vertebrados. Estas células no son mas (ni menos) que resonadores muy bien afinados a las frecuencias de las señales mecánicas que deben detectar, y su posibilidad de reportar al sistema nervioso fielmente estas señales depende críticamente de su capacidad de transformar un input mecánico en una señal eléctrica (una corriente, que es la moneda del SN) que transporte la información sobre la señal externa al cerebro. O sea que estas células deben funcionar como "transformadores" de una señal mecánica en una señal eléctrica. Para poder hacerlo cuentan con una estructura (estereocilias) que es capaz de oscilar en respuesta a una señal mecánica. Como estas estructuras elásticas oscilan en un medio viscoso, podemos modelarlas como una masa ***M*** acoplada a un oscilador de constante ***K*** moviendose en un medio viscoso con disipacion lineal γ. O sea, estas células no son más que osciladores amortiguados.

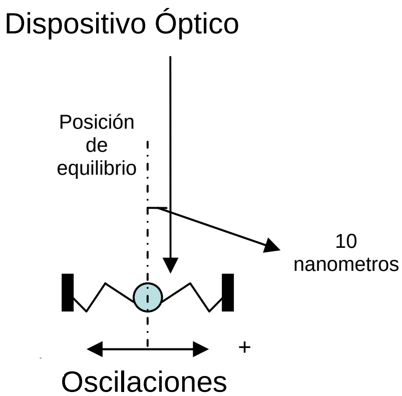


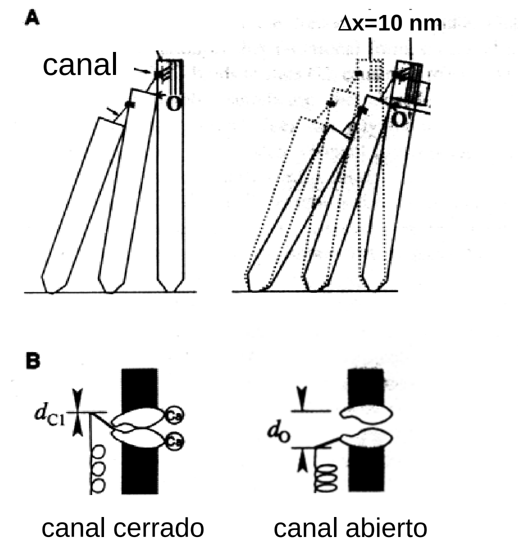
$\cong$



3) Construyendo un Detector de movimiento

Suponga que las estereocilias oscilan en torno a una posición de equilibrio en respuesta a una señal sonora. Cada vez que en la estructura se produce un desplazamiento igual o mayor a 10 nanómetros (solo en el sentido positivo), como consecuencia se abre un canal que deja entrar corriente a la célula. Se quiere medir la corriente que entra indirectamente con un dispositivo óptico que cuenta la cantidad de veces que el sistema se desplaza al menos 10 nanómetros, según el siguiente diagrama:





Determine para las siguientes condiciones: ***K*** = 1 mN/m (1.10^{-3} N/m), masa ***M*** = 10^{-13} kg en un medio con γ =0.001 μN.s/m (1.10^{-9} N.s/m)

a) cuál es la frecuencia (**f**) de la oscilación?

b) el movimiento será sub o sobre amortiguado? Cual es su τ ?

c) Si el desplazamiento tiene una amplitud inicial de 50 nm (X_o=50 nm, v_0=0) cuántas veces la estereocilia cruza el detector? Cuántas veces se habrá abierto el canal? Si se cambian los parámetros físicos (por ejemplo la ***K*** de la hair cell es **4 *Ko***) cuantas veces cruzará ahora el detector, y en este caso cuánto habrá aumentado la corriente?

d) como se imagina que diferentes sistemas auditivos en vertebrados logran afinar sus células a un rango dinámico muy amplio de detección? (hay desde hair cells de ranas que detectan vibraciones del suelo de menos de 100Hz hasta las de murciélagos que detectan vibraciones de hasta 200 KHz!) Que parámetros físicos podrían manipularse?

Respuestas:
a) f = 15.9 KHz (T=62.8 μseg y $w_{am} = 9.98.10^5$ 1/s)
b) γ^2= $1*10^{-18}$kg^2/s^2 y ***4mk***=$4*10^{-16}$ kg^2/s^2 el movimiento es sub amortiguado (4mk>γ2)**;**
τ=200 μseg
c) el canal se abre cinco veces (el detector marca 10 tics, 2 tics por ciclo).