

Un nuevo modelo dual para la teoría de cuerdas en un agujero negro

Matías Leoni-Olivera

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Agosto 2007

TEMA: Teoría de cuerdas en fondos exactos.

ALUMNO: Matías Leoni Olivera

LU N :383/02

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Gastón E. Giribet

FECHA DE INICIACIÓN: 3 de Noviembre 2006

FECHA DE FINALIZACIÓN: 29 de Agosto de 2007

FECHA DE EXAMEN: 28 de Septiembre de 2007

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesor de tesis de Licenciatura

Jurado

Resumen

En este trabajo de tesis revisamos la utilización de las técnicas de gases libres de Coulomb en el contexto de la teoría de Liouville para el cálculo de la función de partición de esta teoría y en teorías que corresponden a deformaciones marginales de la misma. Luego, estudiamos en profundidad la dualidad que existe entre la teoría de cuerdas formulada en el agujero negro bidimensional y la teoría de cuerdas en el espacio plano y en presencia de un potencial del tipo taquiónico. Discutimos los resultados ya conocidos de esta dualidad en términos de la renombrada conjetura de Fateev Zamolodchikov y Zamolodchikov, y luego generalizamos estos resultados proponiendo una versión “retorcida” de esta dualidad. Mostramos que esta nueva dualidad retorcida conecta las funciones de correlación de N puntos de la versión euclídea del agujero negro ($\times tiempo$) a nivel árbol (en la topología de la esfera) con las funciones de correlación de un modelo sigma no lineal en el espacio plano pero en presencia de un potencial taquiónico y un dilatón lineal. La parte libre de la teoría resulta ser la gravedad cuántica acoplada a materia con $c < 1$. A diferencia de la versión original de la dualidad FZZ, donde aparecen los modos $n = 1$ y $n = -1$ del sector de vórtices, el potencial taquiónico de nuestra versión de esta dualidad utiliza los modos de momento $n = 1$ y $n = 2$. De esta manera, nuestro resultado propone un nuevo modelo dual para la teoría de cuerdas bidimensional en presencia del agujero negro de Witten.

Mostramos también cómo la interacción de sine-Liouville surge a través del retorcimiento de las deformaciones introducidas, y se discute ese retorcimiento como una realización no trivial de ciertas simetrías de la teoría. Esto establece una conexión entre la nueva versión de la correspondencia y la original FZZ. La demostración de la nueva versión de la dualidad se apoya fuertemente en dos herramientas: Por un lado, en las técnicas de gases libres de Coulomb, las cuales son detalladas en la introducción para su aplicación análoga posterior; y, por otro lado, en una fórmula recientemente probada por S. Ribault y J. Teschner, la cual conecta las funciones de correlación de la teoría de WZW con las funciones de correlación de la teoría de Liouville. La dualidad discutida aquí puede ser pensada también como una realización de campos libres de dicha fórmula. Además, discutimos cómo la perturbación taquiónica elegida para emular el agujero negro, resulta ser la única capaz, en este contexto, de realizar la fórmula de Ribault-Teschner mencionada.

Este trabajo está basado en los resultados reportados en [1, 2] y está relacionado con los trabajos recientes [3, 4, 5, 6, 7, 8]. La mayor parte del material novedoso presentado aquí fue volcado en la referencia [9], y, a su vez, [9] es una versión extendida de la contribución del autor y su director al *XVIIth International Colloquium on Integrable Systems and Quantum Symmetries*, realizado en Praga, República Checa, en Junio de 2007.

Índice

1. Introducción	7
1.1. El tema	7
1.2. El resultado	8
1.3. Descripción del trabajo	9
2. Teoría de Campos Conformes	11
2.1. Teoría de cuerdas y modelos sigma no lineales	11
2.1.1. Punto de partida	11
2.1.2. Cuerda cerrada: Cuantización y espectro	14
2.1.3. Interacciones y modelos sigma no lineales	18
2.1.4. Modelos de Wess-Zumino-Witten	21
2.2. Teoría de Liouville y las técnicas del gas de Coulomb	24
2.2.1. Campo de Liouville acoplado a materia con $c = 1(+1)$	24
2.2.2. Funciones de Correlación: Definición	27
2.2.3. Correlador de la teoría libre	29
2.2.4. Integración del modo cero	31
2.2.5. Producto ordenado de operadores exponenciales	34
2.2.6. Función de partición de la teoría de Liouville	36
2.3. La teoría de cuerdas en el agujero negro 2D	40
2.3.1. La acción y la imagen semiclasica	40
2.3.2. Espectro de la cuerda en el agujero negro 2D y su relación con las cuerdas en AdS_3	43
2.3.3. Amplitudes de dispersión de cuerdas y funciones de correlación en la teoría de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$	47
2.4. Conexión entre las funciones de Correlación de WZW y Liouville	49
3. La teoría dual FZZ para el agujero negro 2D	51
3.1. Fondos de tipo taquiónico en la teoría de cuerdas 2D	51
3.2. La teoría de Sine-Liouville y la conjetura de FZZ	52
3.2.1. La teoría de Sine-Liouville	52
3.2.2. La conjetura de Fateev-Zamolodchikov-Zamolodchikov (FZZ)	53
3.2.3. Las funciones de correlación en la teoría de sine-Liouville	55
3.2.4. Respecto a la violación de la conservación del número de en- rollamiento	56
4. Un dual “retorcido” para el agujero negro 2D	59
4.1. Perturbaciones de modos de momento y enrollamiento mayores	59

4.1.1.	Perturbaciones de modos de momento	59
4.1.2.	Agregando perturbaciones de vórtice	60
4.2.	Proposición de la correspondencia	61
4.2.1.	Algunas definiciones preliminares	61
4.2.2.	Una prescripción del tipo gas de Coulomb	63
4.2.3.	Correspondencia entre funciones de correlación	63
4.2.4.	Representaciones conjugadas y flujo espectral	64
4.2.5.	Comentario sobre la simetría afín $\hat{sl}(2)_k$	66
4.3.	Prueba de la correspondencia	67
4.3.1.	Paso 1: Rescribiendo los correladores	67
4.3.2.	Paso 2: Realización del mapa de Stoyanovsky Ribault y Teschner	72
5.	Análisis de la correspondencia	75
5.1.	Una prueba de consistencia de la correspondencia	75
5.2.	Algunos detalles de la demostración	76
5.2.1.	Comentario respecto de la marginalidad de las perturbaciones	76
5.2.2.	Unicidad de la construcción	78
5.3.	Comentarios generales	79
5.3.1.	Gravedad minimal generalizada	79
5.3.2.	Dualidad entre fondos del tipo taquiónicos	80
5.3.3.	El límite $c \rightarrow 0$ del modelo $Liouville \times U(1) \times \mathbb{R}$	82
5.3.4.	Generalización de la fórmula de Ribault y Teschner	83
6.	Conclusiones	85
	Agradecimientos	88
	Referencias	89

1. Introducción

Uno de los conceptos más profundos de la teoría de cuerdas es la idea sugestiva de que el espacio-tiempo mismo podría ser una noción emergente, una especie de descripción efectiva de una entidad más básica [14]. Esta concepción se basa en parte en la existencia de simetrías de dualidad en la teoría de cuerdas, manifestando que conceptos como la curvatura y la topología pierden su rol preponderante. Esta idea es realizada particularmente por ejemplos que manifiestamente muestran la dualidad entre la teoría de cuerdas formulada en fondos curvos (ej. agujero negro) y la teoría en espacio plano pero en presencia de potenciales del tipo taquiónico. Esto es lo que vamos a explorar aquí; y lo haremos estudiando la descripción de la hoja de mundo de la teoría de cuerdas en dos dimensiones en el fondo de agujero negro (i.e. el modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW) en el grupo calibrado $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$).

1.1. El tema

La relación entre la teoría de cuerdas en el fondo del agujero negro y otras teorías conformes del tipo Liouville representando potenciales del tipo “pared taquiónica” fue extensivamente explorada anteriormente. Uno de los ejemplos célebres es el de la dualidad de Mukhi-Vafa [15], que relaciona una versión deformada del agujero negro euclídeo 2D con una teoría conforme que describe materia con $c = 1$ acoplada a la gravedad 2D. La literatura que trata con esta conexión es bastante amplia; referimos al lector a la lista [16]-[35] y referencias derivadas. Recientemente, una nueva relación entre la teoría de cuerdas 2D en el agujero negro euclídeo y una deformación de una teoría de campos conformes con $c = 1$ ha recibido mucha atención: Esta es la renombrada conjetura de Fateev-Zamolodchikov-Zamolodchikov (FZZ), que establece la equivalencia entre el agujero negro y la comúnmente llamada teoría de Sine-Liouville [36, 38]. En los últimos seis años esta dualidad FZZ ha sido aplicada en el estudio del espectro y las interacciones de las cuerdas tanto en la geometría del agujero negro como en el espacio Anti-de Sitter [37, 33, 32]. La aplicación más importante fue la formulación del modelo de matriz para el agujero negro 2D [38]. De hecho, cuando se habla del modelo de matriz para el agujero negro 2D, en realidad se está hablando del modelo de matriz para la teoría de Sine-Liouville, y por lo tanto, la descripción del agujero negro surge recién a través de la correspondencia FZZ. Esta aplicación muestra la importancia de la dualidad FZZ en el contexto de la teoría de cuerdas.

A pesar de que al principio apareció como una conjetura, una demostración de la dualidad FZZ fue efectivamente dada hace algunos años. La demostración consiste en dos pasos: primero, se prueba la equivalencia entre las extensiones supersimétricas con $N=2$ de ambas teorías [39]; luego, se demuestra que las partes fermiónicas de ambas teorías se desacoplan llevando a una dualidad bósónica como una propiedad heredada [40], ver también [41, 42]. El hecho de que esto se haya podido hacer así se

debe a que tanto el agujero negro 2D como la teoría de Sine-Liouville admiten una ambientación natural ¹ en teorías supersimétricas con N=2, donde la dualidad puede ser vista como una manifestación de la simetría especular.

Sin embargo, uno podría estar también interesado en ver si la dualidad puede ser demostrada al nivel de la teoría bosónica misma. En este trabajo vamos a mostrar que una dualidad similar puede ser realmente probada (en la topología de la esfera) sin recurrir a argumentos basados en la supersimetría sino que solamente haciendo uso de la estructura conforme de la teoría.

1.2. El resultado

En el contexto de la teoría de Liouville, mostraremos cómo las técnicas de gases libres de Coulomb junto con las prescripciones de inserción de operadores de apantallamiento llevan muchas veces a resultados correctos en el cálculo de funciones de correlación. Apoyándonos en esa idea y en una fórmula probada recientemente, mostraremos que cualquier función de correlación de N puntos en el modelo de WZW del grupo $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$ (\times *time*) en la topología de la esfera es equivalente a una función de correlación de N puntos de una teoría de campos conforme bidimensional que describe un modelo sigma de un dilatón lineal perturbado con un potencial del tipo taquiónico. Esta dualidad es similar a la correspondencia FZZ; sin embargo, en vez de considerar perturbaciones con modos de momento $|n| = 1$ consideraremos en este caso modos de momento del sector $n = 2$. Más precisamente, la teoría en cuestión que consideraremos se define prendiendo los modos $\lambda_{n=2} \neq 0$ y $\lambda_{n=1} \neq 0$ en la siguiente acción

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial X \bar{\partial} X + \partial \varphi \bar{\partial} \varphi - \frac{1}{2\sqrt{2}} \widehat{Q} R \varphi + \sum_n \lambda_n e^{-\frac{\alpha_n}{\sqrt{2}} \varphi + i n \sqrt{\frac{k}{2}} X} \right) \quad (1.1)$$

donde $\widehat{Q} = (k-2)^{-1/2}$ y $\alpha_n = \widehat{Q}(1 + \sqrt{1 + (kn^2 - 4)(k-2)})$. Es decir, la perturbación que consideraremos está dada por el operador

$$\mathcal{O} = \lambda_1 e^{-\sqrt{\frac{k-2}{2}} \varphi + i \sqrt{\frac{k}{2}} X} + \lambda_2 e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}} (k-1) \varphi + i \sqrt{2k} X},$$

donde denotamos $X = X_L(z) + X_R(\bar{z})$, que debe ser distinguida de la dirección T-dual $\tilde{X} = X_L(z) - X_R(\bar{z})$. Los operadores $e^{-\frac{\alpha_n}{\sqrt{2}} \varphi + i n \sqrt{\frac{k}{2}} X}$ son operadores (1,1) respecto del tensor de energía momento de la teoría libre

$$\mathcal{T}(z) = -\frac{1}{2} (\partial X)^2 - \frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 - \frac{\widehat{Q}}{\sqrt{2}} \partial^2 \varphi, \quad (1.2)$$

¹La ambientación supersimétrica del agujero negro puede llevarse a cabo a través de la construcción de Kazama-Suzuki [43, 44], mientras que la teoría de Sine-Liouville puede ser vista como un sector de la Teoría de Super-Liouville con N=2. La versión bosónica de la dualidad aparece cuando se extrae a través del proceso GKO la simetría $U(1)$ de la versión con N=2.

de manera que representan deformaciones marginales de la teoría del dilatón lineal. Los coeficientes λ_n en (1.1) deben satisfacer la condición $\lambda_n = \lambda_{-n}$ para que el Lagrangiano sea real y que por lo tanto la teoría sea invariante ante $X \rightarrow -X$. Las relaciones de escaleo entre los diferentes acoplamientos λ_n están dados por los argumentos estandar de KPZ [45, 46, 47], estando así la escala de la teoría gobernada por una de esas constantes, en forma análoga a como la constante cosmológica en la teoría de Liouville introduce la escala en la teoría conforme con materia con carga central $c = 1$. La carga central de la teoría se obtiene de la expansión del producto de dos operadores (OPE) de energía momento, dando $c = 2 + 6\widehat{Q}^2 = 2 + \frac{6}{k-2}$. Más adelante, estaremos interesados en agregar un bosón libre del tipo temporal a la teoría de manera de obtener un espacio tiempo del tipo lorentziano de la forma $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1) \times \mathbb{R}_{time}$, de manera que la carga central recibirá una contribución extra +1 proveniente de esa dirección, dando

$$c = 3 + 6\widehat{Q}^2 = 3 + \frac{6}{k-2}, \quad (1.3)$$

mientras que el tensor de energía momento será suplementado con un término $+\frac{1}{2}(\partial T)^2$. En términos prácticos, esta dirección del tipo temporal puede ser pensada como un grado de libertad auxiliar, y esta dirección no entra en la parte no trivial de la dualidad que queremos discutir. La misma, solamente está acoplada a las otras direcciones a través del valor de la carga central ² c .

1.3. Descripción del trabajo

La técnica de gases libres de Coulomb se basa en el procedimiento de la integración de los modos cero (no oscilatorios) de los campos. Así, se puede describir la integral funcional de interacciones como una integral funcional en un conjunto de operadores de vértice efectivos entre los cuales se encuentran los originales y los de apantallamiento que emulan los potenciales taquiónicos. Por un lado, la ventaja de este procedimiento, es que permite calcular funciones de correlación aplicando técnicas de campos libres. Por otro lado, las expresiones formales que aparecen al integrar el modo cero nos darán las herramientas para poder mostrar la correspondencia entre el modelo de WZW y la teoría con la perturbación taquiónica.

La correspondencia particular entre el modelo (1.1) y el agujero negro 2D que discutiremos es realizada al nivel de las funciones de N puntos en la topología de la esfera, y corresponde a una versión deformada de la correspondencia FZZ³. Consecuentemente, discutiremos primero la correspondencia FZZ. A pesar de ser similares,

² En el caso en el que la teoría corresponde al producto $SL(2, \mathbb{R})/U(1) \times time$ la condición $c = 26$ implica que $k = 52/23$. Por otro lado si el espacio es solamente el de la teoría en el conjunto cociente $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ la condición correspondiente es $k = 9/4$.

³ En el sentido de que involucra una deformación del término de interacción de la acción de sine-Liouville

la dualidad que discutiremos aquí presenta dos diferencias importantes con respecto a la FZZ: La primera es que, a diferencia de la FZZ, la dualidad discutida en este trabajo permite ser demostrada de una forma relativamente sencilla sin hacer uso de argumentos basados en la simetría especular de su extensión supersimétrica; en segundo lugar, la dualidad involucra modos de momento mayores ($n = 2$) en vez de modos de enrollamiento del sector $n = 1$. Enunciaremos precisamente la correspondencia en la sección 4 en donde también desarrollaremos su demostración. El trabajo se organiza de la siguiente forma: En la sección 2 revisaremos algunas características de las teorías de campos conformes que juegan un papel importante en este trabajo. Primero, repasaremos el camino constructivo que lleva a la formulación de los modelos sigma no lineales y de WZW. Luego, repasaremos el cálculo de funciones de correlación en la teoría de Liouville con el propósito de enfatizar algunos detalles de este cálculo y para así posteriormente poder referir cuestiones de otros cálculos en analogía a los de la teoría de Liouville. En tercer lugar, discutiremos algunos aspectos generales del modelo sigma del agujero negro 2D. Una vez que estas dos teorías fueron introducidas, discutiremos de que manera las funciones de correlación de ambas están relacionadas a través de una fórmula recientemente probada por S. Ribault y J. Teschner [3, 4]. Esta fórmula conecta las funciones de correlación tanto en el modelo de WZW y en la teoría de Liouville de una forma bastante directa [48], y resulta bastante importante para probar nuestro resultado. En la sección 3 revisaremos brevemente la teoría que corresponde al agujero negro en la correspondencia FZZ, es decir la teoría de Sine-Liouville. En la sección 4 introduciremos una versión “retorcida” de la teoría de Sine-Liouville y mostraremos que esta teoría también resulta ser dual al agujero negro 2D. Una pieza crucial para demostrar esta dualidad es la fórmula de Ribault-Teschner mencionada arriba, para la cual presentaremos una realización que se identifica precisamente con la versión deformada del modelo de Sine-Liouville ya mencionado. La sección 5 contiene un análisis de varios aspectos de la correspondencia presentada en la sección 4. Y por último, en la sección 6 están las conclusiones.

2. Teoría de Campos Conformes

La primer parte de esta sección será un resumen bastante básico y escueto de los ingredientes principales que conforman la construcción de modelos sigma no lineales y modelos de WZW. Para esto, empezaremos con la descripción canónica de la cuerda cerrada, obtendremos su espectro e introduciremos las interacciones y los modelos sigma no lineales. Luego de eso, describiremos las características principales de la acción de WZW y sus realizaciones algebraicas asociadas. Para una introducción al tema más amplia y precisa referimos al lector a las Refs. [10, 11, 12, 13].

En la segunda parte de esta sección, discutiremos algunos aspectos de las funciones de correlación de la teoría de Liouville. En términos de este trabajo y más allá de la utilidad de la teoría de Liouville en el uso de la fórmula de Ribault-Teschner, la relevancia de la teoría de Liouville está en el hecho de que es un ejemplo prototípico de una teoría de campos conformes no compacta [49] y por lo tanto las técnicas para calcular funciones de correlación en esta teoría serán empleados repetidas veces en el resto del trabajo. Por otra parte, los modelos que consideraremos son verdaderamente deformaciones de la teoría de Liouville acopladas a materia con carga central $c = 1 + (1)$, lo que hace conveniente considerar la teoría de Liouville. En particular, y a modo de ejercicio calcularemos la función de partición de esta teoría.

En la última parte de esta sección repasaremos algunas características del modelo de WZW en el coset $SL(2, R)/U(1)$ y una fórmula que relaciona las funciones de correlación de este modelo con las funciones de correlación de la teoría de Liouville.

2.1. Teoría de cuerdas y modelos sigma no lineales

2.1.1. Punto de partida

El punto de partida en el estudio de la teoría de cuerdas es la idea de generalizar la dinámica de una partícula puntual a un objeto de una dimensión más: la cuerda. La acción que describe el movimiento de una partícula relativista está dada por la longitud de la línea de mundo que describe en su movimiento,

$$S_p = -m \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau}}, \quad (2.1)$$

donde m es la masa cuya identificación proviene del límite no relativista, $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y

$$-\eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = dl^2, \quad (2.2)$$

es el elemento de longitud de la línea de mundo. Esta acción es invariante ante reparametrizaciones $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$ e invariante de Poincaré. Las ecuaciones de movimiento clásicas provienen de variar la acción respecto a las coordenadas X^μ ($\mu =$

$0, 1, \dots, D - 1$), quedando

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = 0 \quad \text{con} \quad U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} \left(-\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} \right)^{-1/2}. \quad (2.3)$$

La acción S_p posee dos desventajas importantes. La primera, es la raíz que engloba a las coordenadas, ya que ante un eventual proceso de cuantificación de la teoría la raíz se vuelve una complicación mayor. La segunda, es que no está bien definida para partículas sin masa. Para escribir una acción clásicamente equivalente a S_p pero sin esos problemas, debemos agregar un grado de libertad más. Consideremos la siguiente acción clásicamente equivalente a S_p :

$$S_p' = 1/2 \int d\tau \left(e(\tau)^{-1} \eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} - e(\tau) m^2 \right). \quad (2.4)$$

Esta acción, posee las mismas ecuaciones de movimiento de la acción anterior para las coordenadas X^μ , pero soluciona los dos problemas que mencionamos recientemente. Si la variamos respecto al nuevo campo $e(\tau)$ obtenemos

$$e(\tau)^2 = -\frac{\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau}}{m^2}; \quad (2.5)$$

y, si insertamos esta ecuación de $e(\tau)$ en la acción S_p' recuperamos la acción anterior S_p .

Con estos elementos en mente, surge naturalmente la primera acción que podríamos escribir para describir la dinámica de una cuerda. Si generalizamos el concepto de línea de mundo que describe una partícula en su movimiento al de “hoja de mundo” que describe la cuerda al moverse, podemos escribir la acción como el área que barre la cuerda. Así obtenemos la acción de Nambu-Goto

$$S_{NG} = -T \int_M d\tau d\sigma \sqrt{-h} \quad (2.6)$$

donde T es una constante (la tensión, se utiliza también $T = 1/(2\pi\alpha')$), M es la variedad de la hoja de mundo, τ y σ son las coordenadas con las que se parametriza la hoja de mundo y h es el determinante de la métrica inducida por el espacio (Minkowski por ahora) en la hoja de mundo dado por

$$h_{ab} = \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \quad (2.7)$$

Esta acción posee simetría de Poincaré y simetría ante difeomorfismos $(\tau, \sigma) \rightarrow (\tau'(\tau, \sigma), \sigma'(\tau, \sigma))$. Lamentablemente tiene el mismo problema que la acción S_p al poseer derivadas bajo una raíz. Para eso introducimos nuevos grados de libertad

independientes (γ_{ab}) como hicimos anteriormente, y escribimos una nueva acción clásicamente equivalente a S_{NG}

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu, \quad (2.8)$$

donde γ_{ab} es la métrica de la hoja de mundo (diferenciar con la inducida) y es independiente. Esta es la acción de Polyakov. La misma posee las simetrías de S_{NG} que ya mencionamos. Sus ecuaciones de movimiento también son equivalentes a las de la acción anterior. Si variamos la acción respecto de γ_{ab} obtenemos la ecuación

$$h_{ab} = \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd}, \quad (2.9)$$

y al insertar esta ecuación en la acción de Polyakov, recuperamos la acción de Nambu-Goto. Además de las simetrías de la acción de Nambu-Goto, la acción de Polyakov posee una simetría adicional, esta es la simetría de Weyl en dos dimensiones: la acción es invariante ante la transformación

$$\gamma'_{ab}(\tau, \sigma) = e^{2\omega(\tau, \sigma)} \gamma_{ab}(\tau, \sigma), \quad (2.10)$$

para ω arbitrario y dejando fijas las coordenadas X^μ . Una consecuencia de esta invarianza es la anulación de la traza del tensor de energía momento (el cual se obtiene variando la acción respecto a la métrica γ_{ab}). Al variar la acción teniendo en cuenta los términos de superficie se puede ver que hay dos condiciones de contorno consistentes para imponer a los extremos de la cuerda. Una condición es la de periodicidad y así uno describe las cuerdas cerradas, y la otra condición es la muy conocida condición de Neumann que describe cuerdas abiertas cuyas puntas son libres de moverse.

La acción de Polyakov es el punto de partida para el estudio cuántico de la teoría de cuerdas. A partir de un cuidadoso proceso de cuantización de esta teoría libre (sin interacciones), se puede obtener el espectro de movimiento de la cuerda cuyos modos representan distintos tipos de excitaciones que identificamos con partículas. Luego, a través de la integral funcional de la acción de Polyakov, se pueden estudiar las amplitudes de dispersión de las cuerdas interactuantes.

Además del término ya descrito en la acción de Polyakov existe otro término que se puede agregar que respeta todas las simetrías antes mencionadas. Este es

$$\lambda \chi = \lambda \frac{1}{4\pi} \int_M d\sigma d\tau \sqrt{-\gamma} R, \quad (2.11)$$

donde R es el escalar de Ricci de la variedad bidimensional M . La simetría de este término ante difeomorfismos ($\sigma^a \rightarrow \sigma^{a'}(\sigma^a)$) es evidente, puesto que la medida

de integración es invariante ($d^2\sigma\sqrt{-\gamma} = d^2\sigma'\sqrt{-\gamma'}$) y el escalar de Ricci, como su nombre lo dice, es un escalar ($R'=R$) ante estas transformaciones. Por otra parte, la invarianza ante transformaciones locales de Weyl no es para nada obvia. Para ver esto explícitamente tomemos una transformación de la forma (2.10) y notemos que el integrando de (2.11) transforma como

$$(-\gamma')^{1/2}R' = (-\gamma)^{1/2}(R - 2\nabla^2 w). \quad (2.12)$$

Pero observemos que el término adicional con el factor conforme w , es una derivada total, ya que

$$(-\gamma)^{1/2}\nabla_a v^a = \partial_a[(-\gamma)^{1/2}v^a]. \quad (2.13)$$

Por lo tanto, si la variedad que consideramos, no tiene bordes, la integral de la derivada total se anula y tenemos que (2.11) es invariante local de Weyl. Si la variedad tuviera bordes, (2.11) no sería invariante de Weyl por si solo, pero, agregando el término de Hawking-Gibbons recuperaríamos la invarianza local de Weyl. Por lo tanto, (2.11) corregido con el término de Hawking-Gibbons nos queda

$$\lambda \frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma (-\gamma)^{1/2} R + \lambda \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds k, \quad (2.14)$$

donde ds es el tiempo propio a lo largo del borde en la métrica γ_{ab} , y k es la curvatura geodésica de la variedad. Con ese término extra, garantizamos la invarianza local de Weyl sin importar la variedad. Según el teorema de Gauss-Bonnet, en dos dimensiones, (2.14) coincide con una propiedad topológica de la variedad. Esto es

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma (-\gamma)^{1/2} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds k = 2p - 2g - b - c, \quad (2.15)$$

donde p es la cantidad de partes conexas, g es el género de la variedad, b es la cantidad de bordes y c la cantidad de identificaciones cruzadas. Esta es la llamada característica de Euler. La relevancia de (2.14) se entenderá mejor al estudiar las interacciones de las cuerdas.

2.1.2. Cuerda cerrada: Cuantización y espectro

La forma más rápida de obtener el espectro de la cuerda es eliminando la redundancia que tenemos en nuestra descripción, producto de las simetrías ante reparametrizaciones (difeomorfismos) y de Weyl. Para esto, definimos las coordenadas del cono de luz en el espacio tiempo

$$x^i, \quad \text{con } i = 2, \dots, D-1, \quad \text{y } x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 \pm x_1), \quad (2.16)$$

y tomamos un “calibre” particular imponiendo (calibre del cono de luz)

$$\tau = x^+, \quad \partial_\sigma \gamma_{\sigma\sigma} = 0, \quad \det(\gamma_{ab}) = -1, \quad \gamma_{\tau\sigma}(\tau, 0) = 0. \quad (2.17)$$

Las tres primeras condiciones hubieran fijado el calibre si la cuerda fuera abierta, mientras que la cuarta es necesaria para eliminar las traslaciones del parámetro $\sigma \bmod(l)$ (l es el largo de la cuerda) dependientes de τ en la cuerda cerrada. A pesar de esto, todavía queda la libertad de trasladar el origen de σ con una constante independiente de τ . Utilizando este calibre, el lagrangiano queda

$$L = -\frac{l}{2\pi\alpha'} \gamma_{\sigma\sigma} \partial_\tau x^-(\tau) + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma (\gamma_{\sigma\sigma} \partial_\tau X^i \partial_\tau X^i - \gamma_{\sigma\sigma}^{-1} \partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i), \quad (2.18)$$

donde $x^-(\tau)$ es el valor medio a lo largo de la cuerda de $X^-(\tau, \sigma)$. El momento conjugado a x^- es

$$p_- = -p^+ = \frac{\delta L}{\delta(\partial_\tau x^-)} = -\frac{l}{2\pi\alpha'} \gamma_{\sigma\sigma}, \quad (2.19)$$

y el conjugado a $X^i(\tau, \sigma)$ es

$$\Pi^i = \frac{\delta L}{\delta(\partial_\tau X^i)} = \frac{p^+}{l} \partial_\tau X^i. \quad (2.20)$$

Con estos momentos conjugados, podemos obtener el Hamiltoniano

$$H = p_- \partial_\tau x^- + \int d\sigma \Pi_i \partial_\tau X^i - L, \quad (2.21)$$

y luego obtener las ecuaciones de movimiento para X^i (p^+ es un momento conservado):

$$(\partial_\tau^2 - c^2 \partial_\sigma^2) X^i = 0, \quad \text{con } c = l/(2\pi\alpha' p^+) \quad (2.22)$$

Como sabemos que las soluciones de la ecuación de onda son las exponenciales de Fourier, desarrollamos los campos X^i en esas soluciones y con coeficientes que son operadores. Para este desarrollo tenemos en cuenta las condiciones de contorno de cuerda cuerda cerrada; nos queda

$$X^i(\tau, \sigma) = x^i + \frac{p^i}{p^+} \tau + i(\alpha'/2)^{1/2} \times \\ \times \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{n} \alpha_n^i \exp\left(-\frac{2\pi i n(\sigma + c\tau)}{l}\right) + \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^i \exp\left(-\frac{2\pi i n(\sigma - c\tau)}{l}\right) \right), \quad (2.23)$$

donde x^i y p^i son la coordenada y momento del centro de masa y se definen como el valor medio integral a lo largo de la cuerda de X^i y Π^i respectivamente. Los operadores α y $\tilde{\alpha}$ son independientes entre sí. Para cuantizar, imponemos las relaciones de

conmutación a tiempos iguales entre las coordenadas y sus momentos conjugados, esto es

$$[x^-, p^+] = i\eta^{-+} = -i, \quad [X^i(\sigma), \Pi^j(\sigma')] = i\delta^{ij}\delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.24)$$

Utilizando los desarrollos de estos campos obtenemos los conmutadores de los modos de Fourier

$$[x^i, p^j] = i\delta^{ij}, \quad [\alpha^i_m, \alpha^j_n] = m\delta^{ij}\delta_{m,-n},$$

$$[\tilde{\alpha}^i_m, \tilde{\alpha}^j_n] = m\delta^{ij}\delta_{m,-n}. \quad (2.25)$$

Para cada índice superior (i, referido a la dirección del espacio), inferior (m, referido al número de armónico), sin la tilde \sim (excitación izquierda) y con la tilde $\tilde{\sim}$ (excitación derecha), estos modos satisfacen el álgebra de un oscilador armónico cuántico bosónico. El vacío ($|0, 0, k\rangle$) de esta teoría se define como el auto-estado de los operadores de momento (con auto-valor $k = (k^\mu)$) que es aniquilado por todos los modos α y $\tilde{\alpha}$ con armónico positivo (operadores de destrucción), esto es

$$p^i|0, 0, k\rangle = k^i|0, 0, k\rangle, \quad p^+|0, 0, k\rangle = k^+|0, 0, k\rangle,$$

$$\alpha^i_m|0, 0, k\rangle = 0, \quad \tilde{\alpha}^i_m|0, 0, k\rangle = 0 \quad \forall m > 0 \quad (2.26)$$

Luego, cualquier excitación del vacío se puede escribir aplicando los operadores de creación al vacío que definimos. Si escribimos el hamiltoniano en términos de los modos obtenemos

$$H = \frac{p^i p^i}{2p^+} + \frac{1}{p^+ \alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^i_{-n} \alpha^i_n + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}^i_{-n} \tilde{\alpha}^i_n + A + \tilde{A} \right), \quad (2.27)$$

donde A y \tilde{A} son constantes que provienen de la ambigüedad del ordenamiento de los operadores de creación y destrucción. Por otra parte, se puede ver que el operador de masa es

$$m^2 = 2p^+ H - p^i p^i = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^i_{-n} \alpha^i_n + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}^i_{-n} \tilde{\alpha}^i_n + A + \tilde{A} \right) =$$

$$= \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} + A + \tilde{A}), \quad (2.28)$$

donde N y \tilde{N} son la cantidad total de excitaciones izquierda y derecha. Las constantes A y \tilde{A} puede obtenerse al intentar recuperar el álgebra de Poincaré con los operadores que definimos⁴. Dado que estamos en un calibre en el que la invarianza no es evidente, la cuenta es tediosa; aquí presentamos el resultado:

$$A = \tilde{A} = \frac{2-D}{24}. \quad (2.29)$$

⁴Los valores de A y \tilde{A} también se pueden obtener regularizando la energía de vacío

Habíamos dicho que el calibre no estaba completamente fijo, ya que teníamos la libertad de trasladar el punto de origen de la coordenada σ que recorre la cuerda; por lo tanto, pedimos que en los estados físicos se anule el operador de estas traslaciones. Esto es, el operador

$$\mathcal{P} = - \int_0^l d\sigma \Pi_i \partial_\sigma X^i = \frac{2\pi}{l} (N - \tilde{N}), \quad (2.30)$$

aplicado a los estados físicos, debe dar cero. Razón por la cual, los estados físicos deben satisfacer que $N = \tilde{N}$.

Con todos estos ingredientes, podemos construir el espectro de la cuerda. Si aplicamos el operador de masa al estado que definimos como vacío de la teoría obtenemos el estado más “liviano” que es

$$|0, 0, k\rangle, \quad m^2 = \frac{2 - D}{6\alpha'}, \quad (2.31)$$

cuya masa es negativa para $D > 2$. A este estado se lo denomina taquión, por poseer $m^2 < 0$. Para construir el siguiente estado debemos aplicar los operadores de creación del primer armónico. Además debemos recordar que el estado debe tener la misma cantidad de excitaciones izquierdas y derechas. Por lo tanto, el estado será

$$\alpha^i_{-1} \tilde{\alpha}^j_{-1} |0, 0, k\rangle, \quad m^2 = \frac{26 - D}{6\alpha'}. \quad (2.32)$$

Como los estados internos forman una representación (tensorial) del grupo $SO(D - 2)$, esos estados deben componer una representación no masiva del grupo de Lorentz. Por esta razón, como $m^2 = 0$, tenemos que $D = 26$; la dimensionalidad del espacio tiempo es una consecuencia de la consistencia de la teoría. Por otra parte, este estado tensorial no es una representación irreducible. Al mismo, lo podemos descomponer en un tensor simétrico sin traza, uno antisimétrico y un escalar correspondiente a la traza. Estos tres estados no se mezclan ante las rotaciones. Las partículas asociadas a estas excitaciones son el Gravitón (tensor simétrico), el campo de Kalb-Ramond (tensor antisimétrico) y el dilatón (traza). El resto de los estados del espectro son todos masivos e infinitos.

En conclusión, pudimos obtener el espectro no masivo (o con masa cuadrada negativa) de la cuerda cerrada bosónica en el espacio de Minkowski. Los estados que obtuvimos fueron: el taquión, el gravitón, el campo de Kalb-Ramond, y el dilatón. También llegamos a la conclusión de que la única forma consistente de formular esta teoría es en 26 dimensiones (dimensión crítica). Más adelante veremos que esta condición se relaja si consideramos fondos no triviales en los cuales formular la dinámica de la cuerda.

2.1.3. Interacciones y modelos sigma no lineales

Según vimos más arriba, la teoría de cuerdas posee varias simetrías a nivel clásico. Se puede ver que la teoría se puede formular para que las anomalías que surgen al cuantizar, asociadas a esas simetrías, se anulen consistentemente para satisfacer requisitos de índole física (como la invarianza de Lorentz). Es por esto que, cuánticamente, la teoría de cuerdas es una “teoría de campos conforme”. Conforme, en el sentido de que posee invarianza ante las transformaciones del grupo conforme bidimensional (rotaciones, dilataciones y transformaciones conformes especiales) en la hoja de mundo. Una de las tantas ventajas operativas de esta simetría, es que una teoría de campos con simetría conforme y formulada en la topología de un cilindro (cuerda cerrada) posee un isomorfismo entre sus estados y el conjunto de sus operadores⁵:

$$|V\rangle \rightarrow \int d^2\sigma \gamma^{1/2} \mathcal{V}(\sigma) \quad (2.33)$$

En el caso que veníamos estudiando, el operador de vértice asociado al taquión es

$$V_0 = 2 \int d^2\sigma \gamma^{1/2} e^{iK \cdot X}, \quad (2.34)$$

y para el espectro no masivo de la teoría, el operador de vértice asociado es

$$V_1 = \frac{1}{\alpha'} \int d^2\sigma \gamma^{1/2} [(\gamma^{ab} s_{\mu\nu} + i\epsilon^{ab} a_{\mu\nu})(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu e^{ik \cdot X}) + \alpha' \phi R e^{ik \cdot X}] \quad (2.35)$$

donde $s_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, $a_{\mu\nu}$ es un tensor anti-simétrico y ϕ una constante. Con estos elementos podemos introducir las interacciones en la teoría de cuerdas bosónicas cerradas. La forma más sencilla de estudiar las interacciones es a través de la integral funcional. En ella, consideramos los estados asintóticos de las cuerdas como descriptos a través del mapa estado-operador recién explicado. Estamos pensando que cada fuente de la interacción es una perturbación local en la hoja de mundo; cada cuerda entrante y saliente de la dispersión es descripta por la integración de los operadores de vértice $\mathcal{V}_j(k, \sigma)$, donde k ($-k$) es el cuadrimomento de la cuerda entrante (saliente), y j es el estado interno de la cuerda. Luego la amplitud de dispersión está descripta por el valor de expectación de vacío de las integrales en los puntos de inserción de estos operadores, esto es

$$S_{j_1 \dots j_n}(k_1 \dots k_n) = \left\langle \int \prod_{i=1}^n d^2\sigma_i \gamma(\sigma_i)^{1/2} \mathcal{V}_{j_i}(k_i, \sigma_i) \right\rangle. \quad (2.36)$$

Para calcular este valor de expectación utilizamos la integral funcional. Antes de escribir la misma, recordemos que en (2.11) habíamos especulado con agregar un

⁵De aquí en más tomaremos una hoja de mundo euclídea

término a la acción. Esta, nos había quedado $S = S_P + \lambda\chi$, donde χ (en una variedad de dos dimensiones como la hoja de mundo) es el invariante topológico denominado característica de Euler y λ es una constante cuyo significado se aclarará más adelante. Si solamente consideramos superficies cerradas, compactas (interacciones de cuerdas cerradas) y orientables⁶, las interacciones que pueden ocurrir solamente pueden ser descritas con las topologías de la esfera, el toro, y demás superficies con creciente género (o número de manijas). Por otra parte, los campos independientes a integrar son las coordenadas X^μ y la métrica de la hoja de mundo γ , pero por la simetría de calibre del grupo conforme, debemos procurar escribir la integral funcional de manera de no sobrecontar estados físicos. Teniendo en cuenta todo esto, podemos escribir formalmente la amplitud de dispersión como

$$S_{j_1 \dots j_n}(k_1 \dots k_n) = \sum_{\text{Topolog.}} \int \frac{DX D\gamma}{\text{Vol}_{\text{CKG}}} e^{-S_P - \lambda\chi} \int \prod_{i=1}^n d^2\sigma_i \gamma(\sigma_i)^{1/2} \mathcal{V}_{j_i}(k_i, \sigma_i) \quad (2.37)$$

La cuestión en la que nos queremos enfocar ahora y la razón por la que escribimos esta expresión formal, es para introducir los modelos sigma no lineales. Antes de eso, hagamos un razonamiento en analogía a la partícula puntual. Supongamos que queremos generalizar la acción (2.4) para describir el movimiento de la partícula en un espacio curvo con una métrica $G_{\mu\nu}$. Es fácil ver que si reemplazamos $\eta_{\mu\nu}$ por $G_{\mu\nu}$, es decir, escribimos

$$S_p' = 1/2 \int d\tau \left(e(\tau)^{-1} G_{\mu\nu}(X) \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} - e(\tau) m^2 \right), \quad (2.38)$$

las ecuaciones de movimiento describirán las geodésicas del espacio, y eso es efectivamente lo que uno espera. Si extendieramos esta idea a la acción de Polyakov, escribiríamos

$$S_{PC} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} G_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \quad (2.39)$$

Sin embargo, uno podría preguntarse si esta generalización es lícita en el caso de la cuerda, ya que el gravitón es también parte del espectro de esta. Para ver que esta inclusión tiene sentido, escribamos la exponencial de la acción que aparece en la integral funcional utilizando una métrica de la forma $G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} + \rho_{\mu\nu}(X)$. La exponencial será

$$\exp(-S_{PC}) = \exp(-S_P) \left(1 - \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \gamma^{1/2} \gamma^{ab} \rho_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \dots \right). \quad (2.40)$$

⁶Las cuerdas cerradas no orientables poseen un espectro un poco diferente del que estamos interesados, pero pueden ser consideradas igualmente.

Sorprendentemente, aparecen en el desarrollo de la exponencial sucesivos operadores de vértice del gravitón si hacemos la identificación

$$\rho_{\mu\nu}(X) = -4\pi e^{ik \cdot X} s_{\mu\nu}. \quad (2.41)$$

Visto al revés, la exponenciación de los operadores de vértice nos llevó a una prescripción para acoplar a la cuerda a un fondo no trivial compuesto por un estado coherente de gravitones. Vemos entonces que existen formas, que son consistentes con la descripción de las interacciones, para describir la dinámica de la cuerda en un fondo no trivial. Si considero un fondo no-trivial compuesto por todo el espectro con $m^2 \leq 0$ la acción que nos interesa es

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \gamma^{1/2} ((\gamma^{ab} G_{\mu\nu}(X) + i\epsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X)) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' R\Phi(X) + V(X)), \quad (2.42)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio tiempo, $B_{\mu\nu}$ es el campo antisimétrico de Kalb-Ramond, Φ es el campo del dilatón y $V(X)$ es el potencial taquiónico. Observemos que el coeficiente que acompaña al dilatón es de otro orden en α' . Esto se debe a que este término puede considerarse una corrección cuántica de la acción.

Por otra parte, recordemos que para que la formulación de la teoría de cuerdas sea consistente, la invarianza de Weyl es un requisito indispensable. Por lo tanto, no cualquier fondo de G , B , Φ y V será admisible en la formulación de un modelo sigma. Para que la invarianza de Weyl sea respetada debemos forzar que las ecuaciones β a todo orden en α' de la teoría se anulen. Un ejemplo de estas ecuaciones a primer orden en α' es

$$\beta^\Phi = \frac{D-26}{6} - \frac{\alpha'}{2} \nabla^2 \Phi + \alpha' \nabla_w \Phi \nabla^w \Phi - \frac{\alpha'}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda}, \quad (2.43)$$

donde $H^{(3)} = d \wedge B^{(2)}$ es el tensor de fuerza del campo de Kalb-Ramond. De esta ecuación vemos claramente que la condición $D = 26$ ya no es un requisito indispensable como lo era antes, ya que ciertos fondos no triviales de dimensionalidad no crítica serán descripciones de la cuerda admisibles. El fondo más sencillo que satisface las ecuaciones β a todo orden, proviene de observar que estas ecuaciones siempre dependen de derivadas de Φ . Luego, tenemos que

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu} = 0, \quad V = 0, \quad \Phi = \Phi_0, \quad (2.44)$$

es solución. Teniendo en cuenta que el campo Φ es el que aparece acoplado a la curvatura en la hoja de mundo, podemos ver que la constante Φ_0 es aquella constante que habíamos definido como λ en la integral funcional de interacciones. Es decir que el valor de λ está determinado por el fondo que estamos estudiando, y en general estará dado por el valor medio del campo del dilatón. Por lo tanto, este valor, determina la intensidad relativa de las interacciones cuando las comparamos para topologías con distintas características de Euler χ .

2.1.4. Modelos de Wess-Zumino-Witten

Ahora que tenemos una prescripción para formular la teoría en fondos no triviales, queremos encontrar una forma precisa para formular modelos con ciertas simetrías en los fondos que nos interesan. Una forma de partir de una simetría para obtener un fondo es estudiando las llamadas variedades de grupo. Son variedades que están asociadas a un grupo de simetría y donde las isometrías de la variedad son los elementos del grupo. Dado un grupo G de dimensión d parametrizado con elementos $g \in G$ y generadores T^a , con $a = 1, \dots, d$, la métrica d -dimensional asociada a este grupo está dada por

$$ds^2 = \text{Tr}[(g^{-1}dg)^2], \quad (2.45)$$

donde Tr es la traza invariante de alguna representación del grupo. La idea es pues considerar que los elementos g están definidos sobre la hoja de mundo $g : \Sigma \rightarrow G$. Por lo tanto la forma de acoplar la métrica a la parte cinética de la acción de la hoja de mundo, de manera de formar un fondo coherente sobre el que la cuerda se desplaza es tomando la acción

$$S_W = -\frac{k}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \gamma^{1/2} \gamma^{ab} \text{Tr}[\partial_a g g^{-1} \partial_b g g^{-1}] \quad (2.46)$$

Esta acción describe un modelo sigma no lineal de una cuerda moviéndose en un métrica dada por (2.45). La teoría es globalmente invariante ante la acción de los elementos de $G_L \times G_R$, esto es, es invariante ante $g \rightarrow g_L g g_R^{-1}$, con $g_L \in G_L$ y $g_R \in G_R$. Sin embargo, estamos tomando un modelo sigma no-lineal y sabemos que no todos describirán fondos que respeten la simetría de Weyl. Si escribimos la teoría en el calibre conforme (esto es con $\gamma^{ab} = e^w \delta^{ab}$), la teoría clásica debería tener dos corrientes (izquierda y derecha) que fueran conservadas. La razón de esto es para que se mantenga la simetría conforme de la hoja de mundo. Si variamos la acción respecto a g , las ecuaciones clásicas de movimiento que obtenemos son

$$\partial^a J_a = \partial^a (g^{-1} \partial_a g) = 0. \quad (2.47)$$

Luego, si definimos las corrientes en las coordenadas conformes⁷ (z y \bar{z}) como $J = g^{-1} \partial g$ y $\bar{J} = g^{-1} \bar{\partial} g$, la ecuación (2.47) es

$$\partial \bar{J} + \bar{\partial} J = 0. \quad (2.48)$$

Vemos entonces que las ecuaciones de movimiento de la acción (2.46) no nos llevan a la conservación independiente de las corrientes izquierda y derecha. Si una se conserva, la otra también lo hace, pero no independientemente una de otra. Para

⁷Las coordenadas conformes son $z = \tau + i\sigma$, $\bar{z} = \tau - i\sigma$, $\partial = \partial_z$, $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$, en la hoja de mundo euclídea.

solucionar este problema, agregamos un término a la acción; es el llamado término de Wess-Zumino:

$$\Gamma[\tilde{g}] = \frac{1}{12\pi} \int_B d^3\sigma \epsilon^{abc} \text{Tr}[\tilde{g}^{-1} \partial_a \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial_b \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial_c \tilde{g}], \quad (2.49)$$

donde B es tal que $\partial B = \Sigma$ y \tilde{g} es la extensión de g en la región B . Se puede ver que al variar la acción original junto con el término de Wess-Zumino y utilizando el teorema de Stokes, se llega a la conservación independiente de las corrientes izquierda y derecha, si a estas las definimos asimétricamente como

$$\bar{J} = \bar{J}_a T^a = k g^{-1} \bar{\partial} g, \quad J = J_a T^a = -k \partial g g^{-1}, \quad (2.50)$$

y si el coeficiente relativo entre la acción original y el término de Wess-Zumino es elegido apropiadamente. La acción completa, llamada de Wess-Zumino-Witten es entonces

$$S_{WZW} = S_W - ik\Gamma[g]. \quad (2.51)$$

El término de Wess-Zumino da cuenta del acoplamiento de la cuerda con el campo de Kalb-Ramond que hay que considerar para que el fondo sea admisible para la propagación de la cuerda. Cuando la extensión de la hoja de mundo Σ a la región B no es única, sucede que el coeficiente k solamente puede tomar valores enteros. Por otra parte, la presencia de un acoplamiento con el dilatón es admisible en esta teoría, pero su inclusión es una corrección cuántica de primer orden.

Las corrientes (2.50) satisfacen la siguiente expansión en producto de operadores (OPE's)

$$J^a(z) J^b(z') \sim \frac{k\delta^{ab}}{(z-z')^2} + \frac{i f_c^{ab}}{z-z'} J^c(z'), \quad (2.52)$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo G definidas según su álgebra

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c. \quad (2.53)$$

Las conservaciones de las corrientes implican su analiticidad, por lo tanto podemos desarrollar las corrientes J_a y \bar{J}_a en serie de Laurent

$$J^a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^a z^{-1-n}, \quad \bar{J}^a(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{J}_n^a \bar{z}^{-1-n}. \quad (2.54)$$

Multiplicando por z^m (\bar{z}^m) e integrando alrededor de $z = 0$ ($\bar{z} = 0$) obtenemos los modos

$$J_m^a = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^m J_a(z), \quad (2.55)$$

y análogamente para \bar{J}_m^a . Estos modos satisfacen un álgebra afín que es el álgebra de Kac-Moody de nivel k (también llamada álgebra de corrientes)

$$[J_n^a, J_m^b] = if^{abc} J_{n+m}^c + \frac{k}{2} n \delta^{ab} \delta_{n,-m}. \quad (2.56)$$

Para obtener un tensor de energía momento de esta realización algebraica se utiliza la construcción de Sugawara-Sommerfield. La misma consiste en escribir al tensor de energía momento como una forma bilineal de las corrientes, de manera que satisfaga con estas los OPE's que uno espera. El tensor de energía momento según esta construcción es

$$T_W(z) = \frac{1}{2k + Q} \delta_{ab} : J^a(z) J^b(z) :, \quad (2.57)$$

donde Q es el casimir cuadrático de la representación adjunta de G ,

$$Q \delta_{ad} = -f_{abc} f_{cbd}. \quad (2.58)$$

De esta forma tenemos que el OPE entre el tensor de energía momento y las corrientes es

$$T_W(z) J^a(z') \sim \frac{J^a(z')}{(z - z')^2} + \frac{\partial J^a(z')}{z - z'}, \quad \bar{T}_W(w) J^a(z') \sim 0. \quad (2.59)$$

Dado que el coeficiente del término que va como $J^a(z')(z - z')^{-2}$ es 1 en el OPE con el tensor T_W holomorfo y 0 para el anti-holomorfo, las corrientes J^a son entonces campos primarios con peso conforme $(1, 0)$. Esto era lo que esperábamos al construir el tensor de energía momento. Por otra parte, de esta construcción, esperamos obtener el álgebra de Virasoro para los modos de Laurant del tensor de energía momento. Efectivamente, si escribimos los desarrollos de Laurent de las corrientes dentro del $T_W(z)$, y corremos apropiadamente uno de los índices de la suma obtenemos que los modos del tensor de energía momento están dados por

$$L_n = \frac{1}{2k + Q} \sum_m : J_{n-m}^a J_m^a :, \quad (2.60)$$

donde estos se definen a partir de

$$T_W(z) = \sum_n L_n z^{-2-n}. \quad (2.61)$$

Utilizando (2.60) podemos obtener el álgebra de los generadores L_n

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n}, \quad (2.62)$$

donde $c = \frac{2kd}{2k+Q}$. Este es el álgebra de Virasoro de carga central c . Vemos entonces que de cualquier álgebra de Kac-Moody de la forma (2.56) podemos construir un tensor de energía momento cuyos modos satisfacen el álgebra de Virasoro. La carga central la podríamos haber obtenido también del OPE del tensor de energía momento consigo mismo:

$$T(z)T(z') \sim \frac{c/2}{(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{(z-z')} \quad (2.63)$$

Este desarrollo es el OPE que satisfacen los tensores de energía momento de cualquier teoría de campos conformes para algún valor de la carga central c . Por último completamos el álgebra con el conmutador de los modos del tensor de energía momento con los modos de las corrientes

$$[L_n, J_m^a] = -mJ_{n+m}^a \quad (2.64)$$

Vemos entonces que el modelo de WZW es un modelo sigma no lineal que más allá de la forma precisa en la que podemos escribir su acción, posee una estructura algebraica muy rica. Otro tipo de modelos relacionadas con el modelo de WZW son los modelos de WZW calibrados. Estos se conforman a través de la construcción GKO que consiste en agregar a la acción un término que “calibra” un subgrupo del grupo original G . No cualquier subgrupo es admisible en esta construcción debido a ciertas restricciones de libertad de anomalías. En particular, los grupos abelianos como el grupo $U(1)$ son admisibles como subgrupos; justamente, en este trabajo, estudiaremos ciertas propiedades del modelo de WZW en el coset $SL(2, R)/U(1)$ (× tiempo).

2.2. Teoría de Liouville y las técnicas del gas de Coulomb

2.2.1. Campo de Liouville acoplado a materia con $c = 1(+1)$

La teoría de Liouville aparece naturalmente en la formulación de la gravedad cuántica en dos dimensiones y en la formulación a través de la integral de camino de la teoría de cuerdas [50]. Esta es una teoría de campos conformes [51, 52] cuya acción es

$$S_L[\mu] = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial\varphi\bar{\partial}\varphi + \frac{1}{2\sqrt{2}}QR\varphi + 4\pi\mu e^{\sqrt{2}b\varphi} \right) \quad (2.65)$$

donde μ es un parámetro positivo real llamado “la constante cosmológica de Liouville”. El parámetro de la carga de fondo toma el valor $Q = b + b^{-1}$ de manera de hacer que el potencial barrera de Liouville $\mu e^{\sqrt{2}b\varphi}$ sea un operador marginal. En el calibre conforme, el término del dilaton lineal $QR\varphi$, que involucra al escalar de Ricci de la hoja de mundo R , debe ser entendido como el objeto tiene en cuenta el acoplamiento de la hoja de mundo que recibe una contribución de un punto en el infinito. La teoría

está globalmente definida una vez que uno especifica las condiciones de contorno, y esto puede hacerse imponiendo el comportamiento

$$\varphi \sim -2\sqrt{2}Q \log |z|, \quad \text{si } |z| \gg 1, \quad (2.66)$$

que es compatible con la topología de la esfera. En las teorías de campos conformes en dos dimensiones y escritas en coordenadas complejas, las transformaciones del grupo conforme son funciones holomorfas (anti-holomorfas) de z (\bar{z}). Bajo transformaciones holomorfas el campo de Liouville transforma de una manera que depende de Q :

$$\text{si } z \rightarrow w \text{ entonces } \varphi \rightarrow \varphi - \sqrt{2}Q \log \left| \frac{dw}{dz} \right| \quad (2.67)$$

Ahora queremos obtener explícitamente el tensor de energía momento de la parte libre de la teoría. Para esto tenemos que llevar la acción a la forma en la que explícitamente aparece la métrica. Esta será:

$$S_L[0] = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} Q R \varphi \right) \quad (2.68)$$

donde utilizamos que $\sqrt{g} = 1/2$ en el calibre unitario. A pesar de que el espacio es plano para casi todo z , el término que tiene el R no es nulo ya que da cuenta del acoplamiento de φ con la curvatura en el infinito. Por ende, mientras el escalar de curvatura R (y el tensor de Ricci) aparezca en expresiones integrales, lo tengo en cuenta. Pero cuando aparezca en la expresión de un campo evaluado en las coordenadas de la hoja de mundo, puede considerarse nulo.

Para obtener el tensor de energía momento necesitaremos las siguientes fórmulas:

$$\mathcal{T}^{ab} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_L}{\delta g_{ab}} \quad (2.69)$$

$$\delta(\sqrt{g}) = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ab} \delta g_{ab} \quad (2.70)$$

$$\delta g^{cd} = -g^{ac} g^{bd} \delta g_{ab} \quad (2.71)$$

$$\delta(\varphi R) = (\partial^a \partial^b \varphi - g^{ab} \partial_c \partial^c \varphi) \delta g_{ab} \quad (2.72)$$

donde en la ultima expresión utilizamos que la curvatura es nula en expresiones locales (se tiró R y R_{ab} y reemplazamos las derivadas covariantes por derivadas ordinarias). Usando estas fórmulas nos queda que la variación de la acción libre al variar la métrica

$$\delta S_L[0] = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \sqrt{g} \left[\frac{1}{4} g^{ab} g^{cd} \partial_c \varphi \partial_d \varphi - g^{ca} g^{db} \partial_c \varphi \partial_d \varphi + \right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}Q(\partial^a\partial^b\varphi - g^{ab}\partial_c\partial^c\varphi)\Big]\delta g_{ab}. \quad (2.73)$$

Por lo tanto usando (2.69) tenemos que

$$\mathcal{T}_{ab} = \frac{1}{8\pi}\partial_c\varphi\partial^c\varphi g_{ab} - \frac{1}{4\pi}\partial_a\varphi\partial_b\varphi + \frac{1}{4\pi}\sqrt{2}Q(\partial_a\partial_b\varphi - g_{ab}\partial_c\partial^c\varphi). \quad (2.74)$$

En coordenadas complejas se define el tensor de energía momento como $\mathcal{T}(z) = 2\pi\mathcal{T}_{zz}$, entonces obtenemos

$$\mathcal{T}(z) = -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{Q}{\sqrt{2}}\partial^2\varphi. \quad (2.75)$$

De aquí que el OPE del tensor de energía momento consigo mismo es

$$\mathcal{T}(z)\mathcal{T}(w) \sim \frac{(1+6Q^2)/2}{(z-w)^4} + \frac{2\mathcal{T}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\mathcal{T}(w)}{(z-w)} + reg, \quad (2.76)$$

de donde obtenemos que la carga central de la teoría es $c = 1 + 6Q^2$ (*c.f.* (2.63)). El 1 en esta expresión es debido al término cinético de la acción y el $6Q^2$ es debido al término del dilatón lineal.

En este trabajo estaremos interesados en acoplar al campo de Liouville un campo bosónico $U(1)$ representado por un término adicional $\frac{1}{4\pi}\int d^2z\partial X\bar{\partial}X$ en la acción (2.65). Aun más, podríamos incluir también una dirección “temporal” $-\frac{1}{4\pi}\int d^2z\partial T\bar{\partial}T$. Así, la nueva carga central de la teoría estaría dada por

$$c = 2 + c_L = 3 + 6Q^2,$$

donde c_L se refiere a la carga central de Liouville previamente obtenida. Los objetos importantes de esta teoría son los operadores de vértice exponenciales [53]

$$V_\alpha(z) \times e^{i\sqrt{2}p_1X(z)+i\sqrt{2}p_0T(z)} = e^{\sqrt{2}\alpha\varphi(z)+i\sqrt{2}p_1X(z)+i\sqrt{2}p_0T(z)},$$

que resultan ser operadores locales de dimensión conforme $h = \alpha(Q - \alpha) + p_1^2 - p_0^2$ con respecto al nuevo tensor de energía momento $\mathcal{T}(z)$ de la teoría libre,

$$\mathcal{T}(z) = \frac{1}{2}(\partial T)^2 - \frac{1}{2}(\partial X)^2 - \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{Q}{\sqrt{2}}\partial^2\varphi. \quad (2.77)$$

En las subsecciones siguientes discutiremos sobre la funciones de correlación de la teoría de Liouville.

2.2.2. Funciones de Correlación: Definición

Trataremos con las funciones de correlación de la teoría de Liouville y obtendremos una expresión integral de estas. Luego, como caso particular desarrollaremos la función de partición. El hecho de que la función de partición de la teoría de cuerdas en dimensión crítica sea nula no nos tiene que confundir: cuando la teoría de cuerdas está formulada en un background no-trivial, su función de partición no es necesariamente nula.

En particular, calcularemos la función de partición de la teoría de Liouville en la topología de la esfera. El cálculo resulta útil como la base para construir la función de partición de otras teorías no tan sencillas. Por ejemplo, Liouville acoplada a un campo escalar con $c = 1$, puede utilizarse para describir una teoría de cuerdas en un fondo de taquiones o incluso en una geometría no trivial. Independientemente de las teorías similares a Liouville como el ejemplo recién mencionado o como la teoría de Sine-Liouville, el formalismo que desarrollaremos aquí, conocido como Formalismo del Gas de Coulomb, es útil también en el estudio de las interacciones en la teoría de cuerdas formulada en el coset $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$.

A pesar de que haremos el cálculo de la función de partición de la teoría de Liouville solamente como un ejercicio, se detallaran las cuestiones referidas al cálculo puesto que en las siguientes secciones trabajaremos en analogía a esta sección.

La parte no trivial de las funciones de correlación de la teoría (2.77) está dada por las funciones de correlación de la teoría de Liouville [52, 55, 56, 57]. Estas se definen como el valor de expectación de vacío del producto ordenado temporalmente de operadores exponenciales del tipo taquiónico:

$$A_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N | z_1, \dots, z_N)}^L = \left\langle e^{\sqrt{2}\alpha_1\varphi(z_1)} \dots e^{\sqrt{2}\alpha_N\varphi(z_N)} \right\rangle_{S_L[\mu]} = \int D\varphi e^{-S_L[\mu]} \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i\varphi(z_i)}. \quad (2.78)$$

Donde los operadores exponenciales $e^{\sqrt{2}\alpha_i\varphi(z_i)}$ son campos primarios sin espín cuyo peso conforme es

$$\Delta_\alpha = \alpha(Q - \alpha) \quad \text{con } Q = b + b^{-1}. \quad (2.79)$$

Esta definición está motivada por dos razones. Por un lado, dado que el campo φ no transforma linealmente ante transformaciones conformes en la hoja de mundo las estructuras y simetrías de sus funciones de correlación no serán tan ricas matemáticamente como sí lo serán las funciones de correlación de las exponenciales de φ . Por otra parte el operador exponencial de φ se interpreta físicamente como un modo de momento del taquión.

Utilizando las prescripciones de campos libres desarrolladas por Dotsenko y Fateev [58, 59], y por Goulian y Li [60] podremos expresar la integral funcional (2.78)

como una integral funcional de un producto de operadores pesados con la exponencial de la parte libre de la acción de Liouville. Antes de hacer eso, necesitamos obtener el propagador libre de esta teoría.

Sin abordar el problema en toda su complejidad, mediante un argumento sencillo, podemos adelantarnos a la dependencia funcional que tendrán las funciones de correlación (2.78) con respecto a μ .

Tomemos (2.65) y hagamos la siguiente transformación:

$$\varphi \rightarrow \varphi - \frac{\ln \mu}{\sqrt{2b}}. \quad (2.80)$$

El término de las derivadas de φ no cambia, el término de la perturbación exponencial hace que se absorba la constante μ y además surge un término extra en el la parte de $R\varphi$ que se puede integrar usando el teorema de Gauss-Bonnet

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} R = 2(1-g). \quad (2.81)$$

La acción transformada será

$$S'[\mu] = S[\mu = 1] - \frac{Q(1-g) \ln \mu}{b}. \quad (2.82)$$

Esta transformación, no modifica la integral funcional (2.78), ya que la medida de integración es invariante:

$$\begin{aligned} A_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N | z_1, \dots, z_n)}^L[\mu] &= \int [D\varphi] e^{-S[\mu]} \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i \varphi(z_i)} = \\ &= \int [D\varphi'] e^{-S'[\mu]} \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i \varphi'(z_i)} = \int [D\varphi] e^{-\frac{\ln \mu}{b} \sum_{i=1}^N \alpha_i} \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i \varphi(z_i)} e^{-S[\mu=1] + \frac{Q(1-g) \ln \mu}{b}} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Por lo tanto, tenemos que

$$A_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N | z_1, \dots, z_n)}^L[\mu] = \mu^{\frac{1}{b} \left(Q(1-g) - \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)} A_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N | z_1, \dots, z_n)}^L[\mu = 1]. \quad (2.84)$$

Con esta sencilla transformación obtuvimos la dependencia exacta de las funciones de correlación con la constante μ . A este procedimiento para obtener el escaleo de las constantes de acoplamiento se lo denomina escaleo KPZ.

2.2.3. Correlador de la teoría libre

Empezamos con el funcional generatriz de vacío de la teoría libre,

$$W_0[J] = \mathcal{N} \int D\varphi e^{-S_L[0] + \int d^2z J(z)\varphi(z)}, \quad (2.85)$$

de donde podemos obtener las funciones de correlación de la teoría libre haciendo derivadas funcionales.

$$\left. \frac{\delta^k W_0[J]}{\delta J(z_1) \dots \delta J(z_k)} \right|_{J=0} = \langle \varphi(z_1) \dots \varphi(z_k) \rangle_{S_L[0]}. \quad (2.86)$$

Para hacer este cálculo, no tenemos en cuenta la carga de fondo Q puesto que la contribución de este término en el correlador de la teoría libre solamente da cuenta de las condiciones de contorno. Pensando en términos de un producto interno en el espacio de funciones cuadrado-integrables de la forma

$$(f, g) = \int d^2z f(z)g(z), \quad (2.87)$$

reescribimos el exponente (en coordenadas reales) de la integral funcional

$$\begin{aligned} -S_L[0] + \int d^2z J(z)\varphi(z) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^2z (\partial\varphi\bar{\partial}\varphi) + \int d^2z J(z)\varphi(z) = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^2x d^2x' \varphi(x) (\eta^{ab}\partial_a\partial'_b\delta^2(x-x')) \varphi(x') + 2 \int d^2x J(x)\varphi(x). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Esta expresión, en términos del producto interno y escrita en la exponencial será

$$\exp\left(-S_L[0] + \int d^2z J(z)\varphi(z)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\varphi, A\varphi) + (\rho, \varphi)\right), \quad (2.89)$$

con la identificación:

$$A(x-x') = \frac{1}{4\pi} \eta^{ab}\partial_a\partial'_b\delta^2(x-x') \quad \text{y} \quad \rho = 2J(x). \quad (2.90)$$

Escrito así, podemos utilizar la fórmula de la Gaussiana:

$$\int D\varphi \exp\left(-\frac{1}{2}(\varphi, A\varphi) + (\rho, \varphi)\right) \propto \exp\left(\frac{1}{2}(\rho A^{-1}, \rho)\right), \quad (2.91)$$

donde el factor de proporcionalidad es irrelevante puesto que lo absorberemos en \mathcal{N} .

La ecuación (2.91) nos dice que precisamos la inversa de A para completar el cálculo. Para obtenerla observemos que la operación inversa en el espacio de funciones está dada por

$$\int d^2\tilde{x} A(x - \tilde{x})A^{-1}(\tilde{x} - x') = \delta^2(x - x'), \quad (2.92)$$

Por lo tanto, si introducimos la expresión de A en (2.92) e integramos por partes dos veces, obtenemos que A^{-1} es una función de Green del Laplaciano en dos dimensiones:

$$\partial_a \partial^a A^{-1}(x - x') = -4\pi \delta^2(x - x'). \quad (2.93)$$

La función de Green que satisface esta ecuación, con las condiciones de contorno adecuadas es

$$A^{-1}(x - x') = -2 \ln |x - x'|, \quad (2.94)$$

que, volviendo a coordenadas complejas, se escribe sencillamente como

$$A^{-1}(z - z') = -\ln[(z - z')(\bar{z} - \bar{z}')] = -2 \ln |z - z'|. \quad (2.95)$$

A este propagador se lo asocia nominalmente con la interacción de un gas de Coulomb ya que el equivalente en 2 dimensiones al potencial $\phi \propto 1/r$ es una interacción que va como $\ln(r)$. Ahora que tenemos la inversa de A y utilizando (2.91) escribimos el funcional generatriz

$$W_0[J] = \exp\left(\frac{1}{2} \int d^2z d^2z' J(z)A^{-1}(z - z')J(z')\right). \quad (2.96)$$

De aquí podemos obtener en particular la función de correlación de dos puntos del campo φ

$$\langle \varphi(z)\varphi(w) \rangle_{S_L[0]} = \frac{\delta^2 W_0[J]}{\delta J(z)\delta J(w)} \Bigg|_{J=0} = A^{-1}(z - w) = -2 \ln |z - w|. \quad (2.97)$$

Este correlador Coulombiano de la teoría de Liouville libre lo utilizaremos en repetidas oportunidades a lo largo del trabajo. Es necesario hacer dos observaciones relevantes respecto a este correlador. En primer lugar, como decíamos antes, si la carga de fondo Q es nula, la cuenta hubiera dado exactamente el mismo resultado. En segundo lugar, se puede probar que si el término cinético hubiera llevado el signo opuesto, entonces el correlador hubiera dado también con el signo opuesto. Esto es importante en teorías como (2.77) con más de un campo escalar y con signos de diferencia en los términos cinéticos de la acción. Estas diferencias entre los signos se interpreta físicamente, en el contexto de un modelo sigma no lineal, como la diferencia entre un campo de una dirección temporal y otro espacial.

2.2.4. Integración del modo cero

Ahora que ya conocemos el correlador básico de la teoría libre volvemos a la teoría de Liouville con la perturbación exponencial. La idea es integrar el modo cero del campo φ . Al hacer esto, la expresión de la integral funcional se expresará como la función de correlación en la teoría libre de los operadores exponenciales originales junto con una cantidad dada de operadores de apantallamiento, también exponenciales, pero integrados.

Tomemos la expresión de la función de correlación (2.78) e integremos por separado los modos oscilatorios y los modos constantes (modos cero) del campo φ . Es decir, escribimos

$$\varphi = \varphi' + \varphi_0. \quad (2.98)$$

Con este cambio, la acción transforma como

$$S_L[\mu] = S_L[0]' + \sqrt{2}Q\varphi_0(1-g) + \mu e^{\sqrt{2}b\varphi_0} \int d^2z e^{\sqrt{2}b\varphi}, \quad (2.99)$$

con g el genero de la hoja de mundo y habiendo utilizado el teorema de Gauss-Bonnet (*c.f.* (2.81)).

Por otra parte, los operadores exponenciales transformarán como

$$\prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i\varphi(z_i)} = e^{\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right)\varphi_0} \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i\varphi'(z_i)}. \quad (2.100)$$

Utilizaremos $g = 0$ para hacer el cálculo en la geometría esférica. Con todo esto y definiendo $V_\varphi = \int d^2z e^{\sqrt{2}b\varphi(z)}$ escribimos la integral funcional con los modos oscilatorios y constantes separados:

$$A_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N | z_1, \dots, z_N)}^L = \int D\varphi' d\varphi_0 e^{-S_L[0]'} e^{\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i - Q\right)\varphi_0} \exp(-\mu e^{\sqrt{2}b\varphi_0} V_{\varphi'}) \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i\varphi'(z_i)}. \quad (2.101)$$

Ahora sí, a partir de esta expresión queremos realizar la integral del modo cero. Específicamente, resolver la siguiente integral:

$$I[\varphi'] = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_0 e^{\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i - Q\right)\varphi_0} \exp(-\mu e^{\sqrt{2}b\varphi_0} V_{\varphi'}). \quad (2.102)$$

Para eso utilizamos la identidad

$$\exp(-\mu e^{\sqrt{2}b\varphi_0} V_{\varphi'}) = \int_0^{\infty} dU e^{-\mu V_{\varphi'} U} \delta(U - e^{\sqrt{2}b\varphi_0}), \quad (2.103)$$

y la introducimos en (2.102)

$$I[\varphi'] = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_0 \int_0^{\infty} dU e^{\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i - Q\right)\varphi_0} e^{-\mu V_{\varphi'} U} \delta(U - e^{\sqrt{2}b\varphi_0}). \quad (2.104)$$

Transformamos la delta de Dirac utilizando $\delta(f(\varphi_0)) = \delta(\varphi_0 - \tilde{\varphi}_0)/|f'(\tilde{\varphi}_0)|$; con $\tilde{\varphi}_0$ la raíz de $f(\varphi_0)$.

$$I[\varphi'] = (\sqrt{2}b)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_0 \int_0^{\infty} dU U^{-1} e^{\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i - Q\right)\varphi_0} e^{-\mu V_{\varphi'} U} \delta\left(\varphi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}b} \ln U\right) \quad (2.105)$$

De esta forma es trivial integrar en la variable φ_0 . Haciendo eso nos queda

$$I[\varphi'] = (\sqrt{2}b)^{-1} \int_0^{\infty} dU U^{\left[-\frac{1}{b}\left(Q - \sum_{i=1}^N \alpha_i\right) - 1\right]} e^{-\mu V_{\varphi'} U}. \quad (2.106)$$

Esta integral tiene una expresión cerrada que es

$$I[\varphi'] = (\sqrt{2}b)^{-1} \mu^s \Gamma(-s) \delta\left(s + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^N \alpha_i - \frac{Q}{b}\right) \int \prod_{k=1}^s d^2 w_k \prod_{k=1}^s e^{\sqrt{2}b\varphi'(w_k)}, \quad (2.107)$$

habiendo usado la identidad

$$\int_0^{\infty} dU U^{x-1} e^{-aU} = a^{-x} \Gamma(x). \quad (2.108)$$

Introduciendo (2.107) en (2.101) obtenemos que

$$A_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N | z_1, \dots, z_N)}^L = (\sqrt{2}b)^{-1} \mu^s \Gamma(-s) \delta\left(s + b^{-1}(\alpha_1 + \dots + \alpha_N) - b^{-1}Q\right) \int D\varphi e^{-S_L[0]} \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i \varphi(z_i)} \int \prod_{k=1}^s d^2 w_k \prod_{k=1}^s e^{\sqrt{2}b\varphi(w_k)}. \quad (2.109)$$

La delta de Dirac nos está indicando una conservación que relaciona los momentos de los operadores taquiónicos originales (α_i) con el número (s) de operadores de apantallamiento que aparecieron al integrar el modo cero del campo. Observemos que el exponente de μ en la función de correlación coincide con el predicho por el escaleo KPZ si tomamos $g = 0$. Reescribamos la conservación de una forma sugestiva:

$$\sum_{k=1}^s b + \sum_{i=1}^N \alpha_i = Q. \quad (2.110)$$

La ecuación (2.109) nos permite hacer una interpretación física interesante. Al parecer la teoría de Liouville con la perturbación exponencial se puede pensar como una teoría libre en la que los taquiones reales interactúan entre si y con un dado número (s) de taquiones del condensado del fondo. Estos taquiones del condensado son “virtuales” (pues están integrados), poseen un momento fijo (b) y su número depende del número y momento de los taquiones reales según (2.110). Además, (2.110) nos dice que el momento total de los n taquiones reales más el momento total de los s taquiones virtuales es siempre igual a una constante que es la llamada carga de fondo. Parece entonces que el término del dilatón lineal introduce un momento adicional $-Q$ en las interacciones entre taquiones.

Independientemente de la interpretación física de la ecuación (2.109), la expresión está mal definida en principio. Cuando calculamos la integral del modo cero y reescribimos los operadores taquiónicos hicimos la siguiente asunción:

$$\left(\int d^2w e^{\sqrt{2}b\varphi(w)} \right)^s = \int \prod_{k=1}^s d^2w_k \prod_{k=1}^s e^{\sqrt{2}b\varphi(w_k)}. \quad (2.111)$$

Pero para escribir la potencia de s de esa manera, estamos asumiendo que s es un entero. Por otro lado la conservación dada por la delta de Dirac nos dice que s no es necesariamente un entero. Aun si asumiéramos que el valor de s dado por la conservación es entero, la $\Gamma(-s)$ que apareció al integrar el modo cero tiene polos en los enteros negativos y la expresión (2.109) estaría mal definida.

Por todo esto, para poder continuar la cuenta y aprovechar que el cálculo de funciones de correlación se simplificó a pesar de los problemas con el número de operadores de apantallamiento, asumiremos que s es lo suficientemente genérico y continuaremos la cuenta hasta poder llegar a expresiones regulares en s . De esta manera, estaríamos haciendo una especie de continuación analítica en s de la expresión (2.109).

Notemos que podemos escribir (2.109) de la siguiente forma:

$$A_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N | z_1, \dots, z_N)}^L = (\sqrt{2}b)^{-1} \mu^s \Gamma(-s) \delta(s + b^{-1}(\alpha_1 + \dots + \alpha_N) - b^{-1}Q) \int \prod_{k=1}^s d^2w_k \left\langle \prod_{k=1}^s e^{\sqrt{2}b\varphi(w_k)} \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i\varphi(z_i)} \right\rangle_{S_L[0]}. \quad (2.112)$$

Escrito así vemos claramente que tenemos que calcular el valor de expectación de vacío de un producto de operadores exponenciales en la teoría de Liouville libre. Por lo tanto, utilizando medidas Gaussianas, técnicas de campo libre y herramientas como el teorema de Wick podremos llevar este valor de expectación a una expresión integral concisa. Para esto tenemos que entender como contraer los operadores exponenciales en la teoría libre.

2.2.5. Producto ordenado de operadores exponenciales

Dado que conocemos $\langle \varphi(z_1)\varphi(z_2) \rangle_{S_L[0]}$ queremos calcular valores de expectación del tipo

$$\left\langle \prod_{m=1}^p e^{\alpha_m \varphi(z_m)} \right\rangle_{S_L[0]}. \quad (2.113)$$

Empecemos primero por calcular el valor de expectación de dos operadores. Desarrollamos en serie las exponenciales

$$\begin{aligned} \langle e^{\alpha_1 \varphi(z_1)} e^{\alpha_2 \varphi(z_2)} \rangle_{S_L[0]} &= \left\langle \left(1 + \alpha_1 \varphi(z_1) + \frac{\alpha_1^2}{2!} \varphi(z_1) \varphi(z_1) + \frac{\alpha_1^3}{3!} \varphi(z_1) \varphi(z_1) \varphi(z_1) + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \alpha_2 \varphi(z_2) + \frac{\alpha_2^2}{2!} \varphi(z_2) \varphi(z_2) + \frac{\alpha_2^3}{3!} \varphi(z_2) \varphi(z_2) \varphi(z_2) + \dots \right) \right\rangle_{S_L[0]}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

En este caso, de todos los productos que resultan, y al hacer todas las contracciones utilizando el Teorema de Wick solamente quedan los términos que mezclan el mismo número de operadores $\varphi(z_1)$ y $\varphi(z_2)$. Si tomásemos potencias distintas del primer y segundo paréntesis nos quedarían operadores sin contraer.

Por otra parte, al hacer las contracciones, el número de ellas orden a orden coincide exactamente con uno de los coeficiente factoriales que acompañan a los términos. Por ejemplo el orden 3 del producto es

$$\left\langle \left(\frac{\alpha_1^3}{3!} \varphi(z_1) \varphi(z_1) \varphi(z_1) \right) \left(\frac{\alpha_2^3}{3!} \varphi(z_2) \varphi(z_2) \varphi(z_2) \right) \right\rangle_{S_L[0]} = \frac{3! \alpha_1^3 \alpha_2^3}{3! 3!} \langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \rangle_{S_L[0]}^3. \quad (2.115)$$

El desarrollo completo entonces queda

$$\begin{aligned} \langle e^{\alpha_1 \varphi(z_1)} e^{\alpha_2 \varphi(z_2)} \rangle_{S_L[0]} &= 1 + \alpha_1 \alpha_2 \langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \rangle_{S_L[0]} + \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2}{2!} \langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \rangle_{S_L[0]}^2 + \\ &\quad \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^3}{3!} \langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \rangle_{S_L[0]}^3 + \dots = e^{\alpha_1 \alpha_2 \langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \rangle_{S_L[0]}}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Pero ahora que ya conocemos el valor de $\langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \rangle_{S_L[0]}$ podemos escribir

$$\langle e^{\alpha_1 \varphi(z_1)} e^{\alpha_2 \varphi(z_2)} \rangle_{S_L[0]} = |z_1 - z_2|^{-2\alpha_1 \alpha_2}. \quad (2.117)$$

El desarrollo para dos exponenciales es el más sencillo. El problema es cuando tenemos 3 o más exponenciales. En ese caso, no solamente sobreviven los términos que combinan orden a orden los términos del desarrollo de cada exponencial.

Habría entonces que tener en cuenta todos los posibles productos que no dejen operadores sin contraer. Vamos a realizar la cuenta con tres exponenciales para entender la mecánica general para un número arbitrario de ellas.

Primero desarrollamos en serie las tres exponenciales

$$\begin{aligned} \langle e^{a\varphi(z_a)} e^{b\varphi(z_b)} e^{c\varphi(z_c)} \rangle_{S_L[0]} &= \left\langle \left(1 + a\varphi(z_a) + \frac{a^2}{2!}\varphi(z_a)\varphi(z_a) + \frac{a^3}{3!}\varphi(z_a)\varphi(z_a)\varphi(z_a) + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. \left(1 + b\varphi(z_b) + \frac{b^2}{2!}\varphi(z_b)\varphi(z_b) + \frac{b^3}{3!}\varphi(z_b)\varphi(z_b)\varphi(z_b) + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. \left(1 + c\varphi(z_c) + \frac{c^2}{2!}\varphi(z_c)\varphi(z_c) + \frac{c^3}{3!}\varphi(z_c)\varphi(z_c)\varphi(z_c) + \dots \right) \right\rangle_{S_L[0]}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

La idea ahora es combinar los términos de los tres paréntesis e ir juntando orden a orden todos los que no dejan ningún operador sin contraer. Los más triviales son los ordenes 0 y 1:

$$1 + ab\langle\varphi(z_a)\varphi(z_b)\rangle_{S_L[0]} + ac\langle\varphi(z_a)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]} + bc\langle\varphi(z_b)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]}. \quad (2.119)$$

El orden 2 no es tan trivial porque aparecen combinaciones de distintos ordenes con contracciones de Wick que agregan factores

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2!} \left(\frac{2!}{2!} a^2 b^2 \langle\varphi(z_a)\varphi(z_b)\rangle_{S_L[0]}^2 + \frac{2!}{2!} a^2 c^2 \langle\varphi(z_a)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]}^2 + \frac{2!}{2!} b^2 c^2 \langle\varphi(z_b)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]}^2 \right. \\ &+ 2a^2 bc \langle\varphi(z_a)\varphi(z_b)\rangle_{S_L[0]} \langle\varphi(z_a)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]} + 2b^2 ac \langle\varphi(z_a)\varphi(z_b)\rangle_{S_L[0]} \langle\varphi(z_b)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]} + \\ &\quad \left. + 2c^2 ba \langle\varphi(z_a)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]} \langle\varphi(z_b)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]} \right). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Pero afortunadamente todos esos términos forman un trinomio cuadrado perfecto. El orden 2 entonces queda

$$\frac{1}{2!} \left(ab\langle\varphi(z_a)\varphi(z_b)\rangle_{S_L[0]} + ac\langle\varphi(z_a)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]} + bc\langle\varphi(z_b)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]} \right)^2. \quad (2.121)$$

An logamente se puede ver que el orden k sería un trinomio de la k -ésima potencia perfecta de la forma

$$\frac{1}{k!} \left(ab\langle\varphi(z_a)\varphi(z_b)\rangle_{S_L[0]} + ac\langle\varphi(z_a)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]} + bc\langle\varphi(z_b)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]} \right)^k. \quad (2.122)$$

Evidentemente la suma de todos los ordenes será una exponencial del trinomio:

$$\left\langle e^{a\varphi(z_a)} e^{b\varphi(z_b)} e^{c\varphi(z_c)} \right\rangle_{S_L[0]} = e^{ab\langle\varphi(z_a)\varphi(z_b)\rangle_{S_L[0]} + ac\langle\varphi(z_a)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]} + bc\langle\varphi(z_b)\varphi(z_c)\rangle_{S_L[0]}}, \quad (2.123)$$

que utilizando la función de correlación de dos campos φ nos queda

$$\left\langle e^{a\varphi(z_a)} e^{b\varphi(z_b)} e^{c\varphi(z_c)} \right\rangle_{S_L[0]} = |z_a - z_b|^{-2ab} |z_a - z_c|^{-2ac} |z_b - z_c|^{-2bc}. \quad (2.124)$$

Podemos inducir a partir de las dos ecuaciones anteriores como será el valor de expectación para un número arbitrario de operadores exponenciales. La fórmula general es

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{m=1}^p e^{\alpha_m \varphi(z_m)} \right\rangle_{S_L[0]} &= \exp \left(\sum_{i<j}^{p-1,p} \alpha_i \alpha_j \langle \varphi(z_i) \varphi(z_j) \rangle_{S_L[0]} \right) \\ &= \prod_{i<j}^{p-1,p} |z_i - z_j|^{-2\alpha_i \alpha_j}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

2.2.6. Función de partición de la teoría de Liouville

Ahora que sabemos calcular funciones de correlación de operadores exponenciales en la teoría libre, podemos evaluar la expresión (2.109). Utilizando la propiedad (2.125), las funciones de correlación nos quedan

$$A_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N | z_1, \dots, z_N)}^L = (\sqrt{2b})^{-1} \mu^s \Gamma(-s) \delta(s - b^{-1}Q)$$

$$\prod_{i<j}^{N-1,N} |z_i - z_j|^{-4\alpha_i \alpha_j} \int \prod_{k=1}^s d^2 w_k \prod_{p=1, k=1}^{N,s} |z_p - w_k|^{-4b\alpha_p} \prod_{l<m}^{s-1,s} |w_l - w_m|^{-4b^2}. \quad (2.126)$$

A continuación vamos al caso particular de la función de partición de esta teoría. Es decir, no introducimos ningún operador taquiónico y solamente nos quedamos con los s operadores que aparecieron al integrar el modo cero. La expresión integral a la que llegamos en este caso particular es

$$Z_{g=0}^L = (\sqrt{2b})^{-1} \mu^s \Gamma(-s) \delta(s - b^{-1}Q) \int \prod_{k=1}^s d^2 w_k \prod_{l<m}^{s-1,s} |w_l - w_m|^{-4b^2}. \quad (2.127)$$

Para ser más precisos en como calcular explícitamente esta integral debemos considerar el hecho de que al calcular la función de partición con la integral funcional

debimos tener en cuenta el sobre-conteo de estados físicos producto de la libertad de calibrado del grupo conforme. Para compensar el volumen del grupo conforme de Killing $SL(2, \mathbb{C})$ tenemos que considerar que tres de los operadores exponenciales que contrajimos, estaban insertados en los puntos $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$. Por ende, el número de operadores a integrar será $m = s - 3 = -2 + b^{-2}$. Teniendo en cuenta esto, la función de partición será

$$Z^L_{g=0} = (\sqrt{2}b)^{-1} \mu^{m+3} \Gamma(-m-3) \lim_{z \rightarrow \infty} |z_3|^4 \int \prod_{k=1}^m d^2 w_k \prod_{l < m}^{s-1, s} |w_l - w_m|^{-4b^2}. \quad (2.128)$$

Desarrollando la doble productoria y tomando el límite nos queda que

$$Z^L_{g=0} = (\sqrt{2}b)^{-1} \mu^{m+3} \Gamma(-m-3) \int \prod_{k=1}^m d^2 w_k \prod_{l < m}^{m-1, m} |w_l - w_m|^{-4b^2} \prod_{r=1}^m |w_r|^{-4b^2} |1 - w_r|^{-4b^2}. \quad (2.129)$$

Esta integral tiene una solución para valores de m enteros. La misma es del tipo Dotsenko-Fateev y se puede encontrar en [59]. En principio, nosotros queremos resolver esta integral para valores de m genéricos (idem a valores genéricos de s); por eso, tomaremos que m es entero a lo largo de la integración y luego haremos una extensión analítica del resultado para valores arbitrarios de m . Usando la fórmula integral B.9 de [59] tenemos que

$$\begin{aligned} Z^L_{g=0} &= (\sqrt{2}b)^{-1} \mu^{m+3} \Gamma(-m-3) \Gamma(m+1) \pi^m \gamma^m (1-\rho) \times \\ &\times \prod_{i=1}^m \gamma(i\rho) \prod_{i=0}^{m-1} \gamma(1 + (2+i)\rho) \gamma(-1 - (m+3+i)\rho), \end{aligned} \quad (2.130)$$

donde definimos que $\rho = -b^2$ y que la función γ se define a partir de la Γ ordinaria como $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$. Tenemos que trabajar esta expresión para hacer la continuación analítica en m . Así como está escrita, sigue estando mal definida para valores no enteros de m . Notemos que $m = -2 - 1/\rho$, por lo tanto

$$\Gamma(-1 - (m+3+i)\rho) = \Gamma(-\rho - i\rho).$$

Si corremos algunos índices de las productorias podemos escribir que

$$Z^L_{g=0} = (\sqrt{2}b)^{-1} \mu^{m+3} \Gamma(-m-3) \Gamma(m+1) \pi^m \gamma^m (1-\rho) \prod_{i=1}^m \gamma(i\rho) \gamma(-i\rho) \prod_{i=2}^{m+1} \gamma^2(1+i\rho). \quad (2.131)$$

Ahora escribamos explícitamente el último producto

$$\prod_{i=2}^{m+1} \gamma(1+i\rho) = \gamma(1+2\rho) \gamma(1+3\rho) \dots \gamma(1+m\rho) \gamma(1+(m+1)\rho), \quad (2.132)$$

que, si lo leemos al revés, es fácil ver que

$$\gamma(1+(m+1))\gamma(1+m\rho)\gamma(1+(m-1)\rho)\dots\gamma(1+3\rho)\gamma(1+2\rho) = \prod_{r=0}^{m-1} \gamma(1+(m+1-r)\rho). \quad (2.133)$$

Y además

$$\prod_{r=0}^{m-1} \gamma(1+(m+1-r)\rho) = \prod_{r=1}^m \gamma(1+(m+2-r)\rho) = \prod_{r=1}^m \gamma(-r\rho). \quad (2.134)$$

Por lo tanto

$$\prod_{i=2}^{m+1} \gamma(1+i\rho) = \prod_{r=1}^m \gamma(-r\rho). \quad (2.135)$$

Ahora utilizamos la propiedad $\gamma(1+x) = -x^2\gamma(x)$ para reescribir la primera productoria de (2.131):

$$\prod_{r=1}^m \gamma(r\rho)\gamma(-r\rho) = \prod_{r=1}^m \frac{-1}{(r\rho)^2} \gamma(1-r\rho)\gamma(r\rho) = \prod_{r=1}^m \frac{-1}{(r\rho)^2} = \frac{(-1)^m}{\Gamma^2(1+m)\rho^{2m}}. \quad (2.136)$$

Y además, la segunda productoria de (2.131) se puede escribir usando (2.135):

$$\prod_{r=1}^m \Gamma(-r\rho) \prod_{r=2}^{m+1} \Gamma(1+r\rho) = \gamma^2(-\rho) \prod_{r=2}^{m+1} \Gamma(-r\rho) \prod_{r=2}^{m+1} \Gamma(1+r\rho) = \gamma^2(-\rho). \quad (2.137)$$

Combinando (2.136) y (2.137) tenemos que la función de partición es

$$Z_{g=0}^L = (\sqrt{2}b)^{-1} \mu^{m+3} \Gamma(-m-3) \Gamma(m+1) \pi^m \gamma^m(1-\rho) (-1)^m \Gamma^{-2}(1+m) \rho^{-2m} \gamma^2(-\rho). \quad (2.138)$$

Si ahora utilizamos las siguientes propiedades de la γ :

$$\gamma(2+\rho^{-1}) = -(1+\rho^{-1})^2 \gamma(1+\rho^{-1}),$$

$$\gamma(1-\rho) = -\rho^2 \gamma(-\rho) \quad \text{y} \quad \gamma(-1-\rho) = -(1+\rho)^{-2} \gamma(-\rho), \quad (2.139)$$

podemos reescribir la función de partición más compactamente como

$$Z_{g=0}^L = \frac{(1-b^2)(\pi\mu\gamma(b^2))^{Q/b}}{\sqrt{2}\pi^3 Q \gamma(b^2)\gamma(b^{-2})}. \quad (2.140)$$

Esta es la función de partición para la topología esférica de la teoría de Liouville. Este resultado no trivial coincide exactamente con el que se encuentra en [61]⁸. La función oscila con frecuencia creciente y amplitud decreciente cuando b^2 tiende a 0 y a 1. Se puede utilizar la fórmula asintótica de Stirling, $n! \sim n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n}$, y la identidad $\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin(\pi x) = \pi$ para verificar que, para μ fijo, la función no se anula en esos puntos. Una de las características intrigantes de la expresión (2.140) es el hecho de que no manifiesta la autodualidad que la teoría de Liouville parece tener ante la transformación $b \rightarrow b^{-1}$. Para comprender mejor esto es conveniente comparar el cálculo recién presentado con el cálculo análogo en el que uno considera la función de tres puntos cuya expresión general es

$$A^L_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | z_1, z_2, z_3)} = C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) |z_{12}|^{2(h_3 - h_2 - h_1)} |z_{23}|^{2(h_1 - h_2 - h_3)} |z_{31}|^{2(h_2 - h_1 - h_3)}, \quad (2.141)$$

y luego toma los tres momentos iguales a b . Se puede probar entonces que la constante C cumple que

$$C(b, b, b) = -\frac{d^3 Z_L}{d\mu^3}. \quad (2.142)$$

Integrando esta expresión tres veces se puede obtener la función de partición (este es el metodo utilizado en [61]). La diferencia entre ambos cálculos viene dada por la presencia de un factor $\Gamma(-s) = \Gamma(-m-3)$ en (2.109). Como mencionamos, este factor proviene de la integración del modo cero del campo φ , pero podría pensarse como si proviniera del problema combinatorio de permutar todos los operadores de apantallamiento. Para s entero, este factor se puede escribir como

$$\Gamma(-s) = (-1)^s \Gamma(0)/s!, \quad (2.143)$$

donde el factor divergente $\Gamma(0)$ da cuenta de la divergencia debido a la dirección no compacta de Liouville. Por otro lado, en el caso de calcular la constante $C(b, b, b)$, a diferencia del cálculo directo de $Z_{g=0}$, el factor análogo debería ser $\Gamma(3-s)$ en vez de $\Gamma(-s)$ dado que uno debe dividir por la permutación de $s-3$ cargas de apantallamiento. Por lo tanto, tenemos que

$$C(b, b, b)/Z_{g=0} = \Gamma(3-s)/\Gamma(-s) = -s!/(s-3)! = -(b^{-2}+1)b^{-2}(b^{-2}-1). \quad (2.144)$$

Esto es consistente con el hecho de que $\frac{d^3 Z}{d\mu^3} = -C(b, b, b) \sim \mu^{Q/b-3}$. En conclusión, este problema combinatorio parecería ser el causante de la perdida de la autodualidad de Liouville en su función de partición.

En [61] la función de partición fue obtenida por un método diferente, y sin embargo el resultado es el mismo. En definitiva, la prescripción del formalismo del gas de Coulomb, que involucraba la resolución de la cuenta independientemente de

⁸Si se compara el resultado obtenido aquí con el de [61] se puede ver una diferencia en un factor $\sqrt{2}$. Esta diferencia tiene que ver con la normalización del campo φ utilizada en cada caso

las inconsistencias que surgían con el número s , resulto ser eficiente para calcular esta función de partición.

Ahora, estudiaremos otra teoría de campos conformes que es también una pieza crucial en nuestra discusión: la teoría de campos que describe el modelo sigma del agujero negro 2D.

2.3. La teoría de cuerdas en el agujero negro 2D

2.3.1. La acción y la imagen semiclassical

La teoría de cuerdas en dos dimensiones presenta varias propiedades interesantes que hacen de ella un territorio ideal para el estudio de sus análogos de más dimensiones. Un ejemplo de esto está dado por la solución de agujero negro 2D encontrado en las Refs. [65, 66]. Este agujero negro viene acompañado de una configuración de dilatón lineal, y resulta ser un fondo exacto en el cual se puede formular la teoría de cuerdas. De hecho, el modelo sigma que describe al agujero negro resulta ser la teoría de WZW calibrada (inglés: gauged) del nivel k del coset de grupos $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$ [65]. Una revisión excelente de este modelo puede ser encontrada en [10].

La descripción de la hoja de mundo para la teoría de cuerdas en un fondo con una métrica y una configuración dilatónica, una vez fijado $\alpha' = 2$, es

$$S_P = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z (G_{\mu\nu}(X) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + R\Phi(X)), \quad (2.145)$$

donde los índices $\mu, \nu = \{1, D = 2\}$ recorren las dos coordenadas del espacio tiempo, cuya métrica es $G_{\mu\nu}(X)$. La acción está escrita en el gauge conforme. El término del dilatón $R\Phi(X)$ debe ser entendido como aquél que tiene en cuenta la contribución proveniente del acoplamiento de los campos X con la curvatura de la hoja de mundo. La anulación de las funciones β a un loop requiere que

$$R_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi, \quad (2.146)$$

siendo $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci asociado a la métrica del espacio tiempo $G_{\mu\nu}$. Dado que la teoría de cuerdas en el agujero negro 2D corresponde al modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$, admite una descripción algebraica exacta en términos de las corrientes del álgebra conforme de la teoría de WZW; comentaremos esto en la siguiente subsección. En el límite semiclassical, que es gobernado por el régimen de k grande, la versión euclídea del fondo es descripta por las siguientes configuraciones de la métrica $G_{\mu\nu}$ y del dilatón Φ :

$$ds^2 = k (dr^2 + \tanh^2 r dX^2), \quad \Phi(r) = \Phi_0 - 2 \log(\cosh r). \quad (2.147)$$

Es bien conocido el hecho de que la geometría del agujero negro euclídeo es la de la superficie de un cigarro semi-infinito embebido en un espacio plano en tres

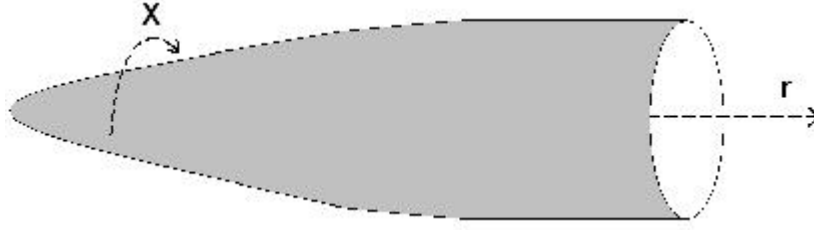


Figura 1: Geometría del agujero negro euclídeo.

dimensiones, que asintóticamente se parece a un cilindro (Ver Fig. 1). La coordenada angular de ese cilindro es X . La coordenada r es aquella que va a lo largo del cilindro, yendo desde $r = 0$ (la punta del cigarro, donde la teoría de cuerdas está fuertemente acoplada) hasta $r = \infty$ (donde el acoplamiento de la cuerda $e^{\Phi(r)}$ tiende a cero). Para obtener una idea semiclásica de esta geometría, consideremos el régimen de k grande, redefinamos la coordenada radial como $\cosh^2 r = M^{-1}e^{\sqrt{2/k}\varphi}$ y reescalemos la coordenada angular X por un factor $\sqrt{2/k}$, entonces la métrica es

$$ds^2 = 2 \left(1 + Me^{-\sqrt{2/k}\varphi}\right) d\varphi^2 + 2 \left(1 - Me^{-\sqrt{2/k}\varphi}\right) dX^2, \quad (2.148)$$

que asintóticamente parece un cilindro de radio $R = \sqrt{k/2}$. El parámetro M está relacionado con la masa del agujero negro, y puede ser fijada a cualquier valor positivo trasladando φ . Considerar correcciones finitas de k lleva a un corrimiento en k y luego la métrica y el dilatón resultan corregidos. En ese caso, el dilatón es

$$\Phi(\varphi) = \Phi_0 - \log M + \sqrt{2}\widehat{Q}\varphi, \quad \widehat{Q} = (k-2)^{-1/2}.$$

Por lo tanto, la teoría de cuerdas en el agujero negro euclídeo 2D puede ser semiclásicamente descrita por una deformación de la teoría del dilatón lineal

$$S_0 = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial X \bar{\partial} X + \partial \varphi \bar{\partial} \varphi - \frac{1}{2\sqrt{2}} \widehat{Q} R \varphi \right); \quad (2.149)$$

y, de acuerdo a (2.148) y teniendo en cuenta las correcciones de k finito, esta deformación corresponde a perturbar la acción (2.149) con un operador del tipo gravitón [22]

$$\mathcal{O} = M \partial X \bar{\partial} X e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}\varphi}; \quad (2.150)$$

esto es correcto a menos de un operador trivial en BRST⁹ de la forma

$$\delta \mathcal{O} \sim \partial \varphi \bar{\partial} \varphi e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}\varphi}. \quad (2.151)$$

⁹Es decir, que es puro calible en la cohomología BRST.

En estos términos, la teoría puede ser en principio soluble (ej. sus funciones de correlación calculables) utilizando las técnicas de campos libres, dando así correladores libres del tipo Coulombiano

$$\langle \varphi(z_1)\varphi(z_2) \rangle = \langle X(z_1)X(z_2) \rangle = -2 \log |z_1 - z_2|. \quad (2.152)$$

El operador (2.150) es usualmente llamado “operador de masa del agujero negro”, y es de hecho un operador normalizable; uno podría preguntarse si su inserción está permitida ya que crearía deformaciones no-locales en la hoja de mundo. Las perturbaciones consideradas en Ref. [6] exhiben características similares. La inclusión del operador (2.150) en la acción tiene que ser pensada como válida en un contexto semiclásico, por ejemplo, en el sentido de que puede demostrarse que es equivalente a la representación en campos libres del modelo de WZW.

Por lo tanto, en la región donde φ es grande (donde la teoría está débilmente acoplada) tenemos que el modelo sigma que describe a la cuerda en el agujero negro 2D coincide con la acción

$$S_0 + \frac{1}{4\pi} \int d^2z \mathcal{O}. \quad (2.153)$$

Lo sorprendente es que existe una forma de ver que el operador (2.150) describe al modelo sigma del agujero negro dilatónico más allá de la aproximación semiclásica. Para hacer esto, es necesario argumentar que esa acción describe sin ambigüedades la teoría completa más allá del límite débil, por ejemplo, que reproduce las funciones de correlación exactas. Esto parece difícil de probar; sin embargo, existe una forma elegante de mostrar que la perturbación (2.150) corresponde a la teoría en el fondo del agujero negro. Esta se apoya en la descripción algebraica de la teoría de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1) \times \mathbb{R}$ y es bastante directa: La clave está en que se puede mostrar que la acción (2.153), una vez suplementada con el operador trivial en BRST $\delta\mathcal{O}$ y un bosón tipo temporal libre

$$-\frac{1}{4\pi} \int d^2z \partial T \bar{\partial} T, \quad (2.154)$$

esta relacionada con la realización de campos libres de la acción del modelo de WZW en el grupo $SL(2, \mathbb{R})_k$ a través de una rotación del grupo $SO(2, 1)$ dada por

$$T = i\sqrt{\frac{2}{k}}u - i\sqrt{\frac{k-2}{k}}\phi, \quad X = -\sqrt{\frac{k}{2}}v + i\frac{k-2}{\sqrt{2k}}u + i\sqrt{\frac{k-2}{k}}\phi, \\ \varphi = \sqrt{\frac{k-2}{2}}(u + iv) + \phi, \quad (2.155)$$

y la bosonización standard [67]

$$\gamma = e^{u+iv}, \beta = i\partial v e^{-u-iv}, \quad (2.156)$$

con

$$\langle \beta(z_1)\gamma(z_2) \rangle \sim (z_1 - z_2)^{-1}, \quad \text{y} \quad \langle \phi(z_1)\phi(z_2) \rangle = -2 \log |z_1 - z_2|. \quad (2.157)$$

De hecho, esto lleva a la descripción de campos libres de Wakimoto del álgebra de corrientes de $SL(2, \mathbb{R})_k$ en términos del dilatón lineal ϕ y el sistema β, γ de fantasmas [68]. En estas variables, uno identifica la teoría como el modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})$ con los elementos del grupo escritos en la parametrización de Gauss. Por ende, la teoría en el coset $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$ se obtiene simplemente substrayendo la dirección temporal T que realiza la corriente $U(1)$ ¹⁰

$$J^3 = \beta\gamma + \sqrt{\frac{k-2}{2}}\partial\phi = i\sqrt{\frac{k}{2}}\partial T; \quad (2.158)$$

recordemos que esta es una dirección temporal, por lo que su correlador cambia de signo y resulta ser

$$\langle T(z_1)T(z_2) \rangle = +2 \log |z_1 - z_2|. \quad (2.159)$$

Por otra parte, vale la pena mencionar que la teoría dual (i.e. la teoría de Sine-Liouville) también se define como una perturbación de (2.149); ver (3.5) más abajo. Concordantemente, es posible pensar a la dualidad FZZ como una relación entre diferentes deformaciones marginales del mismo fondo de dilatón lineal. Esta fue la filosofía adoptada en [6], donde la correspondencia fue estudiada desde una perspectiva generalizada, considerándola como un ejemplo de un conjunto de conexiones existente entre las distintas deformaciones marginales de (2.149). En este trabajo, discutiremos una correspondencia similar. Consideraremos perturbaciones que poseen modos de momento $n = 2$ del potencial taquiónico y discutiremos como describe correctamente las funciones de correlación del modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1) \times \mathbb{R}$. Además estudiaremos la relación entre esta perturbación con $n = 2$ y la dualidad estándar de FZZ, que involucra modos con $n = 1$.

2.3.2. Espectro de la cuerda en el agujero negro 2D y su relación con las cuerdas en AdS_3

El espectro de la teoría de cuerdas en el fondo del agujero negro 2D corresponde a un cierto sector del espacio de Hilbert del modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$, y por lo tanto está descrito en término de ciertas representaciones de $SL(2, \mathbb{R})_k \otimes \overline{SL}(2, \mathbb{R})_k$. Los estados de las cuerdas están descritos por los vectores $|\Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega\rangle$ que están asociados a operadores de vértice $\Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega$, donde j , m , y \bar{m} son índices que etiquetan los estados de las representaciones del grupo. Para poder definir la teoría de cuerdas, es necesario identificar cual es el subconjunto de representaciones que

¹⁰Alternativamente, podría agregarse un bosón adicional, análogo a X , de manera de realizar el calibrado, ver [24, 25].

debe ser tenido en cuenta. Ese subconjunto debe satisfacer ciertos requisitos ¹¹. En el caso de la teoría libre, estos requisitos están asociados a la normalizabilidad y unitariedad de los estados de las cuerdas. Al nivel de la teoría de interacciones, se le pide propiedades adicionales como la clausura de las reglas de fusión y las propiedades de factorización de las funciones de N puntos, etc.

El modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$ está detrás de la descripción de la teoría de cuerdas tanto en el fondo del agujero negro 2D (a través de la construcción del coset) como en el espacio AdS_3 . De hecho, estos dos modelos están íntimamente relacionados, pero son diferentes. En el caso del agujero negro, los estados del espectro están etiquetados por el índice j de las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})$, con los índices m y \bar{m} dentro de la red

$$m - \bar{m} = n, \quad m + \bar{m} = -k\omega \quad (2.160)$$

con n y ω números enteros, y el peso conforme del operador de vértice dado por

$$(h, \bar{h}) = \left(-\frac{j(j+1)}{k-2} + \frac{m^2}{k}, -\frac{j(j+1)}{k-2} + \frac{\bar{m}^2}{k} \right). \quad (2.161)$$

Por otra parte, la teoría de cuerdas en el espacio AdS_3 puede ser descrita en términos del modelo de WZW en el producto entre el coset $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$ y un bosón libre del tipo temporal [69], para que la hoja de mundo esté formulada en un fondo que resulte del producto entre el tiempo y el agujero negro euclideo. Esto se logra agregando una contribución ¹² $\frac{1}{4\pi} \int d^2z \partial T \bar{\partial} T$ a la acción (2.149), y agregándole a los operadores de vértice un factor

$$e^{i\sqrt{\frac{2}{k}}(m+\frac{k}{2}\omega)T}, \quad (2.162)$$

que lleva la carga de la corriente asociada a la dirección T . En ese caso, los operadores de vértice en AdS_3 tienen dimensión conforme dada por

$$(h, \bar{h}) = \left(-\frac{j(j+1)}{k-2} - m\omega - \frac{k}{4}\omega^2, -\frac{j(j+1)}{k-2} - \bar{m}\omega - \frac{k}{4}\omega^2 \right) \quad (2.163)$$

que corresponde a agregar al peso conforme la contribución

$$(\delta h, \delta \bar{h}) = \left(-\frac{(m+k\omega/2)^2}{k}, -\frac{(\bar{m}+k\omega/2)^2}{k} \right) \quad (2.164)$$

de la parte del tipo temporal de la construcción del coset. En algún sentido la teoría de cuerdas en el agujero negro 2D se puede pensar como la teoría en AdS_3 pero

¹¹Para ver una discusión interesante de teorías de campos conformes no compactas consultar [49]

¹² Por otra parte, uno puede describir la teoría de cuerdas en el espacio AdS_3 en término de la realización de las variables de campos libres de Wakimoto mencionada arriba. En términos de estos campos la métrica de AdS_3 es $ds^2 = k(d\phi^2 + e^{2\phi}d\gamma d\bar{\gamma})$.

teniendo restringida la energía de “bulk” (bulto) a cero: $m + \bar{m} + k\omega = 0$. Por lo tanto, tenemos la teoría de cuerdas en el fondo $time \times SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$ como una realización adecuada de la teoría en el espacio AdS_3 [71, 74, 73, 75]. Sin embargo, existen algunos obstáculos que hay que superar antes de profundizar en la interpretación del modelo de WZW. Aun en el caso de la teoría libre, considerar fondos lorentzianos curvados no compactos es algo para nada trivial. Al construir el espacio de estados, el principal obstáculo con el que uno se encuentra es el hecho de que, a diferencia de lo que ocurre en el espacio plano, en espacios curvos, las restricciones de Virasoro no son suficientes para desacoplar los estados de norma negativa. En los primeros intentos por construir el espacio de estados de una teoría consistente en AdS_3 , se agregaron algunas restricciones *ad hoc* adicionales a los vectores de las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})_k$ de manera de desacoplar los fantasmas. Los vectores de las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})$ están etiquetados con un par de índices j y m , y aquellas restricciones adicionales (requeridas como condiciones suficientes para la unitariedad) implicaban un límite superior para el índice j de algunas representaciones, y consecuentemente un límite superior poco natural para el espectro de masa. El enfoque moderno al problema de los estados de norma negativa, también incluye restricciones de ese tipo, aunque en este caso, eso no implica poner cotas en el espectro de masa como sucedía en el enfoque antiguo [71]. La cota superior para el índice j de las representaciones discretas, usualmente llamado “cota unitaria”, es $1 - k < 2j < -1$. En el caso de AdS_3 euclídeo, el espectro de la teoría de cuerdas está dado por las series continuas de $SL(2, \mathbb{C})$, parametrizada por los valores $j = -\frac{1}{2} + i\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y con m real. El caso de AdS_3 lorentziano es aun más rico y su espectro está compuesto tanto por una serie continua $\mathcal{C}_\lambda^{\alpha, \omega}$ como por una discreta $\mathcal{D}_j^{\omega, \pm}$. La serie continua $\mathcal{C}_\lambda^{\alpha, \omega}$ tiene estados con $j = -\frac{1}{2} + i\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $m - \alpha \in \mathbb{Z}$, con $\alpha \in [0, 1) \in \mathbb{R}$ (como en $SL(2, \mathbb{C})$). Por el otro lado, las representaciones discretas $\mathcal{D}_j^{\pm, \omega}$ satisfacen que $j = \pm m - n$ con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Otro ingrediente importante en la construcción del espacio de Hilbert es el índice ω que etiqueta a los operadores $\Phi_{j, m, \bar{m}}^\omega$. A diferencia de lo que sucede en AdS_3 , en el fondo del agujero negro resulta que ω está dado por (2.160). En AdS_3 el número cuántico ω es independiente de la energía cinética del bulk $m + \bar{m}$ y del momento angular del bulk $m - \bar{m}$, contribuyendo a la energía total como $m + \bar{m} + k\omega$. Por lo tanto, la pregunta que surge es cómo aparece el índice ω en el espacio de Hilbert de la teoría de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$. La respuesta a esto es que, para parametrizar completamente el espectro en el espacio AdS_3 tenemos que introducir operadores “flujados” \tilde{J}_n^a (con $a = 3, -, +$), que están definidos a través del automorfismo de flujo espectral [71]

$$J_n^3 \rightarrow \tilde{J}_n^3 = J_n^3 - \frac{k}{2}\omega\delta_{n,0}, \quad J_n^\pm \rightarrow \tilde{J}_n^\pm = J_{n\pm\omega}^\pm \quad (2.165)$$

que actúa sobre los generadores (J_n^a) originales de $sl(\hat{2})_k$, que satisfacen el producto

de Lie que define el álgebra afín

$$[J_n^-, J_m^+] = -2J_{n+m}^3 + nk\delta_{n,-m}, \quad [J_n^3, J_m^\pm] = \pm J_{n+m}^\pm, \quad [J_n^3, J_m^3] = -n\frac{k}{2}\delta_{n,-m}. \quad (2.166)$$

Luego, los estados $|\Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega\rangle$ pertenecientes a las representaciones discretas $\mathcal{D}_j^{\pm,\omega}$ son aquéllos que obedecen¹³

$$\tilde{J}_0^\pm |\Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega\rangle = (\pm j - m) |\Phi_{j,m\pm 1,\bar{m}}^\omega\rangle, \quad \tilde{J}_0^3 |\Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega\rangle = m |\Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega\rangle \quad (2.167)$$

y son aniquilados por los modos positivos

$$\tilde{J}_n^a |\Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (2.168)$$

Los estados con $m = \pm j$ representan a los estados de peso máximo (respectivamente peso mínimo), mientras que los estados primarios de las representaciones continuas $\mathcal{C}_\lambda^{\alpha,\omega}$ son aniquilados por todos los modos positivos. Por otra parte, los estados excitados en el espectro están definidos actuando con los modos negativos J_{-n}^a ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) en los primarios de Kac-Moody $|\Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega\rangle$; estos modos negativos juegan el papel de operadores de creación al crear excitaciones de la cuerda. Los “estados flujados” (es decir, aquéllos que son vectores primarios con respecto a \tilde{J}_n^a definidos con $|\omega| > 1$) no son primarios con respecto al álgebra $sl(\hat{2})_k$ generada por J_n^a , y esto es claro de (2.165). Sin embargo, los estados de peso máximo de la serie $\mathcal{D}_j^{+,\omega}$ se identifican con los estados de peso mínimo de $\mathcal{D}_{-k/2-j}^{-,\omega}$, lo que significa que el flujo espectral es cerrado en un cierto subconjunto de los primarios de Kac-Moody.

Los estados pertenecientes a las representaciones discretas tienen un espectro de energía discreto y representan la versión cuántica de aquellas cuerdas que están confinadas en el centro del espacio AdS_3 ; a estos se los llama “cuerdas cortas” y son la contraparte (respecto al agujero negro) de los estados que se encuentran confinados cerca de la punta del cigarro. Por otro lado, los estados en las representaciones continuas describen “cuerdas largas” masivas que pueden escapar al infinito donde la teoría está débilmente acoplada. En el caso del agujero negro 2D, el índice ω tiene una clara interpretación como la de ser un grado de libertad “asintóticamente topológico” (aunque realmente no es topológico). Dado que el agujero negro euclídeo tiene la geometría de un cigarro semi-infinito y que muy lejos de la punta, parece un cilindro, los estados de esa región asintótica poseen un número de enrollamiento alrededor de ese cilindro. Sin embargo, este no es estrictamente un cilindro sino que tiene la topología de \mathbb{R}^2 en vez de $\mathbb{R} \times S^1$, por lo que, como sucede en AdS_3 , la conservación del número de enrollamiento puede ser violada en principio. Por supuesto, el que sea posible violar ω no es evidente en vistas del fondo (2.149)-(2.150), que es confiable solamente lejos de la punta del cigarro, pero el fenómeno puede ocurrir cuando ocurren las interacciones. En cambio, la violación del número

¹³ O relaciones análogas para las representaciones reflejadas de Weyl, es decir con $j \rightarrow -1 - j$.

de Winding en la teoría de Sine-Liouville se entiende claramente, y esta es debido a la dependencia explícita de su acción con la dirección T-dual \tilde{X} . Volveremos sobre esto luego. Ahora discutiremos sobre las interacciones en el agujero negro.

2.3.3. Amplitudes de dispersión de cuerdas y funciones de correlación en la teoría de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$

Las amplitudes de dispersión de las cuerdas en el fondo de agujero negro 2D están dadas por (la integración en los puntos de inserción de) funciones de correlación en la teoría de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$. El primer cálculo exacto de funciones de correlación de dos y tres puntos en esta teoría de WZW fue hecho por K. Becker y M. Becker en [23, 25], y fue subsecuentemente extendida y estudiada en detalle por J. Teschner en [78]-[80]. Los procesos de interacción de los estados de cuerdas enrolladas fueron estudiados en [72, 73], luego de que J. Maldacena y H. Ooguri propusieran la inclusión de los estados con flujo espectral en el espectro de la teoría [71]. Aun más, varios formalismos fueron empleados para estudiar los correladores en esta teoría no compacta [84]-[92]. Una de las herramientas más fructíferas para trabajar la forma funcional de estos correladores fue usando la analogía que existe entre estos y los de la teoría de Liouville [83, 52, 82, 84]. Otro tratamiento útil para calcular funciones de correlación exactas fue el uso de la representación en campos libres [23, 25, 89, 90, 73, 74, 75], que para el modelo de WZW resulta ser muy similar a lo que ya discutimos en detalle con la teoría de Liouville. Para ser concisos, describamos brevemente como es la mecánica de este tipo de cálculo con “campos libres” en el caso de la función de dos puntos: Consideremos las funciones de correlación de operadores exponenciales de la forma

$$\Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega = e^{\sqrt{\frac{2}{k-2}}\hat{j}\varphi - i\sqrt{\frac{2}{k}}mX - i\sqrt{\frac{2}{k}}(m+\frac{k}{2}\omega)T} \quad (2.169)$$

(con $\hat{j} = -1 - j$) en la teoría (2.149) perturbada por el operador (2.150), es decir

$$\mathcal{O} = M \left(\sqrt{\frac{k-2}{2}}\partial\varphi + i\sqrt{\frac{k}{2}}\partial X \right) \left(\sqrt{\frac{k-2}{2}}\bar{\partial}\varphi + i\sqrt{\frac{k}{2}}\bar{\partial}X \right) e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}\varphi} = M \beta\bar{\beta}e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}\phi}. \quad (2.170)$$

Luego, escrito en términos de los campos libres de Wakimoto¹⁴ ϕ , γ , y β , la función de dos puntos es¹⁵

$$\langle \Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega(z_1)\Phi_{j,-m,-\bar{m}}^{-\omega}(z_2) \rangle_{WZW} = \Gamma(-s)\delta(s+2j+1) \prod_{r=2}^s \int d^2\omega_r \langle \gamma^{-1-j-m}(z_1)\bar{\gamma}^{-1-j-\bar{m}}(z_1) \times$$

¹⁴ No confundir el campo libre de Wakimoto que notamos (y así se lo suele notar en la literatura) $\gamma = \gamma(z)$ con la función γ de Euler que introducimos en (2.130) (que se define como $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$). Hablamos del campo γ en (2.171) y de la función γ en (2.172).

¹⁵ Para comparar con el cálculo original que se puede encontrar en [23] es necesario considerar la reflexión de Weyl $j \rightarrow -1 - j$, que es una simetría de la fórmula de la dimensión conforme.

$$\begin{aligned} & \times \gamma^{-1-j+m}(z_2) \bar{\gamma}^{-1-j+\bar{m}}(z_2) \beta(w_1) \bar{\beta}(w_1) \prod_{r=2}^s \beta(w_r) \bar{\beta}(w_r) \rangle \times \\ & \times \left\langle e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}(j+1)\phi(z_1)} e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}(j+1)\phi(z_2)} e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}\phi(w_1)} \prod_{r=2}^s e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}\phi(w_r)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.171)$$

habiendo tomado el operador de apantallamiento insertado en w_1 como fijo en infinito, mientras que $z_1 = 0$ y $z_2=1$ (esto es análogo a lo que hicimos cuando calculamos la función de partición de la teoría de Liouville). Es fácil ver que esto puede ser resuelto usando las integrales de Dotsenko-Fateev (una extensión analítica de estas), y uno termina encontrando que ¹⁶

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega(0) \Phi_{j,-m,-\bar{m}}^{-\omega}(1) \rangle_{WZW} &= -\frac{\Gamma(-j-m)\Gamma(-j+m)}{\Gamma(j+1+\bar{m})\Gamma(j+1-\bar{m})} \times . \\ & \times \left(-\pi M \gamma \left(\frac{1}{k-2} \right) \right)^{-1-2j} \frac{\gamma(2j+2)}{k-2} \gamma \left(\frac{2j+1}{k-2} \right), \end{aligned} \quad (2.172)$$

donde las funciones Γ , que dependen de m , provienen del problema combinatorio de contar las diferentes formas de contraer los campos γ con los campos β en (2.171). La expresión (2.172) es el llamado “coeficiente de reflexión $\mathcal{R}_k(j, m)$ del modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$ ” y corresponde al resultado exacto para la función de dos puntos. Observemos que (2.172) contiene el factor $\gamma\left(\frac{2j+1}{k-2}\right)$ que da cuenta de los efectos de k finito. Análogamente, la expresión para la función de tres puntos

$$\langle \Phi_{j_1, m_1, \bar{m}_1}^{\omega_1}(z_1) \Phi_{j_2, m_2, \bar{m}_2}^{\omega_2}(z_2) \Phi_{j_3, m_3, \bar{m}_3}^{\omega_3}(z_3) \rangle_{WZW}, \quad (2.173)$$

puede ser encontrada usando el mismo método [25]. Aun más, algunas características de las funciones de cuatro puntos, como la interpretación física de sus divergencias [72], y las simetrías de cruce [52], fueron estudiadas en los últimos seis años, y el entendimiento de las funciones de correlación, tanto en el agujero negro 2D, como en el espacio AdS_3 , creció substancialmente recientemente. Sin embargo, algunas cosas son todavía preguntas abiertas, como por ejemplo, las propiedades de factorización de la función de cuatro puntos y la clausura de la expansión en producto de operadores de los estados unitarios. La respuesta a estas preguntas requerirá un entendimiento más profundo de la estructura analítica de la función de cuatro puntos. La expresión general de la función de N puntos para $N > 3$ no se conoce; sin embargo, nuevos pasos se han dado recientemente en el entendimiento de su forma funcional debido al descubrimiento de una nueva relación entre estos y sus análogos de la teoría de Liouville [48, 3, 4]. Esta relación entre el modelo de WZW y la teoría de Liouville es un punto clave en lo que estudiaremos más adelante. A continuación la detallamos.

¹⁶ Comparar con la fórmula (49) en [73], luego de hacer la reflexión de Weyl.

2.4. Conexión entre las funciones de Correlación de WZW y Liouville

Existe una conexión particular entre las funciones de correlación de las dos teorías de campos conformes que estudiamos hasta ahora; es decir, entre las funciones de correlación de la teoría de Liouville y la teoría de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$. Esta relación, es un resultado recientemente obtenido por S. Ribault y J. Teschner, que encontraron una forma directa de conectar los correladores de ambas teorías [3, 4]. La fórmula que probaron, es una versión mejorada de un resultado previo obtenido por A. Stoyanovsky algunos años antes [48]. La fórmula de Ribault-Teschner (cuya forma más general fue presentada por Ribault en [4]) conecta las funciones de N puntos a nivel árbol de la teoría de cuerdas en AdS_3 euclídeo con cierto subconjunto de funciones de $N + M$ puntos en la teoría de Liouville, donde la relación entre N y M resulta estar determinada por el número de enrollamiento de las cuerdas interactuantes. Aunque esta fórmula fue probada para el caso del espacio tiempo euclídeo, es muy probable que una extensión analítica de la misma sea válida en el modelo lorentziano. La fórmula de Ribault-Teschner es la siguiente: Si $\Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega$ representa a los operadores de vértice en el modelo de WZW, y V_α representa a los operadores de vértice de la teoría de Liouville, entonces resulta que

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^N \Phi_{j_i, m_i, \bar{m}_i}(z_i) \right\rangle_{WZW} &= N_k(j_1, \dots, j_N; m_1, \dots, m_N) \prod_{r=1}^M \int d^2 w_r F_k(z_1, \dots, z_N; w_1, \dots, w_M) \times \\ &\times \left\langle \prod_{t=1}^N V_{\alpha_t}(z_t) \prod_{r=1}^M V_{-\frac{1}{2b}}(w_r) \right\rangle_{S_L[\mu]} , \end{aligned} \quad (2.174)$$

con el factor de normalización dado por

$$N_k(j_1, \dots, j_N; m_1, \dots, m_N) = \frac{2\pi^{3-2N} b}{M! c_k^{M+2}} (\pi^2 \mu b^{-2})^{-s} \prod_{i=1}^N \frac{c_k \Gamma(-m_i - j_i)}{\Gamma(1 + j_i + \bar{m}_i)} \quad (2.175)$$

y la función dependiente de z dada por

$$\begin{aligned} F_k(z_1, \dots, z_N; w_1, \dots, w_M) &= \frac{\prod_{1 \leq r < l \leq N} |z_r - z_l|^{k-2(m_r+m_l+\omega_r\omega_l k/2+\omega_l m_r+\omega_r m_l)}}{\prod_{1 < r < l \leq M} |w_r - w_l|^{-k} \prod_{t=1}^N \prod_{r=1}^M |w_r - z_t|^{k-2m_t}} \times \\ &\times \frac{\prod_{1 \leq r < l \leq N} (\bar{z}_r - \bar{z}_l)^{m_r+m_l-\bar{m}_r-\bar{m}_l+\omega_l(m_r-\bar{m}_r)+\omega_r(m_l-\bar{m}_l)}}{\prod_{1 < r < l \leq M} (\bar{w}_r - \bar{z}_t)^{m_t-\bar{m}_t}} , \end{aligned} \quad (2.176)$$

y donde el parámetro b de la teoría de Liouville está relacionado con el nivel k de Kac-Moody a través de $b^{-2} = k - 2$, mientras que los números cuánticos de ambos modelos conformes se relacionan a través de la sencilla relación

$$\alpha_i = b j_i + b + b^{-1}/2 , \text{ con } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.177)$$

c_k es un factor de normalización que depende de k pero no de j ; ver [4]. Las siguientes restricciones también aplican:

$$m_1 + \dots m_N = \bar{m}_1 + \dots \bar{m}_N = \frac{k}{2}(N - M - 2),$$

$$\omega_1 + \dots + \omega_N = M + 2 - N, \quad \text{y} \quad s = -b^{-1}(\alpha_1 + \dots \alpha_N) + b^{-2} \frac{M}{2} + 1 + b^{-2}, \quad (2.178)$$

donde s se refiere a la cantidad de operadores de apantallamiento $V_b = \mu e^{\sqrt{2}b\varphi}$ que hay que incluir en los correladores de Liouville de manera de no obtener un resultado no nulo, *c.f.* (2.109). Observemos que el correlador de Liouville en el lado derecho de (2.174) contiene M campos degenerados $V_{-1/2b}$ (*i.e.* estados que contienen descendientes nulos en el módulo), que tienen dimensión conforme estrictamente menor a cero para b positivo. Las aplicaciones de (2.174) fueron discutidas en [93, 94, 33, 31], y sus generalizaciones ulteriores fueron presentadas en [95, 96]. La forma de demostrar (2.174) fue haciendo uso de la relación existente entre las soluciones de las ecuaciones diferenciales BPZ (satisfechas por los correladores involucrados en (4.32), [76]) y la ecuación diferencial KZ generalizada (satisfecha por los correladores de WZW [77, 4]). Este recurso ingenioso permitió demostrar el mapa entre los correladores de ambas teorías, sin necesidad de conocer la forma genérica de estos observables en ambas teorías.

El diccionario expresado en la fórmula (2.174) jugará un papel crucial al querer probar la correspondencia entre el agujero negro 2D y el fondo plano taquiónico en el que estamos interesados. Al mismo tiempo, nuestro resultado puede ser visto como una mera realización de campos libres de la fórmula de Ribault-Teschner (2.174). De hecho, en la sección 4 describiremos como (2.174) puede ser pensado como una identidad entre la teoría de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$ y una teoría de campos conforme de la forma $Liouville \times U(1) \times \mathbb{R}$, para la cual la dependencia en $U(1)$ de los correladores se factoriza dando la función $F_k(z_1, \dots, z_N; w_1, \dots, w_M)$ en (2.176). En esta realización, los operadores $V_{-1/2b}$ pueden ser vistos como M corrientes de apantallamiento adicionales. Los detalles de esto pueden ser encontrados en la subsección 4.3; primero discutiremos la ya varias veces mencionada dualidad FZZ.

3. La teoría dual FZZ para el agujero negro 2D

En esta sección, estudiaremos el dual FZZ para el agujero negro bidimensional; esto es, la teoría de sine-Liouville. Comenzaremos discutiendo cómo esta es un ejemplo de un fondo taquiónico para la teoría de cuerdas en dos dimensiones.

3.1. Fondos de tipo taquiónico en la teoría de cuerdas 2D

Consideremos un modelo sigma no lineal en un espacio tiempo curvo con métrica $G_{\mu\nu}$, y en presencia de fondos tanto dilatónicos Φ como taquiónicos \mathcal{T} ¹⁷. Si agregamos a la acción de la hoja de mundo (2.145) un término taquiónico, el modelo sigma toma la forma

$$S_P = \frac{1}{4\pi} \int d^2z (G_{\mu\nu}(X) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + R\Phi(X) + \mathcal{T}(X)), \quad (3.1)$$

donde, como antes, $\mu, \nu = \{1, 2\}$; y donde ahora adoptamos la convención de que $X^1 \equiv X$ y $X^2 \equiv \varphi$ representando las dos coordenadas que parametrizan el espacio tiempo. Estos campos taquiónicos, dilatónicos y gravitatorios, no son completamente arbitrarios. La invarianza conforme a nivel cuántico requiere que se anulen las funciones β para la acción (3.1); y para el campo taquiónico, la función beta linealizada a un lazo (inglés: “loop”) es [11]

$$\beta^{\mathcal{T}} = -\nabla_\mu \nabla^\mu \mathcal{T} + 2\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \mathcal{T} - 2\mathcal{T} = 0, \quad (3.2)$$

donde despreciamos potencias más grandes de \mathcal{T} . Esta ecuación, junto con las funciones β a un loop para la métrica y el dilatón, admiten soluciones de la forma

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \Phi(\varphi) = \frac{Q}{\sqrt{2}} \varphi, \quad \mathcal{T}(X, \varphi) = \sum_n \lambda_n e^{\sqrt{2}a_n \varphi + i\sqrt{2}b_n X}, \quad (3.3)$$

con $a_n(Q - a_n) + b_n^2 = 1$, $Q = 2$ ¹⁸. Aquí, los coeficientes λ_n son números reales que pueden ser pensados como los modos de Fourier del potencial taquiónico. Los momentos taquiónicos b_n se eligen de manera de ser consistentes con la condición de compactificación para la dirección X ; en particular, aquí consideraremos $b_n = n\sqrt{k}/2$ y el potencial será del tipo Toda

$$\mathcal{T}(X, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{\sqrt{2}(1 \pm \sqrt{k}|n|/2)\varphi + i\sqrt{k/2}nX}, \quad (3.4)$$

¹⁷ Como es sabido, en dos dimensiones la expresión “taquiónico” tiene que ser entendida sólo formalmente, ya que es el taquión es no masivo en $D = 2$; ver [101] para un ejemplo ilustrativo.

¹⁸ Mas adelante no fijaremos b (ni Q) a ningún valor particular para poder trabajar simultáneamente con el agujero negro 2D y el espacio AdS_3 .

ver (3.5) y (4.1) más abajo. De hecho, el fondo (3.3) es el tipo de configuración con el que trataremos. Un caso particular que es de interés es la teoría de Sine-Liouville, que discutiremos más abajo.

3.2. La teoría de Sine-Liouville y la conjetura de FZZ

3.2.1. La teoría de Sine-Liouville

Como ya dijimos, la teoría de Sine-Liouville es un caso particular de un fondo taquiónico, y de acuerdo a la conjetura FZZ, es dual a la teoría de cuerdas en el agujero negro 2D. La teoría de Sine-Liouville corresponde a perturbar la acción libre S_0 con el operador

$$\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}_{-1}=\tilde{\lambda}_{+1}=\lambda} = 4\lambda e^{-\sqrt{\frac{k-2}{2}}\varphi} \cos\left(\sqrt{k/2}\tilde{X}\right), \quad (3.5)$$

que es conveniente escribirlo como

$$\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}_{-1}=\tilde{\lambda}_{+1}=\lambda} = 2\lambda e^{-\sqrt{\frac{k-2}{2}}\varphi+i\sqrt{\frac{k}{2}}\tilde{X}} + 2\lambda e^{-\sqrt{\frac{k-2}{2}}\varphi-i\sqrt{\frac{k}{2}}\tilde{X}}, \quad (3.6)$$

donde $\tilde{X} = X_L(z) - X_R(\bar{z})$. El término de interacción (3.5) se asemeja tanto al de la teoría de Sine-Gordon como al de la teoría de Liouville, y de este hecho proviene el nombre ‘‘Sine-Liouville’’. De hecho, esta teoría de campos corresponde al modelo de sine-Gordon acoplado a la gravedad en dos dimensiones.

La interacción de sine-Liouville (3.5) puede ser pensada como un caso particular de la acción (1.1) si el campo X se reemplaza por su T-dual \tilde{X} . Correspondería al acoplamiento $\tilde{\lambda}_n = \lambda(\delta_{n+1} + \delta_{n-1})$. Esta teoría de campos describe una fase de condensación de vórtices en la teoría de cuerdas 2D. A diferencia de la geometría del agujero negro euclídeo, cuya topología es \mathbb{R}^2 , la teoría de sine-Liouville es una teoría de campos conformes interactuante en la topología $\mathbb{R} \times S^1$. Las distintas topologías surgen porque la dirección angular del cigarro (simplemente conexo) juega un papel crucial en la dualidad. Por otra parte, notemos que el término de interacción de sine-Liouville no está acotado por debajo, y esto está también relacionado en última instancia con la topología \mathbb{R}^2 del cigarro.

La teoría de Sine-Liouville y su relación con el agujero negro 2D han sido estudiados extensivamente en los últimos seis años, y, como ya mencionamos, esto ha llevado a la formulación del modelo de matriz para el agujero negro [38]. El modelo de matriz representó una herramienta muy importante para estudiar la física de los agujeros negro en la teoría de cuerdas; en particular, permitió tratar con la cuestión sobre la formación de los agujeros negros en la teoría de cuerdas [102]. La formulación del modelo de matriz también permitió el estudio de la integrabilidad de la teoría desde una perspectiva diferente ¹⁹, y todo esto fue posible gracias a la dualidad FZZ.

¹⁹El agujero negro resulta ser dual a la teoría con $c = 1$ perturbada, y, por otra parte, la teoría

3.2.2. La conjetura de Fateev-Zamolodchikov-Zamolodchikov (FZZ)

La dualidad FZZ es del tipo fuerte-débil. El límite semi-clásico de la teoría de sine-Liouville corresponde al límite $k \rightarrow 2$ en la teoría de cuerdas en el fondo del agujero negro 2D. En ese límite el agujero negro está fuertemente curvado. Recíprocamente, el límite semi-clásico de la teoría de cuerdas en el agujero negro 2D corresponde al régimen de k grande y en este límite, la función de onda de la teoría de Sine-Liouville está fuertemente suprimida en la dirección φ . Quizá, la forma correcta de pensar la dualidad FZZ es que la teoría completa es descrita por ambos modelos (WZW y sine-Liouville), y cada uno domina la dinámica de la teoría en un régimen diferente (donde la acción correspondiente es confiable como una buena aproximación). Más allá de todo esto, vale la pena notar, que ambas teorías tienen control sobre los observables más allá del régimen en el que uno inocentemente pensaría. Es decir, a pesar de que uno pensaría que la acción del modelo sigma del agujero negro describe la teoría solamente en el régimen de k grande, resulta que el cálculo de funciones de correlación con el método del gas de Coulomb usando operadores de apantallamiento de la forma $\sim e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}\varphi}$ reprodujo el resultado exacto incluyendo efectos de k finito²⁰ [23, 25, 73]. Por otra parte, la misma característica aparece al calcular funciones de correlación en la teoría de Liouville [99]. Esta característica sorprendente es debida a las extensiones analíticas de las expresiones del tipo gas de Coulomb, que es lo suficientemente poderosa como para reconstruir las expresiones exactas de los correladores. Este hecho es precisamente lo que permitió realizar pruebas de consistencia de las funciones de correlación. Las relaciones entre los polos perturbativos y los polos dependientes de k en las funciones de correlación de ambos modelos fue discutida inicialmente en [38], donde se mostró que los polos de las amplitudes de bulk en sine-Liouville reproducen precisamente polos no perturbativos (con efectos de k finito) de los correladores de WZW²¹.

La correspondencia fuerte-débil de FZZ resulta ser una herramienta muy importante para el entendimiento de la física de agujeros negros en la teoría de cuerdas. Por esto, discutamos brevemente como funciona operativamente esta correspondencia. Primero, presentamos los ingredientes principales: Los operadores de vértice de

con $c = 1$ perturbada por el potencial taquiónico resulta ser integrable con la estructura integrable descrita en términos de la jerarquía de Toda [38].

²⁰En la sección pasada dimos un ejemplo de esto al calcular con este metodo la función de dos puntos.

²¹ Sin embargo es importante enfatizar una vez más, que esos polos con efectos de k finito pueden ser obtenidos directamente considerando la acción perturbativa de la teoría de WZW [23]. Por ejemplo, en la Ref. [73] se demostró que el cálculo en el modelo de WZW con operadores de la forma $\sim e^{-\sqrt{2(k-2)}\varphi}$ coincidía exactamente con aquéllos originalmente calculados en [23], aun habiendo una dependencia en k opuesta a la que aparece en (2.150).

la teoría de Sine-Liouville que debemos considerar son los de la forma²²

$$\mathcal{T}_{j,m,\bar{m}} = e^{\sqrt{\frac{2}{k-2}}j\varphi + i\sqrt{\frac{2}{k}}mX_L}. \quad (3.7)$$

El espectro de la teoría contiene estados que obedecen

$$m - \bar{m} = k\omega \quad \text{y} \quad m + \bar{m} = n, \quad (3.8)$$

con n y ω enteros. Los operadores (3.7) tienen dimensión conforme

$$(h, \bar{h}) = \left(-\frac{j(j+1)}{k-2} + \frac{m^2}{k}, -\frac{j(j+1)}{k-2} + \frac{\bar{m}^2}{k} \right),$$

y la coincidencia con (2.161) muestra lo conveniente de la notación. Una observación crucial es el hecho de que la teoría de sine-Liouville tiene simetría bajo el álgebra afín $\widehat{sl}(2)_k$. Esto se puede notar con técnicas de campo libre definiendo [91]

$$J^\pm(z) = \left(-i\sqrt{\frac{k}{2}}\partial X \pm \sqrt{\frac{k-2}{2}}\partial\varphi \right) e^{\mp i\sqrt{\frac{2}{k}}(T+X)}, \quad J^3(z) = i\sqrt{\frac{k}{2}}\partial T. \quad (3.9)$$

Estas corrientes satisfacen el OPEs

$$J^3(z)J^\pm(w) = \pm \frac{1}{(z-w)} J^\pm(w) + \dots, \quad J^3(z)J^3(w) = -\frac{k/2}{(z-w)^2} + \dots,$$

$$J^-(z)J^+(w) = \frac{k}{(z-w)^2} - \frac{2}{(z-w)} J^3(w) + \dots, \quad (3.10)$$

y por lo tanto, realizan el álgebra (2.166) por medio de la relación

$$J_n^a = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{-1-n} J^a(z). \quad (3.11)$$

Es posible verificar que la interacción de sine-Liouville conmuta con estas corrientes, en el sentido de que los OPEs dan términos regulares. La existencia de esta simetría es una condición necesaria para comenzar a hablar de una equivalencia con el modelo de WZW. El paso siguiente es el de proponer un diccionario entre los observables de ambas teorías. De acuerdo a la prescripción FZZ, los operadores (3.7)

²²No estamos escribiendo la contribución antiholomorfa $e^{i\sqrt{2/k}\bar{m}X_R}$ por brevedad; deberá ser entendida en las fórmulas que siguen a continuación. Además, notemos que el vértice (3.7) recibirá una contribución extra de la forma $e^{i\sqrt{\frac{2}{k}}(m+k\omega/2)T + i\sqrt{\frac{2}{k}}(\bar{m}+k\omega/2)T}$ si consideráramos el producto entre la acción de sine-Liouville y una dirección temporal T .

están en una correspondencia uno a uno con aquellos operadores que desarrollan las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})_k$ en la teoría del coset, es decir

$$\mathcal{T}_{j,m,\bar{m}} \leftrightarrow \Phi_{j,m,\bar{m}}, \quad (3.12)$$

donde $\Phi_{j,m,\bar{m}}$ son los operadores de vértice de la teoría en el coset $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$, definidos a través de su relación con el vértice de $SL(2, \mathbb{R})_k$, es decir

$$\Phi_{j,m,\bar{m}}^\omega = \Phi_{j,m,\bar{m}} \times e^{i\sqrt{\frac{2}{k}}(m+\frac{k}{2}\omega)T}. \quad (3.13)$$

Luego, una vez que los operadores fueron introducidos, uno puede tomarse el trabajo de realizar verificaciones perturbativas de la dualidad. Para hacer esto, uno debería comparar la estructura analítica de las funciones de correlación en ambos modelos conformes; pero, primero, uno debería saber como calcular estas cantidades. Por lo tanto, revisemos un poco el cálculo de correladores en la teoría de sine-Liouville.

3.2.3. Las funciones de correlación en la teoría de sine-Liouville

Para que la dualidad sea correcta las funciones de correlación de la teoría de sine-Liouville deberían reproducir la estructura analítica de sus análogos de WZW. Los correladores de sine-Liouville pueden ser calculados utilizando técnicas estándar del gas de Coulomb, y la prescripción precisa fue estudiada en [98, 99]. Para el caso de $N \leq 3$ estos correladores fueron integrados explícitamente. En general, se espera que las amplitudes de N puntos de sine-Liouville exhiban polos en $s_- + s_+ = \frac{2}{k-2} \left(1 + \sum_{i=1}^N j_i\right)$, cuyos residuos resultan ser expresables en términos de integrales múltiples en todo el plano complejo. Estas son

$$\begin{aligned} A_{(j_1, \dots, j_N | z_1, \dots, z_N)}^{sine-L} &= \frac{\lambda^{\frac{2}{k-2}(j_1 + \dots + j_N + 1)}}{s_-! s_+!} \prod_{r=1}^{s_+} \int d^2 v_r \prod_{t=1}^{s_-} \int d^2 v_t \langle \mathcal{T}_{j_1, m_1, \bar{m}_1}(z_1) \mathcal{T}_{j_2, m_2, \bar{m}_2}(z_2) \dots \\ &\dots \mathcal{T}_{j_N, m_N, \bar{m}_N}(z_N) \prod_{r=1}^{s_+} \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, -\frac{k}{2}}(u_r) \prod_{t=1}^{s_-} \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}, \frac{k}{2}}(v_t) \rangle_{S_{[\lambda=0]}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

con $S_{[\lambda=0]} = S_0$, quedando así

$$\begin{aligned} A_{(j_1, \dots, j_N | z_1, \dots, z_N)}^{sine-L} &= \frac{\lambda^{\frac{2}{k-2}(j_1 + \dots + j_N + 1)}}{\Gamma(s_- + 1)\Gamma(s_+ + 1)} \prod_{a < b}^{N-1, N} |z_a - z_b|^{-\frac{4j_a j_b}{k-2}} (z_a - z_b)^{\frac{2}{k} m_a m_b} (\bar{z}_a - \bar{z}_b)^{\frac{2}{k} \bar{m}_a \bar{m}_b} \times \\ &\times \prod_{r=1}^{s_+} \int d^2 u_r \prod_{l=1}^{s_-} \int d^2 v_l \prod_{r < t}^{s_+ - 1, s_+} |u_r - u_t|^2 \prod_{l < t}^{s_- - 1, s_-} |v_t - v_s|^2 \prod_{l=1}^{s_-} \prod_{r=1}^{s_+} |v_l - u_r|^{2-2k} \times \end{aligned}$$

$$\times \prod_{a=1}^N \prod_{r=1}^{s_+} |z_a - u_r|^{2(j_a+m_a)} (\bar{z}_a - \bar{u}_r)^{m_a-\bar{m}_a} \prod_{b=1}^N \prod_{l=1}^{s_-} |z_b - v_l|^{2(j_b-m_b)} (\bar{z}_b - \bar{v}_l)^{m_b-\bar{m}_b}, \quad (3.15)$$

que proviene de realizar contracciones de Wick de los operadores $\mathcal{T}_{j,m,\bar{m}}$ y $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2},\pm\frac{k}{2},\mp\frac{k}{2}}$. Se puede ver, que los polos en las amplitudes de bulk de sine-Liouville aparecen a través de la integración en los modos zero del campo φ [70]. En el caso de $N = 3$ se demostró que la estructura de polos de (3.15) coincide con la de la teoría del agujero negro, para la cual los polos de los efectos de k finito representan efectos no perturbativos en la hoja de mundo. Esta coincidencia entre estructuras analíticas fue una de las evidencias más fuertes a favor de la conjetura FZZ a nivel perturbativo [38, 99, 75]. Hay importante información codificada detrás del hecho de que los correladores de sine-Liouville escalan como $\lambda^{\frac{2}{k-2}(j_1+j_2+\dots+j_N+1)}$ mientras que los correladores del agujero negro escalan como $M^{1+\hat{j}_1+\hat{j}_2+\dots+\hat{j}_N}$. En particular, nos dice algo acerca de como se comportan los correladores de sine-Liouville en el límite de k grande.

En la Ref. [99] los autores tradujeron las integrales $\prod_{r,l} \int d^2 u_r \int d^2 v_l$ que aparecen en (3.14) en un producto de integrales de contorno. De esta forma, la representación integral de arriba resulta descripta por técnicas estándar desarrolladas en el contexto de teorías de campos conformes racionales. Estas técnicas fueron utilizadas para evaluar los correladores para dar una fórmula para las integrales de contorno. El primer paso en el cálculo es el de descomponer la variable compleja u_r (y respectivamente la v_l) en dos parámetros reales independientes (*i.e* en parte real e imaginaria) que toman valores en la recta real. Luego, se realiza una rotación de Wick del parámetro imaginario de (u_r) de manera de introducir un parámetro ε para eludir los polos en z_a . Por último, los contornos se toman de manera de que los polos en $v_r \rightarrow z_a$ sean evitados al considerar el orden alternativo con respecto a los puntos de inserción. Una descripción detallada para la prescripción puede ser encontrada en la sección 3 de Ref. [99]; ver también Ref. [100].

3.2.4. Respecto a la violación de la conservación del número de enrollamiento

Volvamos un poco al tema de la violación de la conservación del número de enrollamiento. Desde el punto de vista de la teoría de campos de sine-Liouville, la violación del número de enrollamiento en (3.14) está dada por

$$\sum_{a=1}^{N=3} \omega_a = k^{-1} \sum_{a=1}^{N=3} (m_a - \bar{m}_a) = s_- - s_+, \quad (3.16)$$

y proviene de la inserción de una cantidad diferente de operadores de apantallamiento s_- y s_+ . Se puede probar que para las funciones de tres puntos, el enrollamiento

puede violar hasta $|\sum_{a=1}^{N=3} \omega_a| \leq N - 2 = 1$, y se presume que esto es lo mismo para cualquier N . El punto esencial para obtener esta restricción, es notar que el integrando que aparece cuando uno opera con la prescripción del gas de Coulomb contiene contribuciones de la forma

$$\int d^2v_r d^2v_t |v_r - v_t|^2 \dots \quad (3.17)$$

que provienen de los OPE's de dos operadores $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \pm\frac{k}{2}, \pm\frac{k}{2}}$ insertados en los puntos v_r y v_t para $0 \leq r, t \leq s_-$ (y lo mismo para los puntos u_l con $0 \leq l \leq s_+$), y donde los puntos “...” refieren a otras dependencias en v_r y u_l . Como se explicó en [99], la integral se anula para ciertos alineamientos de los contornos debido al hecho de que el exponente de $|v_r - v_t|$ sea $+2$. Por otra parte, en el caso en el que ese exponente es lo suficientemente arbitrario (por ejemplo 2ρ , siguiendo la notación de [99]), la integral tiene una ambigüedad de fase debido a que la expresión $|v_r - v_t|^{2\rho}$, que está en el integrando, es multi-evaluada. Luego, se anulan aquellas integrales que contienen dos contornos de v_r y v_t justo uno al lado del otro, y esto es lo que justamente sucede para todas las contribuciones de los correladores que satisfacen $|s_+ - s_-| = |\sum_{a=1}^N \omega_a| > N - 2$. Esto, llevó a Fukuda y Hosomichi a probar que, para la función de tres puntos, solamente hay tres términos que contribuyen: uno con $\sum_{a=1}^3 \omega_a = 1$, un segundo con $\sum_{a=1}^3 \omega_a = -1$, y el conservativo, $\sum_{a=1}^3 \omega_a = 0$. Algo similar ocurrirá con el modelo sine-Liouville “retorcido” que consideraremos en la próxima sección, ver [1].

Por otra parte, uno se podría preguntar sobre cómo es vista la violación de la conservación del número de enrollamiento desde el punto de vista de la teoría del agujero negro, donde, a diferencia de lo que sucede en la teoría de sine-Liouville, la acción no parecería romper la conservación del enrollamiento. A pesar de que las razones topológicas por las que la no conservación del enrollamiento son bastante claras en el cigarro, no es obvio cómo entender esta no conservación en los cálculos de correladores. La respuesta a esto fue dada por primera vez en Ref. [36], y subsecuentemente revisada en [72]. De hecho, el cálculo de correladores que violan el enrollamiento en la teoría de WZW está lejos de ser tan sencillo como en el caso de la teoría de sine-Liouville. En la teoría de WZW, este cálculo requiere la inserción de un operador adicional por cada unidad en la que el número de enrollamiento está siendo violado. Este operador adicional se lo suele llamar “operador de flujo espectral” $\Phi_{-\frac{k}{2}, \pm\frac{k}{2}, \pm\frac{k}{2}}^1$, y es un operador auxiliar que juega el papel de cambiar en una unidad el número de enrollamiento ω de un dado estado de $SL(2, \mathbb{R})$ involucrado en un correlador. El operador de flujo espectral corresponde a una representación conjugada del operador identidad, por lo que tiene dimensión conforme igual a cero. Por ejemplo, la amplitud de dispersión de tres puntos (que viola el enrollamiento en una unidad) en el agujero negro estaría dada en términos de un correlador de cuatro puntos involucrando a un cuarto operador de dimensión cero $\Phi_{-\frac{k}{2}, \pm\frac{k}{2}, \pm\frac{k}{2}}^1$, antes extrayendo un factor divergente proveniente del límite coincidente del operador de

flujo espectral y la evaluación en $m = \bar{m} = \pm k/2$; ver [72, 33] para más detalles.

Con respecto al cálculo de funciones de correlación que violan el número de enrollamiento, queremos remarcar que la forma más sencilla de calcular estos observables es haciendo uso del modelo dual “retorcido” que introduciremos en la próxima sección. Quizá esta sea la aplicación más útil que posee, y la comentaremos más tarde. Ahora, introduciremos el nuevo modelo dual para el agujero negro 2D, al cual llamaremos “modelo retorcido” pues involucra modos de momento del sector $n = 2$.

4. Un dual “retorcido” para el agujero negro 2D

Ahora, discutiremos un modelo dual alternativo para la descripción de la teoría de cuerdas en el agujero negro 2D (\times tiempo). En primer lugar, introduciremos una familia de perturbaciones del fondo de dilatón lineal (2.149) y, en particular, introduciremos la perturbación que corresponde a la versión retorcida del modelo de sine-Liouville que queremos relacionar con el modelo sigma del agujero negro. Luego de hacer esto, haremos la declaración precisa de la dualidad y mostraremos como se prueba usando la fórmula (2.174).

4.1. Perturbaciones de modos de momento y enrollamiento mayores

4.1.1. Perturbaciones de modos de momento

Para comenzar consideremos una deformación general de la teoría (2.149), que incluye modos de momento y enrollamiento mayores. El término de interacción en (1.1) está dado por el operador

$$\mathcal{O}_{\lambda_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{-\frac{\alpha_n}{\sqrt{2}}\varphi + in\sqrt{\frac{k}{2}}X}, \quad (4.1)$$

para el cual, se requiere la condición $\lambda_n = \lambda_{-n}$ para que sea real. Cada término en esta suma representa una deformación marginal de la teoría del dilatón lineal (2.149), y si se considera la dirección T-dual \tilde{X} en vez de X , entonces este operador describe la perturbación de la teoría de sine-Liouville para el caso particular $\tilde{\lambda}_{n=1} = \tilde{\lambda}_{n=-1} \neq 0$. El caso $n = 0$ también está incluido en la suma. En ese caso, el exponente está dado por $\alpha_{n=0} = \frac{1+\sqrt{9-4k}}{\sqrt{k-2}}$, por lo que es real (representa una “pared de potencial tipo Liouville”) solamente para $k \leq 9/4$. El valor que satura esta cota, $k = 9/4$, precisamente corresponde al fondo del agujero negro, *i.e.* para el cual la carga central del coset $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$ resulta ser 26. Cuando $k = 9/4$ el término de interacción para $n = 0$ resulta ser $e^{-\sqrt{2}\varphi}$, *i.e.* la constante cosmológica. Debemos remarcar que para $k = 9/4$ la interacción (4.1) coincide con la teoría de cuerdas en dos dimensiones en un fondo de enrollamiento arbitrario estudiada por V. Kazakov, I. Kostov y D.

Kutasov en la²³ Ref. [38]. Esto es, para $k = 9/4$ el operador (4.1) es²⁴

$$\mathcal{O}_{\lambda_n} = \lambda_0 \varphi e^{-\sqrt{2}\varphi} + \sum_{n \neq 0} \lambda_n e^{(|n|R - \sqrt{2})\varphi + inRX}. \quad (4.2)$$

con $R = \sqrt{k/2} = 3/2\sqrt{2}$. El modelo de matriz que incorpora estas perturbaciones se construye implementando una versión deformada de la medida de Haar en la variedad del grupo $U(N)$. Los detalles de la construcción del modelo de matriz pueden ser encontrados en [38]; aquí no discutiremos sobre el tema más allá del límite del continuo.

4.1.2. Agregando perturbaciones de vórtice

Es también interesante explorar otras deformaciones. Por ejemplo, consideremos la familia más general

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\lambda_n, \tilde{\lambda}_n} = & \sum_{n \neq 0} e^{-\frac{\alpha_n^{(-)}}{\sqrt{2}}\varphi} \left(\lambda_n^{(-)} e^{in\sqrt{\frac{k}{2}}X} + \tilde{\lambda}_n^{(-)} e^{in\sqrt{\frac{k}{2}}\tilde{X}} \right) + \\ & + \sum_{n \neq 0} e^{-\frac{\alpha_n^{(+)}}{\sqrt{2}}\varphi} \left(\lambda_n^{(+)} e^{in\sqrt{\frac{k}{2}}X} + \tilde{\lambda}_n^{(+)} e^{in\sqrt{\frac{k}{2}}\tilde{X}} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

con

$$\alpha_n^{(\pm)} = \widehat{Q}(1 \mp \sqrt{1 + (kn^2 - 4)(k - 2)}), \quad (4.4)$$

de manera de que (4.1) corresponde a la rama $\alpha_n^{(-)}$. En el agujero negro 2D, los acoplamientos λ_n encienden los modos de momento, mientras que $\tilde{\lambda}_n$ son los acoplamientos de los operadores vorticales que encienden los modos de enrollamiento. Observemos que la perturbación (4.3) no solamente incluye la interacción de sine-Liouville usual $\alpha_{\pm 1}^{(-)}$, sino que también incluye la interacción dual de sine-Liouville, introducida por A. Mukherjee, M. Mukhi and A. Pakman en [6] cuando los modos $\alpha_{\pm 1}^{(+)}$ son tenidos en consideración²⁵. Los operadores de las ramas $\alpha_n^{(\pm)}$ van como $\sim e^{\pm\sqrt{\frac{k}{2}}|n|\varphi}$ cuando k es grande, por lo que solamente aquéllos de la rama

²³ Ver fórmula (3.19) en [38] y observar que la notación allí se relaciona con la que estamos empleando a través de $\varphi = \sqrt{2}\phi$.

²⁴De hecho, la contribución $n = 0$ en el punto $k = 9/4$ lleva al operador $\varphi e^{-\sqrt{2}\varphi}$ en vez de $e^{-\sqrt{2}\varphi}$. Esto proviene del hecho de que hay dos posibles valores para $\alpha_{n=0} = (1 \pm \sqrt{9 - 4k})/\sqrt{k - 2}$ que coinciden (una resonancia) en el límite $k \rightarrow 9/4$ produciendo una degeneración análoga al caso del término de constante cosmológica de la teoría de Liouville en el límite $b \rightarrow 1$ [97]. También observemos la diferencia entre los signos del exponente de (3.4) y (4.2), que tienen que ver con el signo de la carga de fondo en cada caso.

²⁵ Observemos que la notación en [6] se relaciona con la nuestra a través de $\varphi = -\sqrt{2}\phi$.

$\alpha_n^{(-)}$ decrecen para φ grande (cuando la teoría está débilmente acoplada) en el límite semiclásico del agujero negro $k \rightarrow \infty$. Para nuestros propósitos, los operadores interesantes son aquellos que tienen momento $n = 2$. En particular, estamos interesados en el caso $\alpha_2^{(-)} = \frac{2}{\sqrt{k-2}}(k-1)$; este es el que nos va a permitir presentar una descripción dual alternativa al agujero negro 2D. Por conveniencia de la notación, queremos remarcar que los operadores con momento $\alpha_n^{(\pm)}$ pueden ser escritos como

$$\mathcal{T}_{j_n^\pm, m_n, m_n} = e^{-\frac{\alpha_n^{(\pm)}}{\sqrt{2}}\varphi + in\sqrt{\frac{k}{2}}X}, \quad \mathcal{T}_{j_n^\pm, m_n, -m_n} = e^{-\frac{\alpha_n^{(\pm)}}{\sqrt{2}}\varphi + in\sqrt{\frac{k}{2}}\tilde{X}}, \quad (4.5)$$

por ende llevando momento

$$j_n^\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + (k-2)(kn^2 - 4)} \quad (4.6)$$

y número de momento o enrollamiento $m_n \pm \bar{m}_n = kn$. Aquí discutiremos cómo las funciones de correlación del modelo definido por la acción (1.1), cuando encendemos los modos de momento $n = 2$ (representado por el operador $\mathcal{T}_{1-k, k, k}$) y $n = 1$ (representado por $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}}$), coinciden precisamente con las funciones de correlación del modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$. Estamos ahora listos para presentar la afirmación principal respecto a la correspondencia y describir la prescripción precisa para el cálculo de los correladores.

4.2. Proposición de la correspondencia

4.2.1. Algunas definiciones preliminares

Discutiremos cómo la deformación particular de la familia (4.1) dada por $\lambda_n = \mu\delta_{n-2} + \lambda\delta_{n-1}$ es dual al agujero negro 2D, de una forma similar en la que el modelo de sine-Liouville lo es. Por “dual”, nos referimos a que existe una correspondencia directa entre funciones de correlación de ambas teorías de campos conformes al nivel de la topología esférica. Por lo tanto, el operador de interacción que consideraremos es

$$\mathcal{O}_{\lambda_1=\lambda, \lambda_2=\mu} = \lambda e^{-\sqrt{\frac{k-2}{2}}\varphi + i\sqrt{\frac{k}{2}}X} + \mu e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}(k-1)\varphi + i\sqrt{2k}X}, \quad (4.7)$$

donde la relación de escaleo entre las constantes de acoplamiento μ y λ va como $\lambda^2 = a_k \mu$ con un factor de proporcionalidad dependiente de k que llamamos a_k y que especificaremos más abajo. En el límite de k grande, este operador se comporta como

$$\mathcal{O}_{\lambda_1=\lambda, \lambda_2=\mu} \sim \lambda e^{-\sqrt{k/2}(\varphi-iX)} + \frac{1}{a_k} (\lambda e^{-\sqrt{k/2}(\varphi-iX)})^2 \sim \lambda e^{-\sqrt{k/2}(\varphi-iX)} + \frac{1}{a_k} (\mathcal{O}_{\lambda_1=\lambda, \lambda_2=0})^2. \quad (4.8)$$

Observemos también que

$$\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}} = e^{-\sqrt{\frac{k-2}{2}}\varphi + i\sqrt{\frac{k}{2}}X}, \quad \mathcal{T}_{1-k, k, k} = e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}(k-1)\varphi + i\sqrt{2k}X}, \quad (4.9)$$

por lo que

$$\mathcal{O}_{\lambda_1=\lambda, \lambda_2=\mu} = \lambda \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}} + \frac{\lambda^2}{a_k} \mathcal{T}_{1-k, k, k}. \quad (4.10)$$

Teniendo en cuenta (3.7), observemos que la perturbación $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}}$ corresponde a un operador que satisface la cota unitaria $1 - k < 2j < -1$ solamente para $k > 3$, mientras que el operador $\mathcal{T}_{1-k, k, k}$ no satisface esa cota para ningún valor de k mayor a 2. Con los operadores (4.9), definimos las siguientes funciones de correlación

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\mathcal{T}}_{j_1, m_1, \bar{m}_1}(z_1) \dots \tilde{\mathcal{T}}_{j_N, m_N, \bar{m}_N}(z_N) \right\rangle_{S_{[\lambda]}} &= \frac{\Gamma(-s)}{b} \delta(s + 1 + j_1 + \dots + j_N + M + (N - 2 - M)k/2) \times \\ &\times \frac{1}{M! c_k^M} \delta(m_1 + \bar{m}_1 + \dots + m_N + \bar{m}_N + k(M + 2 - N)) \delta_{m_1 - \bar{m}_1 + \dots + m_N - \bar{m}_N} \times \\ &\times \prod_{r=1}^M \int d^2 w_r \prod_{t=1}^s \int d^2 v_t \left\langle \tilde{\mathcal{T}}_{j_1, m_1, \bar{m}_1}(z_1) \dots \tilde{\mathcal{T}}_{j_N, m_N, \bar{m}_N}(z_N) \prod_{r=1}^M \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}}(w_r) \prod_{t=1}^s \mathcal{T}_{1-k, k, k}(v_t) \right\rangle_{S_{[\lambda=0]}} \end{aligned}, \quad (4.11)$$

con $b^{-2} = k - 2$, y donde fijamos $a_k = c_k^{-2}$. El valor de λ también fue fijado a un valor específico. Los operadores de vértice $\tilde{\mathcal{T}}_{j, m, \bar{m}}$ que aparecen en esta expresión están relacionados con aquéllos introducidos en (3.7) a través de

$$\tilde{\mathcal{T}}_{j, m, \bar{m}} = \frac{c_k \Gamma(-m - j)}{\pi^2 \Gamma(1 + j + \bar{m})} \mathcal{T}_{j, \tilde{m}, \tilde{\bar{m}}}, \quad (4.12)$$

con

$$\tilde{j} = -j(k - 1) - m(k - 2) - k/2, \quad \tilde{m} = jk + m(k - 1) + k/2, \quad (4.13)$$

y análogamente para $\tilde{\bar{m}}$. Una vez más, notemos que en (4.11) ya fijamos el valor de λ a un valor específico c_k , que es un factor numérico dependiente de k y que está en última instancia relacionado con el que aparece en (2.174). La realización (4.11) es similar a la de (2.112) en la teoría de Liouville y define los correladores que consideraremos aquí. El factor $\frac{\Gamma(-s)}{bM!c_k^M}$ y las funciones δ se entienden una vez que se especifica la prescripción para la inserción de operadores de apantallamiento cuando se calculan correladores. Estos factores, provienen de la integración de los modos cero de los campos φ and X . Por otra parte, también está la condición $\sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m}_i) = 0$. Las condiciones que imponen las funciones δ son equivalentes a pedir que

$$\sum_{i=1}^N (\tilde{m}_i - \tilde{\bar{m}}_i) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N (\tilde{m}_i + \tilde{\bar{m}}_i) + k(M + 2s) = 0, \quad (4.14)$$

con $M + s$ el número total de operadores de apantallamiento a ser insertados. Discutiremos la prescripción para la inserción de cargas de apantallamiento mas abajo.

4.2.2. Una prescripción del tipo gas de Coulomb

En esta realización, los operadores de interacción $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}}$ y $\mathcal{T}_{1-k, k, k}$ actúan en (4.11) como operadores de apantallamiento, análogamente al cálculo de correladores en la teoría de Liouville. Debido a las funciones δ que aparecen en (4.11), el número de estos operadores de apantallamiento que se deben insertar resulta estar dado por

$$s = 1 - N - \sum_{i=1}^N j_i + \frac{k-2}{2}(M+2-N), \quad M = N - 2 + \sum_{i=1}^N \omega_i. \quad (4.15)$$

Sin embargo, la afirmación no está completa a menos que uno especifique como se deben satisfacer las condiciones (4.15). Esto es porque en principio no hay una única manera de elegir s y M de manera de satisfacer la primera de las condiciones de simetría de carga en (4.15). Por lo tanto, vamos a ser precisos respecto de la prescripción para calcular el lado derecho de (4.11); la prescripción que adoptamos aquí es la siguiente:

- M es un número entero positivo y es la cantidad de operadores $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}}$ a insertar. Su valor está fijado por los números de enrollamiento ω_i de los N estados interactuantes.
- s es la cantidad de operadores $\mathcal{T}_{1-k, k, k}$ a ser insertados. Su valor se fija de manera de que el lado derecho de (4.11) no sea cero; y esto será así aun en el caso en el que debamos extender analíticamente (4.11) para valores de s no enteros²⁶.

Este es el conjunto de funciones de correlación que consideraremos aquí; enfatizamos el hecho de que la equivalencia que enunciaremos a continuación debe ser entendida como válida solamente si se emplea la prescripción que acabamos de dar para calcular observables. Ahora que ya definimos los correladores (4.11) y la prescripción para calcularlos, presentamos la proposición principal.

4.2.3. Correspondencia entre funciones de correlación

El enunciado es que la siguiente identidad entre funciones de correlación es válida

$$\left\langle \Phi_{j_1, m_1, \bar{m}_1}^{\omega_1}(z_1) \dots \Phi_{j_N, m_N, \bar{m}_N}^{\omega_N}(z_N) \right\rangle_{WZW} = \widehat{c}_k^{-2} \left\langle \widetilde{\mathcal{T}}_{j_1, m_1, \bar{m}_1}(z_1) \dots \widetilde{\mathcal{T}}_{j_N, m_N, \bar{m}_N}(z_N) \right\rangle_S \quad (4.16)$$

²⁶ Esta extensión para valores no enteros de s es lo mismo que sucedía en las funciones de correlación de Liouville y ya fue discutido en la sección 2.

donde \widehat{c}_k^2 es un factor numérico (independiente de N) que será especificado más abajo, y donde los correladores del lado derecho están dados por (4.11) y deben ser calculados con la prescripción dada más arriba. Esta relación es

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{j_1, m_1, \bar{m}_1}^{\omega_1}(z_1) \dots \Phi_{j_N, m_N, \bar{m}_N}^{\omega_N}(z_N) \rangle_{WZW} &= \frac{\Gamma(-s)}{\widehat{c}_k^2 b M! c_k^{M-N}} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(-m_i - j_i)}{\Gamma(1 + j_i + \bar{m}_i)} \delta_{m_1 - \bar{m}_1 + \dots + m_N - \bar{m}_N} \times \\ &\times \delta \left(\sum_{i=1}^N (m_i + \bar{m}_i) + (M + 2 - N)k \right) \delta \left(s + 1 + \sum_{i=1}^N j_i + M + (N - 2 - M)k/2 \right) \times \\ &\times \prod_{r=1}^M \int d^2 w_r \prod_{t=1}^s \int d^2 v_t \left\langle \prod_{i=1}^N \mathcal{T}_{\tilde{j}_i, \tilde{m}_i, \tilde{\bar{m}}_i}(z_i) \prod_{r=1}^M \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}}(w_r) \prod_{t=1}^s \mathcal{T}_{1-k, k, k}(v_t) \right\rangle_{S_{[\lambda=0]}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Este es el resultado principal aquí. La ecuación (4.16) da una realización de cualquier función de N puntos de los correladores del modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$ en términos de observables análogos en la teoría (1.1) si la perturbación que se toma es $\lambda_n = \mu\delta_{n-2} + \lambda\delta_{n-1}$. La perturbación involucrada en esta realización corresponde a los operadores $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}}$ y $\mathcal{T}_{1-k, k, k}$, que poseen modos de momento $n = 1$ y $n = 2$ respectivamente. Esto es diferente a la dualidad estándar FZZ, que en cambio corresponde a $\lambda_n = \tilde{\lambda}\delta_{n-1} + \tilde{\lambda}\delta_{n+1}$. La perturbación de la teoría del dilatón lineal (2.149) con operadores de diferente número de enrollamiento también fue considerada en [6], donde fue sugerido que operadores taquiónicos múltiplemente agujereados están relacionados con agujeros negros de mayor spin. Sería interesante entender mejor la relación de la realización de [6] y confirmar aquella imagen.

4.2.4. Representaciones conjugadas y flujo espectral

Una característica interesante de la afirmación más arriba es que el lado derecho de (4.16) involucra “operadores conjugados” en vez de los que introdujimos en (3.7). Unos se relacionan con otros a través de (4.13), que representa una simetría de la fórmula para la dimensión conforme (2.163) (de hecho, no solamente para ella). Observemos que en particular tenemos que

$$\tilde{\mathcal{T}}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}} \sim \mathcal{T}_{1-k, k, k}, \quad (4.18)$$

y que los operadores $\tilde{\mathcal{T}}_{j, m, \bar{m}}$ y $\mathcal{T}_{j, m, \bar{m}}$ tienen exactamente la misma dimensión conforme. Aun más, el automorfismo puede ser extendido de manera de que sea válido para la teoría formulada en el producto $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1) \times \mathbb{R}$ al incluir un número de enrollamiento nuevo

$$\tilde{\omega} = -\omega - 1 - 2(j + m). \quad (4.19)$$

Es este caso, los operadores $\tilde{\mathcal{T}}_{j,m,\bar{m}}$ y $\mathcal{T}_{j,m,\bar{m}}$, una vez que ambos fueron extendidos al incluir el factor tipo temporal $e^{i\sqrt{\frac{2}{k}}(m+\frac{k}{2}\omega)T}$, satisfacen que

$$-\frac{j(j+1)}{k-2} - m\omega - \frac{k}{4}\omega^2 = -\frac{\tilde{j}(\tilde{j}+1)}{k-2} - \tilde{m}\tilde{\omega} - \frac{k}{4}\tilde{\omega}^2$$

y también tienen el mismo momento respecto a la corriente J^3 del modelo de WZW, es decir

$$m + \frac{k}{2}\omega = \tilde{m} + \frac{k}{2}\tilde{\omega}.$$

Para entender la relación entre $\tilde{\mathcal{T}}_{j,m,\bar{m}}$ y $\mathcal{T}_{j,m,\bar{m}}$ desde el punto de vista algebraico, comentemos respecto a las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})_k$ una vez más: Como ya dijimos, la serie continua principal $\mathcal{C}_\lambda^{\alpha,\omega}$ corresponde a $j = -\frac{1}{2} + i\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y por lo tanto, a través de (4.13), esto resulta en los nuevos valores $j = -\frac{1}{2} + i\tilde{\lambda} - m(k-2)$ con $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$, que solamente pertenecen a la serie continua si $m = 0$. Por otra parte, si hacemos el cambio (4.13) para $\tilde{\lambda}$, luego m resulta ser un número no real. Por lo tanto, la relación entre j, m y \tilde{j}, \tilde{m} no puede ser pensada como una sencilla identificación entre estados de diferentes representaciones continuas sino que corresponde a diferentes realizaciones de campos libres (por lo menos en lo que respecta a las series continuas $\mathcal{C}_\lambda^{\alpha,\omega}$). Por otra parte, en lo que respecta a las representaciones discretas, vale la pena mencionar que la cantidad $j+m$ permanece invariante ante la transformación (4.13); no es ese el caso para la diferencia $j-m$, que en cambio permanece invariante bajo la versión reflejada bajo \mathbb{Z}_2 de (4.13). Por lo tanto, la transformación definida según (4.13) y (4.19) es cerrada ante cierto subconjunto de estados de las representaciones discretas. Esto se debe a que esa transformacin mapea estados de la serie discreta con $2(j+m) \in \mathbb{Z}$ a ellos mismos. En particular, el caso $m+j=0$ corresponde a la muy conocida identificación entre las series discretas $\mathcal{D}_j^{\pm,\omega=0}$ y $\mathcal{D}_{-k/2-j}^{\mp,\omega=\pm 1}$, ya que en ese caso (4.13) y (4.19) se reducen a $j \rightarrow -k/2-j$, $m \rightarrow k/2-m = k/2+j$, $\omega \rightarrow -1-\omega$ (*i.e.* incluye²⁷ esa transformación de flujo espectral como un caso particular). Observemos también que la codición $m-\bar{m} \in \mathbb{Z}$ no se preserva para valores genéricos de k . Los puntos fijos de (4.13) describen una línea en el espacio de las representaciones, parametrizados por $j+1/2 = -m(k-2)/k$; en particular, un punto fijo para k genérico corresponde a $j = -1/2$ y $m = 0$, para el cual (4.19) se reduce a $\omega \rightarrow -\omega$. También, en el límite de tensión nula $k \rightarrow 2$, la transformación (4.13) coincide con la reflexión de Weyl $j \rightarrow -1-j$. La relación entre los números cuánticos manifestada por (4.13) permite visualizar la relación entre los vértices considerados en nuestra construcción y aquéllos de la referencia [67], y enfatizamos que estos corresponden a dos representaciones alternativas diferentes de

²⁷Mas precisamente, la identificación entre primarios de Kac-Moody de peso máximo (peso mínimo) que se induce por el sector $\omega = 1$ del flujo espectral coincide con un caso particular de la identificación dada por la simetría (4.13), (4.19).

los operadores de vértice. La relación entre ambas es una especie de “retorcimiento” y está presumiblemente relacionada con las representaciones estudiadas en [75] para la teoría de WZW. Ciertamente, las representaciones conjugadas del álgebra de vértices de $SL(2, \mathbb{R})_k$ se parece al retorcimiento (4.12), y parece ser una buena conexión entre los correladores (4.12) y la representación de campos libres estudiada en [74, 73, 75, 67]. Las representaciones conjugadas transforman de una manera particular ante el álgebra afín de Kac-Moody $\widehat{sl}(2)_k$, y son análogas a aquéllas introducidas por Dotsenko para el caso de $\widehat{su}(2)_k$ en las Refs. [62, 63]. Para una teoría de WZW no compacta fueron introducidas por primera vez en [36] para describir las amplitudes que violan el enrollamiento. Aquí, a través de (4.12), estas aparecen una vez más (a pesar de que nos referimos a ellas como “retorcidas”) en un contexto similar.

4.2.5. Comentario sobre la simetría afín $\widehat{sl}(2)_k$

Para entender estos sectores retorcidos mejor, haremos algunos comentarios respecto a la simetría $sl(2)_k$ de la acción (1.1) cuando esta es perturbada como lo hicimos. Estamos afirmando (y lo probaremos en la siguiente subsección) que los correladores (4.11) efectivamente transforman apropiadamente bajo la simetría $sl(2)_k$ de manera de describir correladores de WZW. Sin embargo, aún cuando uno puede probar esto *a posteriori*, la pregunta que surge es la de porqué sucede esto si los operadores $\mathcal{T}_{1-k,k,k}$ no parecen conmutar con las corrientes de $\widehat{sl}(2)_k$. Para ser más precisos, a pesar de que uno prueba finalmente que la representación de campos libres utilizada aquí transforma apropiadamente por construcción (*ej.* reproduce las soluciones de la ecuación KZ), también es verdad que esto no es obvio porque los operadores de apantallamiento no parecen conmutar con la representación de campos libres del álgebra de corrientes de $sl(2)_k$ (3.9) como uno esperaría en principio. La explicación de esta característica intrigante es que los operadores de vértice $\widetilde{\mathcal{T}}_{j,m,\bar{m}}$ tampoco satisfacen los OPE’s usuales con las corrientes de $sl(2)_k$, y por lo tanto esto es lo que restaura la simetría. Para ver esto explícitamente, uno tiene que considerar los generadores del álgebra afín (3.9) y verificar que esas corrientes no tienen una expansión en productos de operadores regular con los operadores $\mathcal{T}_{1-k,k,k}$. El punto sobresaliente es que es esto lo que precisamente restaura la simetría de $SL(2, \mathbb{R})_k$: Las corrientes no presentan un OPE regular con los operadores $\mathcal{T}_{1-k,k,k}$, pero estas tampoco satisfacen el OPE usual con los operadores de vértice retorcidos $\widetilde{\mathcal{T}}_{j,m,\bar{m}}$; y ambos hechos parecen combinarse de manera de dejar el conjunto de observables (4.11) invariantes ante $SL(2, \mathbb{R})_k$. Esta recuperación efectiva de la simetría depende de la presencia del factor de normalización $\frac{\Gamma(-j-m)}{\Gamma(j+\bar{m}+1)}$ en (4.12), ya que su presencia no es inocua para las propiedades de transformación bajo los generadores J_n^\pm . Esta característica hace que la correspondencia (4.16) sea una afirmación no trivial.

4.3. Prueba de la correspondencia

Aquí probaremos que la fórmula (4.16) se sigue inmediatamente de la relación (2.174) entre los correladores de WZW y Liouville. Con el objetivo de ser más claros, presentaremos la demostración en dos pasos: Primero, reescribimos los correladores (4.11) y los operadores involucrados ahí en una forma conveniente²⁸. El segundo paso será el de hacer contacto con los correladores de WZW utilizando la fórmula (2.174).

4.3.1. Paso 1: Rescribiendo los correladores

Como dijimos, la demostración de la fórmula (4.16) se sigue directamente del mapa de Stoyanovsky, Ribault y Teschner (2.174) que discutimos en la sección 2. De manera de hacer la demostración más simple, comenzamos redefiniendo los campos de la siguiente forma

$$\varphi(z) = (1 - k)\widehat{\varphi}(z) + i\sqrt{k(k-2)}\widehat{X}(z), \quad X(z) = i\sqrt{k(k-2)}\widehat{\varphi}(z) + (k-1)\widehat{X}(z). \quad (4.20)$$

Esto es

$$-\sqrt{\frac{k-2}{2}}\widehat{\varphi} + i\sqrt{\frac{k}{2}}\widehat{X} = -\sqrt{\frac{k-2}{2}}\varphi + i\sqrt{\frac{k}{2}}X \quad (4.21)$$

y

$$-\frac{1}{\sqrt{k-2}}\widehat{\varphi} = \frac{k-1}{\sqrt{k-2}}\varphi - i\sqrt{k}X. \quad (4.22)$$

Observar también que esto implica que

$$\partial\varphi\bar{\partial}\varphi + \partial X\bar{\partial}X = \partial\widehat{\varphi}\bar{\partial}\widehat{\varphi} + \partial\widehat{X}\bar{\partial}\widehat{X}; \quad (4.23)$$

de manera de que los correladores de los campos libres sigan siendo

$$\langle\widehat{\varphi}(z_1)\widehat{\varphi}(z_2)\rangle = \langle\widehat{X}(z_1)\widehat{X}(z_2)\rangle = -2\log|z_1 - z_2|. \quad (4.24)$$

La redefinición (4.20) es una transformación compleja ortogonal de determinante -1 (del tipo $O(2)$). Uno podría preguntarse si esta redefinición de los campos está bien definida o no, ya que el hecho de que sea compleja haría que tanto $\widehat{\varphi}$ como \widehat{X} adquiriesen una parte no real. Sin embargo, la forma correcta de pensar esta transformación es considerando primero un rotación de Wick de la dirección X , luego transformar $X \rightarrow \widehat{X}$ y finalmente hacer la rotación de Wick hacia atrás del campo \widehat{X} . Resulta que la transformación está perfectamente definida para los campos rotados iX y

²⁸En la Ref. [8] se utilizaron técnicas similares para demostrar una correspondencia diferente aunque similar: la que hay entre las funciones de correlación de Liouville y sine-Liouville.

$i\widehat{X}$, que pueden ser pensados como bosones reales del tipo temporal. Matricialmente podemos descomponer la transformación (4.20) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1-k & i\sqrt{k(k-2)} \\ i\sqrt{k(k-2)} & k-1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-k & \sqrt{k(k-2)} \\ -\sqrt{k(k-2)} & k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-k & i\sqrt{k(k-2)} \\ -\sqrt{k(k-2)} & i(k-1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

En la primera igualdad, podemos ver como la transformación es el producto de una rotación de Wick, seguida de una transformación con coeficientes reales (asumiendo $k \geq 2$), y una rotación de Wick inversa. En la segunda igualdad, tomamos el producto de más a la derecha para pensar a la transformación como aquella que relaciona el campos iX con $i\widehat{X}$. La transformación que queda a la derecha ya no es una matriz de $O(2)$ sino que de $O(1,1)$. De hecho, uno podría convertir la transformación original en una rotación de $SO(2)$ al agregar a la transformación (4.20) una reflexión $X \rightarrow -X$ (que es también una simetría de la teoría). En tal caso, es claro que (4.22) y (4.23) permanecen invariantes, mientras que (4.21) cambia su signo en el segundo término del lado derecho. Por lo tanto, en principio, sería posible considerar una transformación quirral $O(1,1) \times \overline{SO}(2)$ (para la parte holomorfa y anti-holomorfa respectivamente) de manera de transformar las dependencias en X en dependencias en su dual \widetilde{X} .

En términos de estos nuevos campos $\widehat{\varphi}$ y \widehat{X} se tiene que la teoría del dilatón lineal definida por la acción $S_0 - \frac{1}{4\pi} \int d^2z \partial T \bar{\partial} T$ toma la forma

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(-\partial T \bar{\partial} T + \partial \widehat{X} \bar{\partial} \widehat{X} + \partial \widehat{\varphi} \bar{\partial} \widehat{\varphi} + \frac{1}{2\sqrt{2}} QR \widehat{\varphi} - i\sqrt{2k} R \widehat{X} \right) \quad (4.26)$$

con $Q = b + b^{-1}$, y $b^{-2} = k - 2$, de manera que $Q = \frac{k-1}{\sqrt{k-2}} = b + b^{-1}$ (c.f. (2.77) en la sección 2). Esto es, el operador de carga de fondo $e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}\varphi}$ transforma a través de (4.13) a un nuevo operador de carga de fondo $e^{\sqrt{2}Q\varphi - i\sqrt{2k}X}$, donde $\tilde{j} = -1$, $\tilde{m} = 0$ mientras que $j = k - 1$, $m = -k$. Consecuentemente, el tensor de energía momento es [1]

$$T(z) = \frac{1}{2}(\partial T)^2 - \frac{1}{2}(\partial \widehat{X})^2 - i\sqrt{\frac{k}{2}}\partial^2 \widehat{X} - \frac{1}{2}(\partial \widehat{\varphi})^2 + \frac{k-1}{\sqrt{2(k-2)}}\partial^2 \widehat{\varphi}, \quad (4.27)$$

y el dilatón ahora adquiere una dependencia lineal en ambas direcciones \widehat{X} y $\widehat{\varphi}$. Este tipo de teorías de campos conformes, representando materia con $c < 1$ acoplada a la gravedad en 2 dimensiones perturbada, fue recientemente discutida en [103, 104, 105, 106, 61]. Es posible verificar que este tensor de energía momento

lleva a la carga central apropiada $c = 3 + \frac{6}{k-2}$, como se espera. Luego de la demostración veremos como esta invarianza de la carga central es esperable en este tipo de transformaciones. Por otra parte, en términos de estos nuevos campos, el término de interacción (perturbación) $\lambda \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}}(w_r) + \mu \mathcal{T}_{1-k, k, k}(v_t)$ toma la forma

$$\mathcal{O}_{\lambda_1, \lambda_2} = c_k^{-1} e^{-\sqrt{\frac{k-2}{2}} \hat{\varphi} + i\sqrt{\frac{k}{2}} \hat{X}} + e^{\sqrt{\frac{2}{k-2}} \hat{\varphi}}, \quad (4.28)$$

donde ya hemos fijado la escala μ a un valor específico al correr el modo cero del campo de Liouville $\hat{\varphi}$, y también especificamos el factor numérico c_k como el cociente entre los acoplamientos μ y λ^2 en (4.7). Observemos que en estas coordenadas el segundo término en la perturbación $\mathcal{O}_{\lambda_1, \lambda_2}$ resulta estar diagonalizado (no depende de \hat{X}) y coincide con la constante cosmológica de Liouville $\mu e^{\sqrt{2b} \hat{\varphi}}$. Por otra parte, el primer término en (4.28) todavía tiene la forma de una de las dos exponenciales que forman la interacción del coseno (3.6) en la teoría de sine-Liouville; esto se debe a (4.21). Además, los operadores de vértice escritos en términos de \hat{X} y $\hat{\varphi}$ toman la forma²⁹

$$\tilde{\mathcal{T}}_{j, m, \bar{m}} = \frac{c_k \Gamma(-m-j)}{\pi^2 \Gamma(1 + \bar{m} + j)} V_\alpha \times e^{i\sqrt{\frac{2}{k}}(m-\frac{k}{2})\hat{X} + i\sqrt{\frac{2}{k}}(m+\frac{k}{2})T}, \quad (4.29)$$

con el campo de Liouville $V_\alpha = e^{\sqrt{2\alpha} \hat{\varphi}}$, y con $\alpha = bj + b + b^{-1}/2 = b(j + k/2)$. Expandiendo los correladores nos queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{c}_k^2} \left\langle \tilde{\mathcal{T}}_{j_1, m_1, \bar{m}_1}(z_1) \dots \tilde{\mathcal{T}}_{j_N, m_N, \bar{m}_N}(z_N) \right\rangle_{S_{[\lambda, \mu]}} &= \frac{\Gamma(-s)}{b M! c_k^M \hat{c}_k^2} \prod_{r=1}^M \int d^2 w_r \prod_{t=1}^s \int d^2 v_t \left\langle \prod_{i=1}^N \tilde{\mathcal{T}}_{j_i, m_i, \bar{m}_i}(z_i) \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{r=1}^M \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}}(w_r) \prod_{t=1}^s \mathcal{T}_{1-k, k, k}(v_t) \right\rangle_{S_{[\lambda=0, \mu=0]}} \end{aligned}$$

y esto puede ser escrito como

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k \hat{c}_k^2} \delta(\omega_1 + \dots \omega_N + N - 2 - M) \prod_{a=1}^N \frac{c_k \Gamma(m_a - j_a)}{\pi^2 \Gamma(1 + j_a - \bar{m}_a)} \left\langle \prod_{t=1}^N e^{i\sqrt{\frac{2}{k}}(m_t + \frac{k}{2})\omega_t T(z_t)} \right\rangle_{S_{[\lambda=0]}} \times \\ &\quad \times \frac{1}{M! c_k^M} \delta_{m_1 - \bar{m}_1 + \dots m_N - \bar{m}_N} \prod_{r=1}^M \int d^2 w_r \left\langle \prod_{t=1}^N e^{i\sqrt{\frac{2}{k}}(m_t - \frac{k}{2})\hat{X}(z_t)} \prod_{r=1}^M e^{i\sqrt{\frac{k}{2}}\hat{X}(w_r)} \right\rangle_{S_{[\lambda=0]}} \times \\ &\quad \times \frac{\Gamma(-s)}{b} \delta\left(s - 1 - \frac{2+M}{2b^2} + \frac{\alpha_1 + \dots \alpha_N}{b}\right) \prod_{t=1}^s \int d^2 v_t \left\langle \prod_{t=1}^N V_{\alpha_t}(z_t) \prod_{r=1}^M V_{-\frac{1}{2b}}(w_r) \prod_{t=1}^s V_b(v_t) \right\rangle_{S_{L[\mu=0]}}, \quad (4.30) \end{aligned}$$

²⁹Una vez más no escribimos la contribución antiholomorfa $e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} \bar{m} \hat{X}}$ por brevedad. Debe ser entendida en lo que sigue.

donde $S_{[\lambda=0]}$ se refiere a la acción no perturbada

$$S_{[\lambda=0]} = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(-\partial T \bar{\partial} T + \partial \widehat{X} \bar{\partial} \widehat{X} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{k}{2}} R \widehat{X} \right). \quad (4.31)$$

La tercera línea en (4.30) resulta ser una función de correlación de $N + M$ puntos en el teoría de campos de Liouville (*c.f.* (2.112) en la sección 2), definida por la acción de Liouville

$$S_L[\mu] = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial \widehat{\varphi} \bar{\partial} \widehat{\varphi} + \frac{1}{2\sqrt{2}} Q R \widehat{\varphi} + 2\pi\mu e^{\sqrt{2}b\widehat{\varphi}} \right),$$

con $Q = b + b^{-1}$. Recordemos que el parámetro b de la teoría de Liouville se relaciona con el nivel k del álgebra de Kac-Moody a través de $b^{-2} = k - 2$, mientras que los números cuánticos α_i están definidos en términos de j_i por $\alpha_i = bj_i + b + b^{-1}/2$, para $i = 1, 2, \dots, N$. Luego de la contracción de Wick, encontramos que

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(-s)}{bM! c_k^M \widehat{c}_k^2} \prod_{r=1}^M \int d^2w_r \prod_{t=1}^s \int d^2v_t \left\langle \widetilde{\mathcal{T}}_{j_1, m_1, \bar{m}_1}(z_1) \dots \widetilde{\mathcal{T}}_{j_N, m_N, \bar{m}_N}(z_N) \right. \\ & \quad \left. \prod_{r=1}^M \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}}(w_r) \prod_{t=1}^s \mathcal{T}_{1-k, k, k}(v_t) \right\rangle_{S[\lambda=0]} = \\ & = N_k(j_1, \dots, j_N; m_1, \dots, m_N) \prod_{r=1}^M \int d^2w_r F_k(z_1, \dots, z_N; w_1, \dots, w_M) \left\langle \prod_{t=1}^N V_{\alpha_t}(z_t) \prod_{r=1}^M V_{-\frac{1}{2b}}(w_r) \right\rangle_{S_L[\mu]}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde $\mu = b^2/\pi^2$ y donde, luego de fijar el valor $\widehat{c}_k^2 = 2c_k^2/b\pi^3$, el factor de normalización es

$$N_k(j_1, \dots, j_N; m_1, \dots, m_N) = \frac{2\pi^{3-2N}b}{M! c_k^{M+2-N}} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(-m_i - j_i)}{\Gamma(1 + j_i + \bar{m}_i)} \quad (4.33)$$

y la función $F_k(z_1, \dots, z_N; w_1, \dots, w_M)$ está dada por

$$\begin{aligned} F_k(z_1, \dots, z_N; w_1, \dots, w_M) &= \frac{\prod_{1 \leq r < l \leq N} |z_r - z_l|^{k-2(m_r + m_l + \omega_r \omega_l k/2 + \omega_l m_r + \omega_r m_l)}}{\prod_{1 \leq r < l \leq M} |w_r - w_l|^{-k} \prod_{t=1}^N \prod_{r=1}^M |w_r - z_t|^{k-2m_t}} \times \\ & \times \frac{\prod_{1 \leq r < l \leq N} (\bar{z}_r - \bar{z}_l)^{m_r + m_l - \bar{m}_r - \bar{m}_l + \omega_l(m_r - \bar{m}_r) + \omega_r(m_l - \bar{m}_l)}}{\prod_{1 \leq r < l \leq M} (\bar{w}_r - \bar{z}_t)^{m_t - \bar{m}_t}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Sorprendentemente, esto ha reproducido el lado derecho de la fórmula (2.174); *c.f.* (2.176). Observemos que los exponentes de las diferencias $|z_r - z_l|$ en (4.34) dependen de si la teoría está siendo formulada en el coset $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$ o en su producto con el tiempo T . Los operadores de vértice (4.29) son los únicos campos que llevan las dependencias en T , de manera que los otros valores de expectación no están afectados. Si hubieramos dejado de lado las dependencias en T de los operadores de vértice, la función F_k sería

$$F_k(z_1, \dots, z_N; w_1, \dots, w_M) = \frac{\prod_{1 \leq r < l}^N |z_r - z_l|^{k-2(m_r+m_l-2m_l m_r/k)}}{\prod_{1 < r < l}^M |w_r - w_l|^{-k} \prod_{t=1}^N \prod_{r=1}^M |w_r - z_t|^{k-2m_t}} \times \\ \times \frac{\prod_{1 \leq r < l}^N (\bar{z}_r - \bar{z}_l)^{m_r+m_l-\bar{m}_r-\bar{m}_l-2m_l m_r/k+2\bar{m}_l \bar{m}_r/k}}{\prod_{1 < r < l}^M (\bar{w}_r - \bar{z}_t)^{m_t-\bar{m}_t}}, \quad (4.35)$$

y en este caso tendríamos la teoría formulada en el coset $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$.

De acuerdo a (4.15), la cantidad de perturbaciones involucradas en (4.32) está restringida por las siguientes condiciones

$$\sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N \bar{m}_i = \frac{k}{2}(N - M - 2), \quad s = -b^{-1} \sum_{i=1}^N \alpha_i + b^{-2} \frac{M}{2} + 1 + b^{-2}, \quad (4.36)$$

donde el número s corresponde a la cantidad de operadores de apantallamiento $V_b = \mu e^{\sqrt{2b}\hat{\varphi}}$ a ser incluídos en los correladores de Liouville. La cantidad total de operadores de vértice en el lado derecho de (4.32) luego es $N + M + s$, y está relacionada con los números de enrollamiento de las cuerdas a través de

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = M + 2 - N \geq -|N - 2|. \quad (4.37)$$

Observemos que el valor de $\sum_{i=1}^N \omega_i$ no puede ser menor que $2 - N$ si M representa un número entero positivo. Para permitir valores negativos del número de enrollamiento se requiere la inserción de operadores de apantallamiento con $n = -1$ además de los de $n = +1$. M recorre valores entre 0 y $N - 2$, lo que implica que, de acuerdo a la prescripción explicada en la subsección 4.2.2, el valor absoluto de la violación de la conservación del número de enrollamiento no puede exceder $N - 2$. Esta es una característica interesante, y no es para nada trivial entender completamente esta cota. Podemos decir que está muy relacionada con la simetría $\widehat{sl}(2)_k$ de la teoría, y nos referimos al apéndice D de [72] para una buena explicación. Vale la pena mencionar que la regla de selección para la violación del número de enrollamiento (4.37) fue una parte original de la conjetura FZZ [36]. Una pequeña nota al respecto puede ser encontrada en [107].

La fórmula (4.32)-(4.34), junto con las condiciones (4.36), son los ingredientes principales para probar (4.16). Solamente resta discutir que el lado derecho de (4.32) realmente representa un correlador de WZW; de hecho, esto ya puede ser observado dado que se sigue directamente de la fórmula (2.174). En efecto, el lado derecho de (4.32) coincide con el lado izquierdo de (2.174) y esto completaría la prueba de (4.16). Completemos esta parte del trabajo comentando sobre ello.

4.3.2. Paso 2: Realización del mapa de Stoyanovsky Ribault y Teschner

Como recién mencionamos, el último paso para probar (4.16) es mostrar que el lado derecho de (4.32) precisamente describe una función de N puntos de WZW, y, en efecto, esto se sigue inmediatamente del resultado principal de [4] (ver la fórmula (3.29) ahí, que aquí la escribimos en la ecuación (2.174)). Por ende, hemos logrado reescribir nuestro resultado (4.16) de tal manera que su demostración resulta ser una consecuencia directa de la observación hecha por S. Ribault en su trabajo [4], donde el mostró que el lado izquierdo de (4.32) es precisamente igual a una función de correlación en el modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$. Nuestro logro fue probar que la función auxiliar $F_k(z_1, \dots, z_N; w_1, \dots, w_M)$ que aparece en la fórmula de Ribault-Teschner puede también ser pensada como proviniendo de las funciones de correlación de una teoría de campos conformes de dilatón lineal realizada por el campo \widehat{X} ; es decir

$$F_k(z_1, \dots, z_N; w_1, \dots, w_M) = \left\langle \prod_{t=1}^N e^{i\sqrt{\frac{2}{k}}((m_t - \frac{k}{2})\widehat{X}(z_t) + (m_t + \frac{k}{2}\omega_t)T(z_t))} \prod_{r=1}^M e^{i\sqrt{\frac{k}{2}}\widehat{X}(w_r)} \right\rangle_{S_{[\lambda=0]}} . \tag{4.38}$$

Es decir, mostramos de que manera la fórmula de Ribault-Teschner puede ser vista como una identidad entre correladores de dos modelos sigma en dos dimensiones con un espacio tiempo de tres dimensiones diferentes. Mientras que uno de estos es el modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$, el otro es de la forma

$$Liouville \times \mathcal{M}_k \otimes \mathbb{R} \tag{4.39}$$

del cual, la teoría de Liouville es solamente una parte. El factor \mathbb{R} corresponde a una dirección tipo temporal parametrizada por T . Por otra parte, el factor \mathcal{M}_k es una dirección $U(1)$ parametrizada por el campo \widehat{X} , y describe una teoría de dilatón lineal con carga central $c = 1 - 6k < 1$. De hecho, observemos que la contribución de \widehat{X} a la carga central es verdaderamente negativa porque $k > 2$. El campo \widehat{X} interactúa con el campo de Liouville $\widehat{\varphi}$ a través del potencial taquiónico, de manera de que el primer producto en (4.39), a diferencia del segundo, no es un producto directo. La dirección temporal, en cambio, no interactúa con los otros campos, y solamente contribuye a la carga central total y a las dimensiones conformes de los operadores de vértice.

El hecho de que una construcción como (4.39) haya sido posible no es un detalle menor: La realización del mapa de Ribault y Teschner (2.174) admite ser interpretada como la equivalencia entre dos teorías de campos conformes lo que demanda

no solamente la existencia de una realización como (4.38) sino que también requiere que la contribución a la carga central proveniente de la parte $U(1) \otimes time$ coincidiera con las diferencias entre la carga central de Liouville $c_L = 1 + 6Q^2$ y la carga central del modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})$ que es $c_{SL(2)} = 3 + 6\widehat{Q}^2 = 3k/(k-2)$, recordando que $b^{-2} = k-2$. Más aún, ese valor de la carga central de la teoría de campos conformes definida por los campos \widehat{X} y T tenía que ser consistente con la fórmula de las dimensiones conformes de los campos involucrados en (4.38), llevando a reproducir la fórmula para la dimensión conforme de los vértices de WZW.

Por otra parte, otra característica que tuvo que ser explicada fue la presencia de M campos adicionales $V_{-1/2b}$ que aparecen en el lado derecho de (4.32). Su presencia ahora se entiende como sigue: Dado que sabemos que (la integral múltiple de) el producto entre la función $F_k(z_1, \dots, z_N; w_1, \dots, w_M)$ y la función de correlación de $N + M$ puntos de Liouville satisface la ecuación KZ y por ende representa una función de correlación de la teoría de WZW, entonces es de esperar que los campos degenerados de Liouville $V_{-1/2b}$ que aparecen allí admitan ser expresados como operadores $(1, 1)$ en una teoría más “grande” de la forma $Liouville \times CFT$ (i.e. la carga de apantallamiento $V_{-1/2b} \times e^{i\sqrt{k/2}\widehat{X}}$ como el primer término del lado derecho de (4.28)). Es decir, aunque $V_{-1/2b}$ tiene dimensión $h = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4b^2} \neq 1$ con respecto al tensor de energía momento de Liouville, realmente corresponde a un operador $(1, 1)^{30}$ $V_{-1/2b} \otimes V_{CFT}$ con respecto al tensor de energía momento del modelo mas grande $Liouville \times CFT$. Por supuesto, la teoría también admite como operador de apantallamiento a aquel que ya era un operador de apantallamiento para la parte Liouville de la teoría, es decir $V_b \otimes I$; de manera que (4.28) puede ser escrito como la suma de ambos:

$$\mathcal{O}_{\lambda_1, \lambda_2} = c_k^{-1} V_{-1/2b} e^{i\sqrt{k/2}\widehat{X}} + V_b. \quad (4.40)$$

Notemos que todos los requerimientos que mencionamos más arriba son de hecho obedecidos por la teoría definida por la acción (4.31) perturbada por el operador (4.28). Por lo tanto, hemos dado una representación en campos libres de la fórmula de Ribault-Teschner (2.174). Relacionado con esto, en [4] fue comentado que una realización parafermiónica de (2.174) es también conocida, y el trabajo no publicado de V. Fateev fue referido. La representación parafermiónica lleva a (ver (3.31) en [4]) una fórmula similar a (2.174) si uno reemplaza el factor $\prod_{1 \leq r < l}^N (z_r - z_l)^{\frac{k}{2} - (m_r + m_l + \omega_r \omega_l \frac{k}{2} + \omega_l m_r + \omega_r m_l)} (\bar{z}_r - \bar{z}_l)^{\frac{k}{2} - (\bar{m}_r + \bar{m}_l + \omega_r \omega_l \frac{k}{2} + \omega_l \bar{m}_r + \omega_r \bar{m}_l)}$ en (2.176) por un factor $\prod_{1 \leq r < l}^N (z_r - z_l)^{\frac{k}{2} + \frac{2}{k} m_r m_l - m_r - m_l} (\bar{z}_r - \bar{z}_l)^{\frac{k}{2} + \frac{2}{k} \bar{m}_r \bar{m}_l - \bar{m}_r - \bar{m}_l}$. Observemos que esto es exactamente lo que habíamos encontrado en nuestro lenguaje (4.35) y es lo que se obtiene al excluir la dependencia en T de los operadores de vértice. Esto realiza una correspondencia como la de (2.174) pero para el caso del coset $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$. Ver las notas al final de [1] donde las similitudes con el

³⁰A pesar de que el operador $V_{-1/2b} \times e^{i\sqrt{k/2}\widehat{X}}$ tiene dimensión 1, no es estrictamente correcto referirse a el como operador de “apantallamiento” debido a aquel comentario que hicimos respecto a las propiedades de transformación en $\widehat{sl}(2)_k$ en la sección 4.2.5.

trabajo de Fateev son mencionadas. Mas allá de esto, una realización de la fórmula de Ribault y Teshner en términos de Liouville \times una teoría conforme con materia con $c < 1$ fue independientemente presentada por S. Nakamura y V. Niarchos en Ref. [7]. Nos gustaría explorar las similitudes entre nuestra realización y la de ese trabajo.

Resumiendo: debido a la fórmula de Ribault y Teshner, resulta que la función de correlación del lado derecho de (4.32) corresponde a la amplitud de la cuerda en el fondo del agujero negro ($\times time$), donde la conservación del número de enrollamiento es violada en una cantidad $|N - 2 - M|$. Consecuentemente, esto implica que el lado izquierdo de (4.32) corresponde efectivamente a un correlador de WZW, y esto completa la prueba (4.16). Sin embargo, debe ser enfatizado que la correspondencia entre las ecuaciones BPZ y KZ fue demostrada para una teoría lorentziana, es decir que solamente vale para representaciones continuas. Por ende, considerar su validez más allá de ese régimen asume una especie de continuación analítica. La convergencia de las integrales en (4.32) es el punto sutil aquí.

5. Análisis de la correspondencia

5.1. Una prueba de consistencia de la correspondencia

Hemos probado la fórmula (4.16); esto fue hecho por primera vez en [1], pero el orden de la presentación fue un poco diferente allí. La fórmula (4.16) resulta ser una herramienta poderosa para calcular correladores de la teoría de WZW. Un ejemplo conciso fue dado en [2], donde una representación de campos libres en términos de la teoría conforme $Liouville \times U(1) \otimes \mathbb{R}$ (4.26)-(4.28) fue empleada para calcular las funciones de tres puntos en la teoría de WZW para el caso particular en el que el número de enrollamiento es violado en una unidad. Esta cantidad resulta ser proporcional al correlador de Liouville

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_{j_1, m_1, \bar{m}_1}^{\omega_1}(0) \Phi_{j_2, m_2, \bar{m}_2}^{\omega_2}(1) \Phi_{j_3, m_3, \bar{m}_3}^{\omega_3}(\infty) \rangle_{WZW} \sim \\ & \sim \prod_{i=1}^3 \frac{\Gamma(-m_i - j_i)}{\Gamma(j_i + 1 + \bar{m}_i)} \prod_{t=1}^s \int d^2 v_t \left\langle e^{\sqrt{\frac{2}{k-2}}(j_1+1)\hat{\varphi}(0)} e^{\sqrt{\frac{2}{k-2}}(j_2+1)\hat{\varphi}(1)} \times \right. \\ & \left. \times e^{\sqrt{\frac{2}{k-2}}(j_3+1)\hat{\varphi}(\infty)} \prod_{t=1}^s e^{\sqrt{\frac{2}{k-2}}\hat{\varphi}(v_t)} \right\rangle_{S_L[\mu=0]} \delta \left(s + j_1 + j_2 + j_3 + 1 + \frac{k}{2} \right), \quad (5.1) \end{aligned}$$

y, a menos de un factor irrelevante dependiente de k (independiente de j y m) y habiendo fijado el valor de la masa del agujero negro, el resultado final es

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_{j_1, m_1, \bar{m}_1}^{\omega_1}(0) \Phi_{j_2, m_2, \bar{m}_2}^{\omega_2}(1) \Phi_{j_3, m_3, \bar{m}_3}^{\omega_3}(\infty) \rangle_{WZW} = \left[\pi \gamma \left(\frac{1}{k-2} \right) \right]^{-j_1 - j_2 - j_3 - \frac{k}{2} - 1} \times \\ & \times \prod_{i=1}^3 \left[\frac{\Gamma(-m_i - j_i)}{\Gamma(j_i + 1 + \bar{m}_i)} \right] \frac{G_k(j_1 + j_2 + j_3 + \frac{k}{2}) G_k(-j_1 - j_2 + j_3 - \frac{k}{2})}{\gamma(-j_1 - j_2 - j_3 - \frac{k}{2}) \gamma(-\frac{2j_2+1}{k-2}) G_k(-1)} \times \\ & \times \frac{G_k(j_1 - j_2 - j_3 - \frac{k}{2}) G_k(1 + j_1 - j_2 + j_3 - \frac{k}{2})}{G_k(2j_1 + 1) G_k(1 - k - 2j_2) G_k(2j_3 + 1)} \delta(m_1 + m_2 + m_3 - k/2) \times \\ & \times \delta(\bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 - k/2) \delta(s + j_1 + j_2 + j_3 + 1 + k/2). \quad (5.2) \end{aligned}$$

donde la función especial $G_k(x)$ está definida a través de

$$G_k(x) = (k-2)^{\frac{x(k-1-x)}{2(k-2)}} \Gamma_2(-x|1, k-2) \Gamma_2(k-1+x|1, k-2), \quad (5.3)$$

en términos de la función de Barnes $\Gamma_2(x|1, y)$

$$\ln \Gamma_2(x|1, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} ((x+n+my)^{-\varepsilon} - (1 - \delta_{n,0} \delta_{m,0})(n+my)^{-\varepsilon}), \quad (5.4)$$

donde la presencia del factor $(1 - \delta_{n,0}\delta_{m,0})$ en el lado derecho significa que la suma en el segundo término no tiene en cuenta el paso $m = n = 0$. La expresión (5.2) reproduce el resultado exacto, de manera que coincide con el resultado obtenido en [36, 72, 86]. Los detalles del cálculo pueden ser encontrados en [2]. Además de su aplicación, el cálculo de (5.2) puede ser considerado como una prueba de consistencia de la representación (4.39) propuesta aquí (y en [1]) para representar correladores de WZW. Por otra parte, también representa una ventaja operativa ya que (a diferencia de otros cálculos con realizaciones de campos libres para los cuales el cálculo de las funciones de correlación de tres puntos que violan el enrollamiento requieren la adición de operadores de flujo espectral) este resulta ser integrable en términos de integrales del tipo Dotsenko-Fateev (*c.f.* los cálculos en [73, 72]). Más allá de todo, vale la pena mencionar que la prueba de consistencia discutida aquí es el cálculo más simple (no trivial) que uno puede hacer en este contexto; esta prueba de consistencia tenía números de enrollamiento ($\sum_{i=1} w_i = -1$) y número de puntos ($N = 3$) de manera tal que la cantidad de campos degenerados $V_{-1/2b}$ resultó ser

$$M = \sum_{i=1} w_i + N - 2 = 0, \tag{5.5}$$

por lo que el cálculo resultó ser más sencillo. En cambio, el apantallamiento que sí utilizamos para realizar (5.2) fué aquél que introdujimos; es decir, el operador $\mathcal{T}_{1-k,k,k} = e^{\sqrt{\frac{2}{k-2}}\hat{\varphi}} = e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}(k-1)\varphi + i\sqrt{2k}X}$, que representa una perturbación con $n = 2$. Una prueba de consistencia menos trivial sería la de tratar de reproducir la función de tres puntos del modelo de WZW en la que se conserva el enrollamiento en la base conocida como base m , lo que requeriría hacer uso de la representación integral no trivial de las funciones especiales (hiper-geométricas) del tipo estudiado en [87, 88, 108]. Relacionado con este punto, podemos decir que expresiones explícitas para la función de cuatro puntos en la teoría de Liouville involucrando un estado degenerado $V_{-\frac{1}{2b}}$ fueron recientemente obtenidas [58, 106]. De acuerdo a la relación (2.174), estas funciones de cuatro puntos son las que representan las funciones de tres puntos que conservan el enrollamiento del lado de WZW de la identidad.

Otras aplicaciones de la correspondencia de Stoyanovsky Ribault y Teschner (2.174), (4.16), fueron recientemente discutidas en [93, 94, 33, 31]. En la subsección 5.3.3, revisaremos una de las observaciones hechas en [33].

5.2. Algunos detalles de la demostración

5.2.1. Comentario respecto de la marginalidad de las perturbaciones

La transformación (4.20) dejó la marginalidad de las perturbaciones invariante (*i.e.* el peso conforme sigue siendo igual a 1). Se puede mostrar que esto no tuvo que ver con la elección particular de la transformación, sino, en realidad, con su

naturaleza ortogonal. Para ver esto, escribamos la acción (1.1) de la siguiente forma:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial \vec{X}^t \bar{\partial} \vec{X} - \frac{R \vec{Q}^t \vec{X}}{2\sqrt{2}} + 4\pi \sum_n \lambda_n \exp(-\sqrt{2} \vec{c}_n^t \vec{X}) \right), \quad (5.6)$$

donde hemos sugestivamente definido las 2-tuplas

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \varphi \\ X \end{pmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_\varphi \\ Q_X \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \vec{c}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ \frac{b_n}{i} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Esta acción es un poco más general que la nuestra dado que en verdad nosotros tenemos $Q_X = 0$ y solamente dos perturbaciones. El punto clave es que podemos escribir la condición de marginalidad de las perturbaciones en esta notación

$$1 = -\alpha_n(-Q_\varphi + \alpha_n) - \frac{b_n}{i}(-Q_X + \frac{b_n}{i}) = \vec{c}_n^t \vec{Q} - \vec{c}_n^t \vec{c}_n. \quad (5.8)$$

Si queremos hacer una transformación lineal homogénea que mezcle los campos pero que no modifique la forma del término cinético de la acción (*c.f.* (4.23)) debemos hacer una transformación ortogonal de la forma

$$\vec{X} = A \vec{X}' \quad \text{with} \quad A^t A = 1. \quad (5.9)$$

Poniendo esto en la acción tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial \vec{X}'^t \bar{\partial} \vec{X}' - \frac{R \vec{Q}^t A \vec{X}'}{2\sqrt{2}} + 4\pi \sum_i \lambda_i \exp(-\sqrt{2} \vec{c}_n^t A \vec{X}') \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial \vec{X}'^t \bar{\partial} \vec{X}' - \frac{R \vec{Q}'^t \vec{X}'}{2\sqrt{2}} + 4\pi \sum_i \lambda_i \exp(-\sqrt{2} \vec{c}_n'^t \vec{X}') \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde en la última igualdad hemos reinterpretado las cargas de fondo y los modos taquiónicos de momento y enrollamiento como $\vec{Q}' = A^t \vec{Q}$ y $\vec{c}_n' = A^t \vec{c}_n$. A través de éstos, podemos verificar que la condición (5.8) permanece invariante:

$$\vec{c}_n'^t \vec{Q}' - \vec{c}_n'^t \vec{c}_n' = \vec{c}_n^t A A^t \vec{Q} - \vec{c}_n^t A A^t \vec{c}_n = 1. \quad (5.11)$$

Luego, cualquier transformación ortogonal de los campos φ y X dejará la marginalidad de las perturbaciones exponenciales invariante. A través de un razonamiento análogo se puede ver que la carga central de la teoría permanece invariante ante este tipo de transformaciones.

5.2.2. Unicidad de la construcción

Una cuestión que podría surgir al revisar la demostración de la dualidad es si la misma construcción podría haber sido realizada pero eligiendo otras dos perturbaciones en vez de $n = 2$ y $n = 1$. En particular uno podría intentar probar la correspondencia FZZ estándar lo que significaría tomar una perturbación con $n = 1$ y $n = -1$. En lo que sigue, mostraremos que nuestra construcción es única en este sentido. Es decir, si no recurrimos a otros argumentos más allá de los presentados en la sección 4, la única forma de probar una dualidad entre una deformación marginal de la teoría del dilatón lineal acoplada a materia con $c = 1$ y el modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ (*×time*) a través del mapa de Ribault y Teschner es eligiendo o bien $n = 2$ y $n = 1$ o bien $n = -2$ y $n = -1$.

Tomemos la teoría libre (1.1) y agreguemos dos modos de perturbación taquiónicos

$$\mathcal{O}_{\lambda_1, \lambda_2} = \lambda_1 e^{-\sqrt{2}\alpha_{n_1}\varphi + i\sqrt{2}b_{n_1}X} + \lambda_2 e^{-\sqrt{2}\alpha_{n_2}\varphi + i\sqrt{2}b_{n_2}X} \quad (5.12)$$

donde n_1 y n_2 son números enteros a ser determinados. Queremos hacer una transformación ortogonal de los campos (*c.f.* (5.7)-(5.9)) de manera de obtener un \mathcal{O} con un sector que sea puramente la perturbación de Liouville y otro con una exponencial degenerada de Liouville. Esto es

$$\mathcal{O}'_{\lambda_1, \lambda_2} = \lambda_1 e^{\sqrt{2}b\varphi} + \lambda_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2b}\varphi + i\sqrt{2}b'_{n_2}X} \quad (5.13)$$

donde $b = (k - 2)^{-1/2}$. Nos estamos preguntando esto porque esta es la forma de obtener los correladores correctos de manera de realizar el mapa de Ribault y Teschner. La ecuación (5.13) requiere tres condiciones que pueden ser traducidas como $a'_{n_1} = -b$, $b'_{n_1} = 0$ y $a'_{n_2} = \frac{1}{2b}$. Tomamos las dos primeras condiciones para determinar n_1 . Si la transformación ortogonal A es escrita en términos de sus componentes, tenemos que

$$a_{n_1} = -A_{11}b \quad \text{y} \quad -ib_{n_1} = -A_{21}b. \quad (5.14)$$

Tomamos la suma de los cuadrados de ambas ecuaciones y notando que $1 = -a_{n_1}^2 + b_{n_1}^2 + a_{n_1}\hat{Q}$ nos queda que

$$\frac{1}{k-2} = -1 + a_{n_1}\hat{Q}. \quad (5.15)$$

donde nos deshicimos de las componentes de la transformación al usar $A_{11}^2 + A_{21}^2 = 1$. Escribiendo a_{n_1} en términos de b_{n_1} y usando la condición de compactificación para la dirección X ($b_{n_1} = n_1\sqrt{k}/2$) obtenemos una ecuación para n_1 que resulta en $|n_1| = 2$ independientemente de k . Esto es, hasta ahora sabemos que una de las dos perturbaciones tiene $n_1 = 2$ o $n_1 = -2$. Elijamos $n_1 = 2$ (el otro cálculo es análogo). La tercera condición es:

$$\frac{1}{2}\sqrt{k-2} = A_{11}a_{n_2} - iA_{21}b_{n_2}. \quad (5.16)$$

Ahora que n_1 está determinado, podemos obtener los elementos A_{11} y A_{21} a través de (5.14). Luego la ecuación (5.16) nos da

$$\frac{1}{2}\sqrt{k-2} = (1-k)a_{n_2} + \sqrt{k}\sqrt{k-2}b_{n_2}. \quad (5.17)$$

De la misma forma en la que operamos antes, escribimos a_{n_2} en términos de b_{n_2} y utilizamos la condición de compactificación. Luego de un poco de álgebra obtenemos una ecuación polinómica en n_2

$$n_2^2 + 2(2k-3)n_2 + (5-4k) = 0. \quad (5.18)$$

Ésta ecuación tiene solamente una solución entera independiente de k , y esta es $n_2 = 1$. Si hubieramos elegido $n_1 = -2$ hubieramos obtenido $n_2 = -1$.

5.3. Comentarios generales

5.3.1. Gravedad minimal generalizada

Ahora, nos gustaría hacer un pequeño comentario en la teoría definida por la acción (4.26) y la perturbación (4.28); en particular enfoquemos nuestra atención al sector bidimensional correspondiente a los campos $\widehat{\varphi}$ y \widehat{X} . Debido a las redefiniciones de los campos (4.20), resulta que la teoría pudo ser escrita como la teoría de Liouville acoplada a una teoría conforme con $c < 1$. Luego, una pregunta natural que surge es la de si ese modelo con $c < 1$ puede ser identificado con un modelo minimal. Como es bien sabido, los modelos conformes minimales están caracterizados por dos enteros p y q que definen el valor de la carga central, siendo esta $c = 1 - 6(\beta^{-1} - \beta)^2$ con $\beta^2 = p/q$ un rational³¹ que satisface $q > p$ (de manera que $\beta < 1$). En nuestro caso, el valor de la carga central de la teoría con $c < 1$ (correspondiente a la parte de la teoría gobernada por \widehat{X}) está dado por $c = 1 - 6k$ y, de manera de identificarla con la de uno de los modelos minimales debemos requerir que $k = (p-q)^2/pq$ (esto es $k = (\beta^{-1} - \beta)^2$) [76]. Sin embargo, dado que estamos interesados en todo el rango $k > 2$, resulta que la condición $c = 1 - 6(p-q)^2/pq$ solamente es consistente para valores particulares de k . Un ejemplo es precisamente el modelo ($p = 1, q = 4$) que corresponde a $k = 9/4$, que es el valor de k para la teoría de cuerdas en el agujero negro³². En tal caso, y teniendo en cuenta que k también satisface $k = 2 + b^{-2}$, obtendríamos $\beta = b$ de manera que la teoría corresponde a la comúnmente llamada gravedad minimal en dos dimensiones (modelo que se supone exactamente soluble). Para el caso más general, la teoría de bidimensional definida por los campos $\widehat{\varphi}$ y \widehat{X} puede ser pensada como la teoría de Liouville acoplada

³¹ Por otra parte, una versión generalizada de estas teorías conformes puede ser considerada, siendo válida para valores genericos de β , [56].

³²Para este valor de k la carga centra resulta ser 26.

al modelo minimal generalizado (con β^2 no necesariamente racional) perturbada por (4.28). Aquella perturbación correspondería al operador “vestido” de Liouville, también en el modelo minimal. Los operadores del modelo minimal admiten una representación en términos de las formas exponenciales $\Phi_{mn} = e^{i\alpha_{mn}\hat{X}}$, con dimensión conforme $h_{mn} = \frac{1}{4}(m\beta^{-1} - n\beta)^2 - \frac{1}{4}(\beta^{-1} - \beta)^2 = \alpha_{mn}(\alpha_{mn} + \beta - \beta^{-1})$ para dos enteros positivos m y n ; esto es, el momento puede tomar los valores $\alpha_{mn} = \frac{1}{2}(n - 1)\beta - \frac{1}{2}(m - 1)\beta^{-1}$ o $\alpha_{mn} = \frac{1}{2}(m + 1)\beta^{-1} - \frac{1}{2}(n + 1)\beta$. Luego, un operador de perturbación de la forma $e^{i\sqrt{k/2n}\hat{X} + \sqrt{2}a_n\hat{\varphi}}$ puede ser pensado como un campo vestido $\Phi_{n-1,n-1}$ del modelo minimal (p, q) con $k = (p - q)^2/pq$. En estos términos, lo que hemos probado es la correspondencia entre funciones de N puntos en la teoría de WZW y un subconjunto de funciones de correlación de la gravedad de Liouville acoplada a modelos minimales generalizados.

5.3.2. Dualidad entre fondos del tipo taquiónicos

Al usar la relación entre los correladores de Liouville y los correladores de WZW pudimos escribir la identidad (4.16). Esta da una descripción dual para la teoría de cuerdas en el fondo del agujero negro bidimensional (o en el espacio AdS_3 euclídeo). Una de las preguntas que surgen es sobre la relación entre esta dualidad (4.16) y la correspondencia estándar de FZZ. De hecho, ambos modelos aparecen como una descripción dual alternativa del mismo modelo, de manera que podemos usar ese modelo intermedio, el modelo de WZW, para officiar de puente para verdaderamente escribir la siguiente aparente relación de autodualidad

$$\begin{aligned} & \prod_{r=1}^{s_+} \int d^2 u_r \prod_{t=1}^{s_-} \int d^2 v_t \left\langle \prod_{i=1}^N \mathcal{T}_{j_i, m_i, \bar{m}_i}(z_i) \prod_{r=1}^{s_+} \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, -\frac{k}{2}}(u_r) \prod_{t=1}^{s_-} \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}, \frac{k}{2}}(v_t) \right\rangle_{S_{[\lambda=0]}} \sim \\ & \sim \prod_{r=1}^{\tilde{s}_+} \int d^2 u_r \prod_{t=1}^{\tilde{s}_{++}} \int d^2 \omega_t \left\langle \prod_{i=1}^N \tilde{\mathcal{T}}_{j_i, m_i, \bar{m}_i}(z_i) \prod_{r=1}^{\tilde{s}_+} \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}}(u_r) \prod_{t=1}^{\tilde{s}_{++}} \mathcal{T}_{1-k, k, k}(\omega_t) \right\rangle_{S_{[\lambda=0]}} , \end{aligned} \tag{5.19}$$

donde el símbolo \sim , está para hacer explícito el hecho de que esta identidad depende de los detalles de como está formulada la correspondencia entre la teoría de sine-Liouville y el modelo de WZW³³. Esta relación entre correladores, realizada por medio de una realización de gas de Coulomb, conduce a una identidad integral no-trivial. Por otra parte, uno podría preguntarse si la relación (5.19) puede ser referida como una auto-dualidad de la teoría de sine-Liouville o no. De hecho, solamente parece ser una dualidad entre dos diferentes deformaciones de la teoría del dilatón

³³Hasta donde sabemos, las verificaciones de la dualidad FZZ fueron realizadas al comparar las estructuras analíticas de ambas teorías, mas no verificando la correspondencia numérica exacta.

lineal (2.149) y no una “auto-dualidad”, Sin embargo, uno puede ver que ambos lados de la identidad más arriba están en algún sentido relacionados con la teoría de sine-Liouville, y no solamente el lado izquierdo. De hecho, la perturbación $\mathcal{T}_{1-k,k,k}$, que representa al operador con momento $n = 2$, está conectado con el de $n = 1$ a través de la relación de conjugación (4.12). Es decir, mientras $j = 1 - m = 1 - k$ para el operador con $n = 2$ $\mathcal{T}_{1-k,k,k}$, el momento dual (dual según (4.13)) es³⁴ $\tilde{j} = 1 + \tilde{m} = 1 - k/2$, y corresponde al operador de momento con $n = -1$ $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2},-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}}$. Por lo tanto, podríamos relacionar los correladores en el lado izquierdo de (5.19) con el siguiente³⁵

$$\sim \prod_{r=1}^{\tilde{s}_+} \int d^2 u_r \prod_{t=1}^{\tilde{s}_-} \int d^2 \omega_t \left\langle \prod_{i=1}^N \tilde{\mathcal{T}}_{j_i, m_i, \bar{m}_i}(z_i) \prod_{r=1}^{\tilde{s}_+} \mathcal{T}_{1-\frac{k}{2}, +\frac{k}{2}, +\frac{k}{2}}(u_r) \prod_{t=1}^{\tilde{s}_-} \tilde{\mathcal{T}}_{1-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}}(\omega_t) \right\rangle_{S[\lambda=0]} \quad (5.20)$$

con $\frac{k-2}{2}\tilde{s}_+ - \tilde{s}_- - \frac{k}{2}(N-2) = \frac{k-2}{2}(s_+ + s_-)$ y $\tilde{s}_+ - (N-2) = s_+ - s_-$. Por lo tanto, (5.19) resulta ser una versión “retorcida” del modelo de sine-Liouville, *i.e.* puede ser escrita como en (5.20). La presencia de las tildes \sim en los operadores da lugar a la expresión “retorcida”; retorcida en el sentido de que (4.13) es aplicado sobre los operadores $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2},-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}}$ pero no sobre los operadores $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2},+\frac{k}{2},+\frac{k}{2}}$. Esta relación entre los correladores (5.19) y (5.20) es reminiscente de lo que sucede en la teoría de WZW, donde las representaciones estándar y conjugadas son realizaciones alternativas de las mismas funciones de correlación. Por lo tanto, esto sugiere que (5.19) podría estar manifestando algún tipo de auto-dualidad que relaciona dos diferentes realizaciones de una misma teoría conforme³⁶. Moralmente, el precio a pagar para retorcer (es decir, conjugar) los N operadores de vértice $\mathcal{T}_{j_i, m_i, \bar{m}_i}$ en (5.19) es el de retorcer los operadores de apantallamiento $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2},-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}} \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_{1-\frac{k}{2},-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}} \propto \mathcal{T}_{1-k,k,k}$, pero dejando sin cambiar a los otros $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2},+\frac{k}{2},+\frac{k}{2}}$. Consecuentemente, el número de inserciones cambia de s_- a $\tilde{s}_{++} = \tilde{s}_-$ (y también de s_+ a \tilde{s}_+) dejando fija la relación formal $N-2 = \tilde{s}_+ - s_+ + s_-$. El lado derecho de (5.19) parecería ser la “mitad” de la teoría de sine-Liouville, porque solamente uno de los dos operadores exponenciales $\mathcal{T}_{1-\frac{k}{2},\pm\frac{k}{2},\pm\frac{k}{2}}$ que forma la interacción del coseno (3.6) está presente, mientras que los operadores $\mathcal{T}_{1-k,k,k}$ parecen surgir allí para compensar las leyes de conservación que hacen que el correlador sea no nulo. En la teoría de WZW, la operación análoga al “retorcimiento” que conecta los operadores $\tilde{\mathcal{T}}_{j,m,\bar{m}}$ con los operadores $\mathcal{T}_{j,m,\bar{m}}$ sería

³⁴Estrictamente hablando, uno debe considerar el auto-morfismo $m \rightarrow \tilde{m} = -jk - m(k-1) - k/2$ en vez de (4.13), que es una composición con la reflexión $m \rightarrow -m$.

³⁵A menos de un factor dependiente de k de la forma $(b_k)^{\tilde{s}_-}$, con b_k independiente de j_i, m_i y \bar{m}_i .

³⁶Mencionemos también que otra realización de los mismos correladores es posible si uno reemplaza $\tilde{\mathcal{T}}_{1-\frac{k}{2},-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}} \propto e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}(k-1)\hat{\varphi} + i\sqrt{2k}\hat{X}}$ por su $k-2$ -ava potencia $e^{-\sqrt{2(k-2)}(k-1)\hat{\varphi} + i\sqrt{2k}(k-2)\hat{X}}$. Esto es por la auto-dualidad de la teoría de Liouville bajo $b \leftrightarrow b^{-1}$.

la relación existente entre las representaciones estándar y conjugada del álgebra de vértices $\widehat{sl}(2)_k$ [24, 26, 74, 73, 75]. La relación entre las representaciones $\widetilde{\mathcal{T}}_{j,m,\bar{m}}$ y $\mathcal{T}_{j,m,\bar{m}}$ conecta operadores del sector de enrollamiento n con aquéllos del sector $n + 1$. Posiblemente, la versión retorcida de la dualidad FZZ que presentamos en (4.16) pueda ser extendida de manera de incluir modos de momento y enrollamiento mayores $n > 2$. Esto daría lugar a la pregunta obvia de qué estarían describiendo estos sectores retorcidos en vistas de la imagen del agujero negro. Como fue remarcado en [38], si la teoría con $c = 1$ es perturbada con operadores del sector n , entonces se comporta de forma equivalente a la teoría compactificada en un radio diferente R/n y perturbada por los operadores de sine-Liouville. En algún sentido, esto está relacionado con aquello que fue estudiado previamente en Ref. [27]. Más allá de todo, la perturbación que consideramos aquí posee operadores de ambos sectores $n = 1$ y $n = 2$, siendo por lo tanto una especie de caso retorcido quiralmente. Nos gustaría entender estas deformaciones mejor. Nuestra esperanza es la de hacer contacto con los resultados de [6] y [27] al intentar responder esta pregunta, pero esto ciertamente requiere más estudio.

5.3.3. El límite $c \rightarrow 0$ del modelo $Liouville \times U(1) \times \mathbb{R}$

Nos gustaría discutir el límite particular cuando la carga central del modelo (4.39) se hace nula. Esto fue estudiado por primera vez en [32] y [33] (ver también [109]-[112]). Este límite corresponde a $k \rightarrow 0$, que, de hecho, está lejos de ser un límite bien comprendido. De hecho, uno podría hacerse varias preguntas respecto a si la teoría está bien definida o no en ese límite. Sin embargo, dejemos de lado esas cuestiones y asumamos que esa extensión es perfectamente admisible. En el límite cuando $k \rightarrow 0$, la carga central de Liouville se vuelve $c_L = -2$ mientras que la carga de fondo del campo \widehat{X} se hace nula, de manera que la carga central para la teoría $U(1) \times \mathbb{R}$ (*i.e.* los campos \widehat{X} y T) resulta ser $+2$. La forma funcional de las funciones de correlación en el límite cuando $k \rightarrow 0$ requiere un análisis cuidadoso por las características sutiles que surgen al hacer una continuación analítica en el plano de b complejo [113, 56]. Sin embargo, podemos continuar con nuestra especulación y asumir por un momento que una extensión de la correspondencia (2.174) entre las teorías de Liouville y WZW también es válida para $k = 0$. A este punto, la acción de sine-Liouville coincide con la acción de Liouville si a esta la suplementamos con un campo con $c = 1$ \widehat{X} . Esto se debe a la identificación $b^{-2} = k - 2$ y el hecho de que $Q = -\widehat{Q}$ cuando $k = 0$. Por otra parte, cuando $k = 0$ la interacción de sine-Liouville (3.5) corresponde efectivamente a la constante cosmológica de Liouville $e^{i\widehat{\varphi}/\sqrt{2}}$. Esta coincidencia sugestiva entre ambas acciones puede ser también probada al nivel de las funciones de correlación. De hecho, asumiendo que la conjetura FZZ es válida en el límite cuando $k \rightarrow 0$ y luego, al invocar la fórmula de Ribault y Teschner, es posible concluir que los correladores del modelo de sine-Liouville coinciden con los de la teoría de Liouville (por el bosón libre \widehat{X}) en $k = 0$ [32]. Para ver esto, remarquemos los siguientes hechos sorprendentes: Primero, observemos

que, como estamos tomando el límite $R = \sqrt{k/2}$ tendiendo a cero (*i.e.* el radio asintótico del cigarro), solamente hace falta observar que es lo que sucede con los modos $m = \bar{m} = 0$ en el cigarro. Desde el punto de vista del modelo T-dual, el radio dual $\tilde{R} \sim 1/\sqrt{k}$ del cilindro tiende a infinito y los estados con momento finito $p = \frac{m}{\sqrt{k}}$ (dejando p fijo) se desacoplan generando un factor $U(1)$ de la forma $\sim e^{i\sqrt{2}p\hat{X}}$ en las funciones de correlación. En segundo lugar, uno puede mostrar (ver [33]) que para $k = 0$ la fórmula (2.174) es

$$\langle \Phi_{j_1, m_1, \bar{m}_1}^{\omega_1}(z_1) \dots \Phi_{j_N, m_N, \bar{m}_N}^{\omega_N}(z_N) \rangle_{WZW} \sim \prod_{i=1}^N \mathcal{R}_0(j_i, 0) \langle V_{-\frac{i}{\sqrt{2}}j_1}(z_1) \dots V_{-\frac{i}{\sqrt{2}}j_N}(z_N) \rangle_{S_L[\mu]}; \quad (5.21)$$

con $p_1 + p_2 + \dots + p_N = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_N = M - N + 2 = 0$. La función $\mathcal{R}_k(j, m)$ es el coeficiente de reflexión del modelo de WZW, que está dado por la función de dos puntos (2.172). El surgimiento de estos coeficientes de reflexión (uno para cada operador de vértice) se atribuye en última instancia al hecho de que el momento de los operadores de vértice fueran los reflejados con la transformación de Weyl $\hat{j}_i = -1 - j_i$ en vez de j_i (notemos que el correlador de Liouville en (5.21) escala como $\mu^{\hat{j}_1 + \dots + \hat{j}_N + 1}$). También observemos en (5.21) que, además de las s integrales en las inserciones de los apantallamientos requerida por los correladores de Liouville, implícitamente tenemos también $M = N - 2$ integrales adicionales sobre las variables v_t donde M operadores $V_{-1/2b}(v_t)$ están insertados. Esto es consistente con lo que uno esperaría ya que $k = 0$ implica que $b^2 = -1/2$ y luego los campos degenerados $V_{-1/2b}$ resultan coincidir con los operadores de apantallamiento V_b . Luego, cuando $k = 0$ las integrales sobre estas variables v_t no son más que inserciones de apantallamiento de las funciones de correlación de Liouville [33], y esta es la razón por la que no las escribimos explícitamente en (5.21). Esto muestra que la fórmula de Ribault y Teshner resulta ser consistente con la conjetura FZZ. Esto es, cuando $k = 0$ sine-Liouville coincide con el producto entre la teoría de Liouville y un bosón libre con $c = 1$, de manera que en el caso particular $k = 0$, la ecuación (2.174) realmente establece la identidad entre funciones de correlación de N puntos en la teoría de sine-Liouville y funciones de correlación de N puntos en el agujero negro 2D. Más allá de todo esto, debemos enfatizar que todas estas discusiones están fuertemente basadas en la asunción de que estas teorías de campos conformes están bien definidas en el régimen $k < 2$ y, hasta donde sabemos, esto está lejos de ser claro.

5.3.4. Generalización de la fórmula de Ribault y Teshner

En un trabajo muy reciente, Y. Hikida y V. Schomerus [5] probaron analíticamente una generalización sorprendente de la fórmula de Ribault y Teshner (2.174). Ésta, como (2.174), relaciona los correladores del modelo de WZW escritos en la base μ con los de la teoría de Liouville, pero esta vez con la teoría de la hoja de mundo descrita en una variedad de género arbitrario g . La fórmula toma la forma

siguiente

$$\left\langle \prod_{\nu=1}^N V_{j_\nu}(\mu_\nu | z_\nu) \right\rangle_{(\lambda, \varpi, \tau)}^H \sim |\Theta_N^g(u, y_i, z_\nu, \tau)|^2 \left\langle \prod_{\nu=1}^N V_{\alpha_\nu}(z_\nu) \prod_{i=1}^{N+2(g-1)} V_{-1/2b}(y_i) \right\rangle_\tau^L, \quad (5.22)$$

donde la función Θ_N^g depende de los puntos z_ν donde se encuentran los N operadores de vértice, del moduli de la variedad y de las raíces y_i de una función meromorfa que también depende de los puntos z_ν . Sería interesante utilizar esta fórmula para intentar generalizar la correspondencia “retorcida” que describimos en la sección anterior, pero para g arbitrario y no solamente $g = 0$ (topología esférica).

6. Conclusiones

Uno de los temas que despertó más interés en el estudio de la teoría de cuerdas fue el de las llamadas dualidades. El hecho de que existan teorías con características físicas muy diferentes que son descripciones de una misma realidad es una noción sorprendente. Existen teorías duales con distintas dimensiones del espacio tiempo, teorías de gravedad duales a teorías en el espacio plano, o bien teorías que describen geometrías complementarias en regímenes opuestos de sus acoplamientos. Todos estos casos nos hacen pensar que muchos conceptos físicos no son tan fundamentales como pensamos, sino más bien que son nociones emergentes de las distintas formas que tenemos de modelar la realidad.

La dualidad FZZ es uno de estos casos; ésta establece la correspondencia entre una teoría que describe la dinámica de las cuerdas en un agujero negro 2D (o bien en el espacio AdS_3) y otra teoría de cuerdas en un espacio plano en presencia de un dilatón lineal y un potencial taquiónico.

El hecho de que la única demostración de la correspondencia FZZ hasta ahora conocida recurra esencialmente a nociones de supersimetría podría hacernos pensar que la mera existencia de esta dualidad está relacionada con las propiedades beneficiosas que otorga la supersimetría. No obstante, la dualidad existe a nivel bosónico, donde la supersimetría no desempeña ningún papel más que el de oficiar como elemento auxiliar para permitir su demostración. Por otra parte, usualmente se cree que la dualidad FZZ es un ejemplo de un conjunto de fenómenos mucho más general, el que sería interesante entender en mayor profundidad. Ésta fue, en parte, la motivación para este trabajo.

El principal resultado original de esta tesis, entre otros, es el haber encontrado un nuevo modelo dual para describir la dinámica de la teoría de cuerdas bidimensional en las cercanías de un agujero negro. En particular, esto generaliza la conjetura de Fateev, Zamolodchikov y Zamolodchikov. La dualidad “retorcida” presentada aquí es una teoría de cuerdas en dos dimensiones formada por la perturbación de mayor momento ($n = 2$) de la teoría del dilatón lineal. Este resultado principal se presenta en la ecuación recuadrada (4.16).

Además de la novedad de esta dualidad, los caminos de la demostración de la misma son también originales en algún sentido. Esta es la primera demostración de una dualidad de este tipo a nivel de las funciones de correlación y que no recurre a la supersimetría, sino simplemente a las propiedades de simetría conforme de las teorías de campos involucradas. Esto nos confirma el hecho de que este tipo de dualidades no están necesariamente relacionadas con la supersimetría, ya que, a diferencia de la dualidad FZZ original, no fue necesario recurrir a ninguna otra simetría más allá de las que ya eran propias de las teorías involucradas para probar la dualidad.

A diferencia de la teoría de sine-Liouville, que es la que aparece en la versión original de FZZ y que está construida con perturbaciones de vórtice con $|n| = 1$, el modelo sigma no lineal presentado en este trabajo se construyó con perturbaciones

taquiónicas de modos de momento con $n = 1$ y $n = 2$. Hemos discutido que estas perturbaciones están relacionadas con la perturbación taquiónica de la teoría de sine-Liouville a través de las representaciones conjugadas dadas por el automorfismo (4.13), y este a su vez está presumiblemente relacionado con las representaciones conjugadas de operadores en el modelo de WZW [75]. Es en este sentido que la dualidad presentada aquí es una generalización de la dualidad FZZ original, ya que las perturbaciones de esta estarían relacionadas con las nuestras a través de una especie de “deformación” o “retorcimiento”.

La afirmación de la dualidad presentada en (4.16) establece un diccionario que permite expresar cualquier función de N puntos del modelo de WZW en $SL(2, \mathbb{R})_k$ en la topología de la esfera en términos de las funciones de correlación de un fondo de dilatón lineal perturbado por un potencial taquiónico. Hemos dado la prescripción precisa para calcular estos correladores utilizando las técnicas de gases libres de Coulomb. De hecho, una vez tomada esa prescripción, las técnicas de gases libres de Coulomb son uno de los ingredientes fundamentales para poder expresar los correladores adecuadamente y así probar la correspondencia. Por estos motivos, esta herramienta fue revisada en la sección 2, en el contexto de la teoría de Liouville. Uno de los resultados derivados de esta revisión es el cálculo de la función de partición de la teoría de Liouville cuyo resultado se presentó en (2.140). Este resultado era ya conocido (*e.g.* [61]) pero aquí se obtuvo directamente haciendo el cálculo con las técnicas en cuestión y utilizando una prescripción en los operadores de apantallamiento para extender analíticamente los resultados.

La demostración de la correspondencia “retorcida” que presentamos aquí se basó en dos pasos: El primero consistió en reescribir los campos realizando una transformación $O(2)$ sobre ellos. Luego de la transformación, la teoría del dilatón lineal acoplada con materia $c = 1$ a través de la perturbación taquiónica se convirtió en la teoría de Liouville acoplada a materia $c < 1$ a través de un potencial taquiónico que posee un operador degenerado de la teoría de Liouville. El segundo paso fue notar que tanto los correladores de Liouville que aparecen como los correladores de la teoría con $c < 1$, conforman el lado derecho de la fórmula de Ribault-Teschner. De hecho la función auxiliar $F_k(z_1, \dots, z_N; w_1, \dots, w_M)$ que aparece en esa fórmula resultó coincidir con el correlador que proviene del sector de la teoría de dilatón lineal. Por lo tanto, el resultado que presentamos aquí resulta ser también una realización de campos libres de la fórmula de Ribault-Teschner.

En lo que respecta a las simetrías de la teoría dual que presentamos aquí, y por construcción, uno espera que esos correladores posean la simetría de su dual; esto es, la simetría $sl(2)_k$. La realización de esta simetría es altamente no trivial. Resulta ser, que el hecho de que $\mathcal{T}_{j_i, m_i, \bar{m}_i}$ y $\tilde{\mathcal{T}}_{j_i, m_i, \bar{m}_i}$ transforman de manera diferente ante la acción de los generadores J_n^\pm de $\widehat{sl}(2)_k$ junto con el hecho de que el operador de la perturbación $n = 2$, $\mathcal{T}_{1-k, k, k}$, también transforma no trivialmente bajo esos generadores, hacen que la combinación de ambas no trivialidades se combinen de manera de comportarse adecuadamente bajo $sl(2)_k$.

Perturbaciones taquiónicas del fondo del dilatón lineal que involucran modos de momento mayor a uno, fueron también estudiadas recientemente por Mukherjee, Mukhi y Pakman en [6]. Allí se presentó a la cojetura FZZ desde una perspectiva generalizada. Una de las tareas pendientes es entender mejor la relación entre la dualidad presentada aquí y el trabajo [6], y también, entender mejor la relación con la correspondencia FZZ en su versión original.

Vale la pena remarcar que nuestro análisis y el resultado (4.16) sólo es válido para la topología de la esfera. Como vimos en la sección 2, la teoría de las interacciones de la cuerda cerrada orientable es completa cuando podemos estudiar las funciones de correlación de la teoría descrita en cualquier variedad compacta orientable bidimensional. Sin embargo, es ciertamente plausible que una generalización de la dualidad aquí presentada para género arbitrario sea también válida. Esta afirmación está motivada por el reciente trabajo de Hikida y Schomerus [5]. En éste, se presenta una generalización de la fórmula de Ribault y Tschner (2.174) pero para género arbitrario de la hoja de mundo. Luego, dado que la demostración de nuestra dualidad se basa en la realización del mapa de Ribault-Tschner, la generalización del mismo permite conjeturar que la dualidad aquí presentada ha de admitir una generalización para género arbitrario. Por lo tanto, con esa conjetura completa, tendríamos que las dos teorías son duales a todo orden en la expansión perturbativa de la teoría de cuerdas.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al director de este trabajo de tesis, Gastón Giribet. La variedad de su interés como físico y su ímpetu para generar espacios de discusión sobre física teórica en la facultad y el IAFE son dignas de admirar. En particular, su constante presencia en mi trabajo, tanto personal como virtual en cualquier lugar del mundo, su prontitud para contestar mis permanentes dudas o para referenciarme la bibliografía adecuada, entre otras cosas, hicieron todo este proceso de aprendizaje más ameno, rico e interesante. Quiero agradecerle especialmente por involucrarme directamente en su trabajo como investigador, permitiéndome realizar mis primeros pasos como tal. Quiero agradecer también a Alberto Güijosa y a Mariano Chernicoff, por su hospitalidad al recibirme en la UNAM, México, donde parte de este trabajo fue realizado y presentado; a Yann, mi compañero de toda la física anterior a esta tesis; a Alan, por todas las discusiones interesantes que compartimos y a los doctorandos del IAFE por la buena onda.

Luego me gustaría agradecer a la gente que no tuvo que ver directamente con este trabajo pero sí en todo lo que respecta a la vida de todos los días. A Cinzia (colei che è chiamata la regina del \LaTeX), che ho conosciuto poco tempo prima di cominciare questa tesi e che è stata sempre vicina a me, virtualmente o realmente, e che stará vicina a me per molto più tempo; e anche mi ha insegnato a usare il \LaTeX ! A los pibes (Fede, Marito, Midget, PP, QQ, Ruso, Tano, Tibu y el Villa), que soportan mi “media hora de cuelgue” cuando nos juntamos; especialmente a Mario que siempre se interesa inocentemente por lo que estudio. Y a mi familia que me bancan económicamente y apoyan mi decisión de ser científico; en particular a Paico, que siempre me deja pensando con sus preguntas del estilo: “Mati... vos que sos físico, ¿Porque...?”.

Referencias

- [1] G. Giribet, Nucl. Phys. **B737** (2006) pp. 209.
- [2] G. Giribet, Phys. Lett. **B637** (2006) pp. 192.
- [3] S. Ribault y J. Teschner, JHEP **0506** (2005) pp. 014.
- [4] S. Ribault, JHEP **0509** (2005) pp. 045.
- [5] Y. Hikida y V. Schomerus, H_3^+ WZNW model from Liouville field theory, [arXiv:0706.1030].
- [6] A. Mukherjee, S. Mukhi y A. Pakman, JHEP **0701** (2007) pp. 025.
- [7] S. Nakamura y V. Niarchos, JHEP **0510** (2005) pp. 025.
- [8] V. Fateev, *Relation between Sine-Liouville and Liouville correlation functions*, unpublished.
- [9] G. Giribet y M. Leoni, *A Twisted FZZ-like dual for the 2D Black Hole*, [arXiv:0706.1030].
- [10] D. Persson, *Coset Models and Singular Backgrounds in String Theory*, MSc thesis, Göteborg University, 2005. Available at fy.chalmers.se/~tfebn/Daniel_MScThesis.ps
- [11] J. Polchinski, *String theory, Vol. I*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge, 2005.
- [12] M. Green, J. Schwarz y E. Witten, *Superstring theory Vol. 1: Introduction*, Cambridge Monographs On Mathematical Physics, Cambridge, 1987.
- [13] P. Di Francesco, P. Mathieu y D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Springer, New York, 1997.
- [14] N. Seiberg, *Emergent spacetime*, Rapporteur talk at the 23rd Solvay Conference in Physics, December, 2005, [arXiv:hep-th/0601234].
- [15] S. Mukhi y C. Vafa, Nucl. Phys. **B407** (1993) pp. 667.
- [16] J. Distler y P. Nelson, Nucl. Phys. **B374** (1992) pp. 123.
- [17] S. Chauduri y J. Lykken, Nucl. Phys. **B396** (1993) pp. 270.
- [18] T. Eguchi, Phys. Lett. **B316** (1993) pp. 74.
- [19] M. Alimohammadi, F. Ardalan y H. Arfaei, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995) pp. 115.

- [20] H. Terao y K. Yamada, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993) pp. 2471.
- [21] H. Ishikawa y M. Kato, *Phys. Lett.* **B302** (1993) pp. 209.
- [22] T. Eguchi, H. Kanno y S. Yang, *Phys. Lett.* **B298** (1993) pp. 73.
- [23] K. Becker, *Strings, Black Holes and Conformal Field Theory*, PhD Thesis, University of Bonn, [arXiv:hep-th/9404157].
- [24] R. Dijkgraaf, E. Verlinde y H. Verlinde, *Nucl. Phys.* **B371** (1992) pp. 269.
- [25] K. Becker y M. Becker, *Nucl. Phys.* **B418** (1994) pp. 206.
- [26] M. Bershadsky y D. Kutasov, *Phys. Lett.* **B266** (1991) pp. 345.
- [27] S. Mukherji, S. Mukhi y A. Sen, *Phys. Lett.* **B275** (1992) pp. 39.
- [28] F. Nitti y M. Porrati, *JHEP* **0401** (2004) pp. 028.
- [29] S. Cremonini, *JHEP* **0510** (2005) pp. 014.
- [30] A. Koetsier, *Matrix Models of 2D String Theory in Non-trivial Backgrounds*, MSc. thesis, University of Utrecht, [arXiv:hep-th/0509024].
- [31] T. Takayanagi, *JHEP* **0507** (2005) pp. 050.
- [32] Y. Hikida y T. Takayanagi, *Phys. Rev.* **D70** (2004) pp. 126013.
- [33] G. Giribet y Yu Nakayama, *Int. J. Mod. Phys.* **A21** (2006) pp. 4003.
- [34] T. Eguchi, *Comptes Rendus Physique* **6** (2005) pp. 209.
- [35] S. Murthy, *JHEP* **0311** (2003) pp. 056.
- [36] V. Fateev, A.B. Zamolodchikov y Al. Zamolodchikov, unpublished.
- [37] A. Giveon y D. Kutasov, *Nucl. Phys.* **B621** (2002) pp. 303.
- [38] V. Kazakov, I. Kostov y D. Kutasov, *Nucl. Phys.* **B622** (2002) pp. 141.
- [39] K. Hori y A. Kapustin, *JHEP* **0108** (2001) pp. 045.
- [40] J. Maldacena, *JHEP* **0509** (2005) pp. 078; *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **3** (2006) pp. 1.
- [41] D. Israel, A. Pakman y J. Troost, *Nucl. Phys.* **B710** (2005) pp. 529.
- [42] A. Giveon, A. Konechny, A. Pakman y A. Server, *JHEP* **0310** (2003) pp. 025.
- [43] Y. Kazama y H. Suzuki, *Nucl. Phys.* **B321** (1989) pp. 232.

-
- [44] Y. Kazama y H. Suzuki, Phys. Lett. **B216** (1989) pp. 112.
- [45] V. Knizhnik, A. Polyakov y A. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. **A3** (1988) pp. 819.
- [46] F. David, Mod. Phys. Lett. **A3** (1988) pp. 1651.
- [47] J. Distler y H. Kawai, Nucl. Phys. **B321** (1989) pp. 509.
- [48] A. Stoyanovsky, *A relation between the Knizhnik–Zamolodchikov and Belavin–Polyakov–Zamolodchikov systems of partial differential equations*, [arXiv:math-ph/0012013].
- [49] V. Schomerus, Phys. Rept. **431** (2006) pp. 39.
- [50] A. Polyakov, Phys. Lett. **B103** (1981) pp. 207.
- [51] Yu Nakayama, Int. J. Mod. Phys. **A19** (2004) pp. 2771.
- [52] J. Teschner, Class. Quant. Grav. **18** (2001) pp. R153.
- [53] J. Teschner, Int. J. Mod. Phys. **A19S2** (2004) pp. 436.
- [54] J. Teschner, Phys. Lett. **B363** (1995) pp. 65.
- [55] A.B. Zamolodchikov y Al. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B477** (1996) pp. 577.
- [56] Al. Zamolodchikov, *On three-point Function in Minimal Liouville Gravity*, presented at the International Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems, Dubna, January 2004, [arXiv:hep-th/0505063].
- [57] H. Dorn y H. Otto, Phys. Lett. **B291** (1992) pp. 39.
- [58] V. Fateev y A. Litinov, JETP Letters **84** (2006) pp. 531.
- [59] V. Dotsenko y V. Fateev, Nucl. Phys. **B251** (1985) pp. 691.
- [60] M. Goulian y M. Li, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) pp. 2051-2055.
- [61] Al. Zamolodchikov, *Perturbed Conformal Field Theory on Fluctuating Sphere*, arXiv: hep-th/0508044.
- [62] V. Dotsenko, Nucl. Phys. **B338** (1990) pp. 747.
- [63] V. Dotsenko, Nucl. Phys. **B358** (1991) pp. 547.
- [64] V. Dotsenko, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) pp. 3601.
- [65] E. Witten, Phys. Rev. **D 44** (1991) pp. 314.

- [66] G. Mandal, A. Sengupta y S. Wadia, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) pp. 1685.
- [67] Y. Hikida, K. Hosomichi y Y. Sugawara, *Nucl. Phys.* **B589** (2000) pp. 134.
- [68] M. Wakimoto, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) pp. 605.
- [69] G. Horowitz y D. Welch, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) pp. 328.
- [70] P. Di Francesco y D. Kutasov, *Nucl. Phys.* **B375** (1992) pp. 119.
- [71] J. Maldacena y H. Ooguri, *J. Math. Phys.* **42** (2001) pp. 2929-2960.
- [72] J. Maldacena y H. Ooguri, *Phys. Rev.* **D65** (2002) pp. 106006.
- [73] G. Giribet y C. Núñez, *JHEP* **0106** (2001) pp. 010.
- [74] G. Giribet y C. Núñez, *JHEP* **0006** (2000) pp. 033.
- [75] G. Giribet y D. López-Fogliani, *JHEP* **0406** (2004) pp. 026.
- [76] A. Belavin, A. Poyakov y A.B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241** (1984) pp. 333.
- [77] V. Knizhnik y A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B247** (1984) pp. 83.
- [78] J. Teschner, *Nucl. Phys.* **B571** (2000) pp. 555.
- [79] J. Teschner, *Nucl. Phys.* **B546** (1999) pp. 369.
- [80] J. Teschner, *Nucl. Phys.* **B546** (1999) pp. 390.
- [81] J. Teschner, *Phys. Lett.* **B521** (2001) pp. 127.
- [82] B. Ponsot, *Nucl. Phys.* **B642** (2002) pp. 114.
- [83] V. Fateev y A. Zamolodchikov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **43** (4) (1987) pp. 657.
- [84] G. Giribet, *J. Math. Phys.* **48** (2007) pp. 012304.
- [85] G. Giribet y C. Simeone, *Int. J. Mod. Phys.* **A20** (2005) pp. 4821.
- [86] G. Giribet, *Phys. Lett.* **B628** (2005) pp. 148.
- [87] Y. Satoh, *Nucl.Phys.* **B629** (2002) pp. 188.
- [88] K. Hosomichi y Y. Satoh, *Mod.Phys.Lett.* **A17** (2002) pp. 683.
- [89] K. Hosomichi, K. Okuyama y Y. Satoh, *Nucl.Phys.* **B598** (2001) pp. 451.
- [90] N. Ishibashi, K. Okuyama y Y. Satoh, *Nucl. Phys.* **B588** (2000) pp. 149.

-
- [91] Y. Satoh, Nucl. Phys. **B513** (1998) pp. 213.
- [92] P. Minces y C. Núñez, Phys. Lett. **B647** (2007) pp. 500.
- [93] D. Sahakyan y T. Takayanagi, JHEP **0606** (2006) pp. 027.
- [94] V. Niarchos, JHEP **0603** (2006) pp. 045.
- [95] K. Hosomichi y S. Ribault, JHEP **0701** (2007) pp. 057.
- [96] K. Hosomichi, *A Correspondence between $H+(3)$ WZW and Liouville theories on discs*, Proceedings of Cargese Summer School on Strings and Branes: The Present Paradigm for Gauge Interactions and Cosmology, Cargese, France (2006), [arXiv:hep-th/0701260].
- [97] J. McGreevy, J. Teschner y H. Verlinde, JHEP **0401** (2004) pp. 039.
- [98] P. Baseilhac y V. Fateev, Nucl. Phys. **B 532** (1998) pp. 567.
- [99] T. Fukuda y K. Hosomichi, JHEP **0109** (2001) pp. 003.
- [100] T. Fukuda y K. Hosomichi, Nucl. Phys. **B635** (2002) pp. 215.
- [101] G. Giribet, Class. Quant. Grav. **20** (2003) pp. 2119.
- [102] J. Karczmarek, J. Maldacena y A. Strominger, JHEP **0601** (2006) pp. 039.
- [103] I. Kostov y V. Petkova, Theor. Math. Phys. **146** (2006) pp. 108; Teor. Mat. Fiz. **146** (2006) pp. 132.
- [104] I. Kostov y V. Petkova, Nucl. Phys. **B770** (2007) pp. 273.
- [105] Al. Zamolodchikov, *Gravitational Yang-Lee Model. Four Point Function*, [arXiv:hep-th/0604158].
- [106] Al. Zamolodchikov y A. Belavin, *Moduli integrals, ground ring and four-point function in minimal Liouville gravity*, Proceedings of the International Workshop “Polyakov’s String: Twenty Five Years After”, Chernogolovka, [arXiv:hep-th/0510214].
- [107] V. Fateev, *Normalization Factors, Reflection Amplitudes and Integrable Systems*, [arXiv:hep-th/0103014].
- [108] S. Iguri y C. Núñez, *Coulomb integrals for the $SL(2, R)$ WZW model*, [arXiv:0705.4461].
- [109] A. Nichols, *The $SU(2)_0$ WZNW model*, School and Workshop on Logarithmic Conformal Field Theory, Tehran, Iran, 2001.

-
- [110] A. Nichols, Phys. Lett. **B516** (2001) pp. 439.
- [111] I. Kogan y A. Nichols, Int. J. Mod. Phys. **A17** (2002) pp. 2615.
- [112] A. Nichols, JHEP **0204** (2002) pp. 056.
- [113] V. Schomerus, JHEP **0311** (2003) pp. 043.