

Buenos Aires, 1 de junio de 2022

Dr. Juan Carlos Reboreda
Decano de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Estimado Sr. Decano,

Me dirijo a Ud. con motivo de acercarle el proyecto titulado: “La danza de los péndulos”, que fue desarrollado como parte de la materia Laboratorio 2 del Departamento de Física, en la cual soy profesora a cargo. El proyecto se trata del desarrollo de una escultura móvil interactiva que permite comunicar ciertos conceptos sobre la Física (fenómenos ondulatorios, *aliasing*) y, además, busca fomentar la conciencia ambiental y la importancia del uso de las energías renovables. En esta ocasión, solicito su aprobación para que se gestione su armado y montaje en el pulmón verde de Ciudad Universitaria.

En líneas generales, el desarrollo consiste en un sistema de péndulos desacoplados de distinta longitud iluminado por LEDs, los cuales son alimentados por celdas solares. En el documento adjunto se pueden observar más detalles del desarrollo. El trabajo llevado a cabo cubre varios objetivos académicos y de comunicación científica, que se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Realización de un experimento, en los temas asociados al laboratorio de ondas, que incluya todas las instancias del desarrollo experimental: diseño, modelado, estimación de incertezas, realización de modelos a escala, diseño experimental, estudio de presupuestos, construcción y caracterización.

2. Desarrollo de capacidades para el trabajo colectivo y colaborativo. En el trabajo participan todos los alumnos (formando grupos de tres personas) y los docentes del curso. Cada grupo de estudiantes fue responsable de la realización de determinadas tareas, las cuales fueron discutidas junto a todo el curso. Las discusiones fueron muy ricas (estilo *brainstorming*) y de ellas fue surgiendo cómo progresar con el proyecto. La idea principal de esta modalidad de trabajo es que todos los alumnos compartan sus avances y resultados y la colaboración entre ellos, independientemente del grupo al que pertenezcan. Asimismo, todos participaron en la escritura del documento, cumpliendo el rol de “escritores” o “editores” en las distintas secciones del manuscrito.

3. Fortalecimiento de capacidades en comunicación de la ciencia. El sistema de péndulos podrá ser usado en las semanas de las ciencias y en las materias pertinentes de las carreras de la FCEyN. Al final del semestre se espera generar un cuadernillo con explicaciones que estén al alcance de los estudiantes en distintos niveles educativos.

Por último, considero que sería una experiencia única para los alumnos y para nuestra Facultad que se complete la construcción de la escultura móvil interactiva en sus jardines.

Sin otro particular, lo saluda atentamente,

Dra. M. G. Capeluto
Profesora Adjunta
Laboratorio 2, 1^{er} cuatrimestre de 2022, turno tarde.

La danza de los péndulos

I. Andersen, N. G. Brucks, M. A. A. Carrero, D. Catz, T.A. Ciccarella, N. Colantuono, F. Domato, C. Entrambasaguas Vacaflor, M.R.Ferressini, C. Gabaldón, B. Gilardon, M. E. González, A. F. González, F. Guglielmucci Nazar, F. Huxhagen, S. Iannucci, L. C. Johnson, F. N. Nieto, T. Nollmann, D. Pérez, J. Pineau, J. Rodríguez Gallo, F. Rouquaud M. Ruano, V. E. Salari, R. Schiaffino, J. Szereszewski, E. Urtubey, I. González Vandam, M. Venegas.

Alumnos y alumnas de la Cátedra Laboratorio 2 TT, 1er cuatrimestre 2022

*M. G. Aparicio, S. Benas, S. Bordakevich, P. Gaztañaga, M. G. Capeluto
Docentes de la Cátedra Laboratorio 2 TT, 1er cuatrimestre 2022
Dto. de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Universidad de Buenos Aires.*

Resumen

En este trabajo se propone el desarrollo y construcción de una escultura móvil interactiva para ser colocada en el pulmón verde de Ciudad Universitaria (espacio que se encuentra entre Pabellón 1, IAFE y Cero + Infinito). La misma consiste en un sistema de péndulos que al oscilar ilustran conceptos sobre la física de los fenómenos ondulatorios (ondas propagantes, ondas estacionarias, batidos, etc) y sobre las mediciones (*aliasing*). Se eligió iluminar la escultura con LEDs alimentados por celdas solares, buscando fomentar la conciencia ambiental y la importancia del uso de las energías renovables.

1- Introducción y Motivación

Elegimos a la física por la maravilla y por la sorpresa, porque nos acerca (*ma non troppo*) a una nueva interpretación del mundo que nos rodea y de nosotros mismos como parte de él. Sin embargo, existe una tendencia en la física, creciente a medida que nos adentramos en la carrera, de la que hay que estar atentos: un palpitante individualismo. Y sólo nos basta un ejemplo para dar cuenta de esta tendencia. La mayoría de nosotros recién estamos en el segundo año de la carrera y ninguno osaría cuestionar la importancia de la entidad a la que llamamos *electrón* en la física moderna. Sin embargo, los electrones pasaron inadvertidos durante tantos siglos que terminaron por contagiarse del penoso individualismo: es sabido que la velocidad de un electrón individual es mucho mayor que la velocidad a la que se mueve, en promedio, el inconmensurable número de electrones que forman una corriente, conocida como velocidad de deriva (millones de kilómetros por hora en comparación a unos escuetos metros por hora [1]).

Y quienes hacemos de la física nuestra compañera de camino no escapamos a este individualismo. Algún baqueano que merodee los pasillos del Pabellón 1 un miércoles por la tarde advertirá esta situación, encontrándose con una imagen desoladora si decide entrar al Laboratorio de Ondas: hallará, tal vez, a la pañolera en su puesto o a algún ayudante esperando a ser necesitado, pero no verá a los estudiantes de Laboratorio 2. Estaremos encerrados en cuartos, cada uno con su grupo, cada uno con sus experimentos y sus sensibles mediciones; y este es el insoslayable orden de las cosas en esta carrera y en el camino que ofrece. Sin embargo, es innegable que también hay algo disruptivo en la física que rechaza el *statu quo* para sentar nuevas bases. Y de esto también aprendemos. A continuación, se presenta el intento de los alumnos de Laboratorio 2 de superar este individualismo construyendo algo de forma colectiva y conjunta, digresión que llamamos “La danza de los péndulos”.

En este trabajo se propone la construcción de una escultura móvil interactiva que ilustra conceptos sobre la física y las mediciones. Además busca fomentar la conciencia ambiental y la importancia del uso de las energías renovables. Esta escultura consiste en un sistema de péndulos oscilantes no acoplados, que ilustran ciertos conceptos sobre la física de sistemas ondulatorios y las mediciones. Durante las horas nocturnas, los péndulos son iluminados por LEDs alimentados por celdas solares, las cuales se cargan durante el día, de manera que no se necesita energía de la red eléctrica. Se propone así, el desarrollo, diseño y construcción de dicha escultura, para ser colocada en el pulmón verde de Ciudad Universitaria (espacio que se encuentra entre Pabellón 1, IAFE y Cero + Infinito).

Los péndulos que conforman el dispositivo, tienen longitudes diferentes que son especialmente elegidas para que sus períodos guarden una relación particular con el período del péndulo principal. Como consecuencia de esto, si se los suelta en conjunto, los mismos se irán desincronizando a medida que pasa el tiempo, hasta volver a alinearse tras un determinado intervalo de tiempo. En la figura 1 se muestra un ejemplo del dispositivo de péndulos del proyecto.

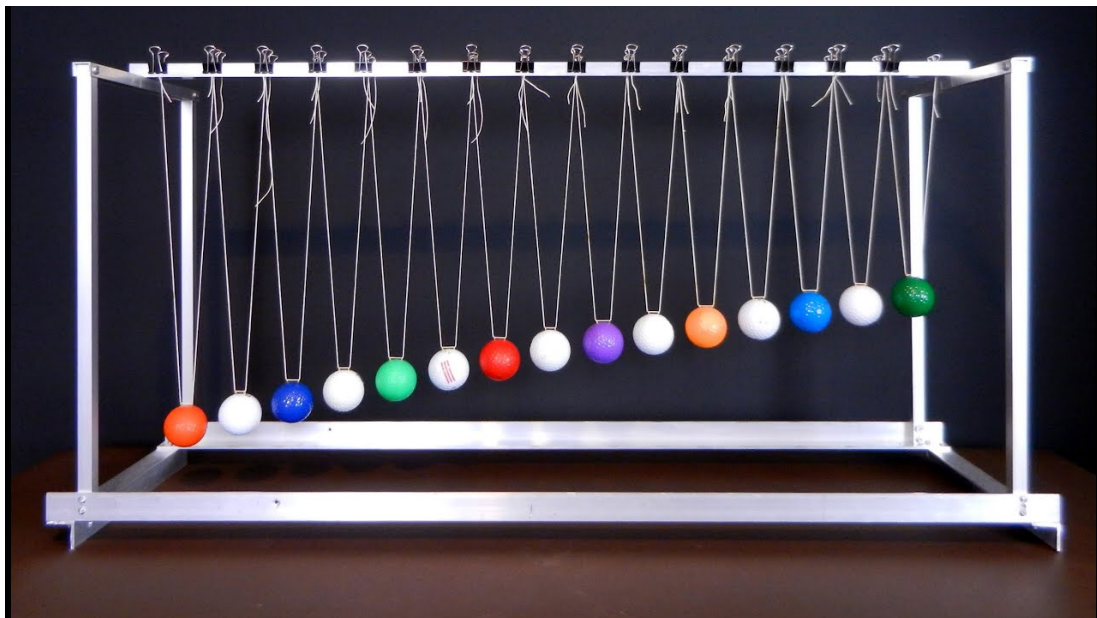


Figura 1: Modelo en miniatura del sistema de péndulos acoplados a construir. Las dimensiones del sistema de este proyecto serán adaptadas para que resulte llamativo para el observador. Imagen obtenida de [2].

Una de las principales motivaciones para este proyecto es el hecho de que a pesar de estar trabajando con un fenómeno tan simple como el de múltiples péndulos oscilando de manera independiente, la danza de los mismos posee una enorme riqueza en cuanto a los conceptos físicos que intervienen. Es por eso que a pesar de tratarse de un dispositivo relativamente simple, posee un enorme potencial didáctico.

En el movimiento colectivo de los péndulos se observan distintas figuras que se asemejan a ondas propagantes, ondas estacionarias, batidos y movimientos aleatorios. Cuando los períodos espaciales son grandes, se describe una oscilación armónica.^[2] Sin embargo, algunas de las figuras que se observan posteriormente se pueden describir como un fenómeno de *aliasing*, que surge por tener un número finito de péndulos. Es decir, si la oscilación en el espacio se describe como una onda transversal unidimensional continua, se puede pensar que los péndulos sub-muestran puntos en esa función, de manera de observar una frecuencia aparente distinta a la real.^[3]

El sistema podría resultar valioso durante las visitas a la Facultad en eventos como la Semana de la Física o la Noche de los Museos ya que, además de presentar un fenómeno que resulta fascinante a la vista, posibilita observar y explicar múltiples temas de distintos grados de complejidad. Se puede tratar desde la dependencia de la frecuencia de oscilación con la longitud de los péndulos, hasta el comportamiento colectivo que puede ser explicado a través de fenómenos ondulatorios. La danza de los péndulos, además de tener la capacidad de asombrar desde lo visual, genera la curiosidad en el observador de comprender las razones detrás del fenómeno que se observa.

El sistema construido incluiría en su estructura indicaciones acerca de los conceptos implicados en su funcionamiento, en referencia a los fenómenos ondulatorios y a la iluminación. Además, se indicará cómo accionar a los péndulos, para que inicien su movimiento sincronizadamente, de manera tal que cualquier persona tendría la capacidad de poner en marcha su danza. Gracias a esto, el dispositivo resultaría accesible a toda la comunidad de la Facultad para maravillarse con este fenómeno.

En las siguientes secciones se desarrolla la propuesta para la construcción del dispositivo. En la sección 2 se expone el desarrollo teórico necesario para calcular las longitudes de los péndulos. En la sección 3 se muestran algunos resultados de las simulaciones. Luego, en la sección 4, se presenta el montaje experimental y se ofrecen propuestas para su armado. En la sección 5 se analiza el presupuesto necesario para armarlo. Finalmente, en la sección 6 se muestran las conclusiones del proyecto.

2 - Descripción y desarrollo teórico

Tal como se mencionó con anterioridad, la propuesta consiste en armar un sistema de péndulos no acoplados de distinta longitud, cuyas longitudes están especialmente elegidas para que durante la oscilación de los mismos se observen distintas figuras en el espacio. En esta sección vamos a desarrollar el modelo que permite estimar las longitudes.

Supongamos que tenemos un sistema de péndulos no acoplados de distinta longitud, con las mismas condiciones iniciales para todos, tal como se esquematiza en la figura 2.

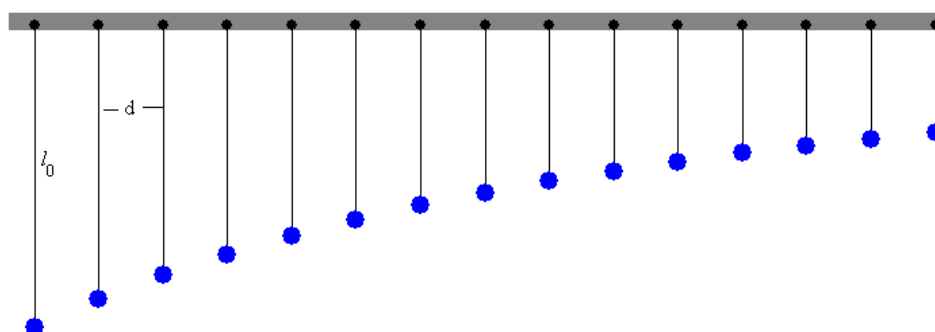


Figura 2: Esquema del sistema de péndulos equidistantes, indicando la longitud de péndulo más largo l_0 y la distancia entre ellos d .

La ecuación de movimiento de un péndulo simple está dada por

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{l} \sin(\theta), \quad (1)$$

siendo θ el ángulo del péndulo medido desde la vertical, t el tiempo, g la aceleración de la gravedad, y l el largo del péndulo. Si usamos la aproximación de pequeñas oscilaciones (θ pequeño) obtenemos

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{l} \theta. \quad (2)$$

La solución general para pequeñas oscilaciones es

$$\theta(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

En ella, A es la amplitud de la oscilación, ω su frecuencia angular y φ su fase inicial. Notemos que reemplazando la ecuación 3 en la ecuación 2, podemos obtener ω y con ésta el período T_0 , como se muestra en la ecuación 5.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_0}}, \quad (4)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}. \quad (5)$$

Despejando llegamos a que la longitud del péndulo es

$$l_0 = \frac{T_0^2}{4\pi^2} g. \quad (6)$$

A su vez, podemos definir en cuánto tiempo se completará una oscilación de nuestro primer péndulo de la siguiente manera

$$T_0 = \frac{\tau}{N} \quad (7)$$

donde N es la cantidad de ciclos de este primer péndulo y τ es el tiempo en el que transcurren esas N oscilaciones. Reemplazando la ecuación 7 en la ecuación 6 obtenemos la longitud del primer péndulo en función del número de oscilaciones

$$l_0 = \frac{\tau^2}{N^2 4\pi^2} g \quad (8)$$

y sustituyendo en la ecuación 4 obtenemos una expresión para la frecuencia angular

$$\omega_0 = \frac{2\pi N}{\tau}. \quad (9)$$

Aún nos queda determinar estos valores para los demás péndulos, para esto impondremos que en los péndulos subsiguientes la cantidad de oscilaciones, es decir N , aumente de a 1. Por lo tanto, mientras el primer péndulo tiene N ciclos, el siguiente tiene $N+1$ en el mismo tiempo τ . De esta manera, para el siguiente péndulo tendremos

$$l_1 = \frac{\tau^2}{(N+1)^2 4\pi^2} g \quad (10)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi(N+1)}{\tau}. \quad (11)$$

Luego, la longitud y la frecuencia angular del péndulo n-ésimo será

$$l_n = \frac{\tau^2}{(N+n)^2 4\pi^2} g \quad (12)$$

$$\omega_n = \frac{2\pi(N+n)}{\tau} \quad (13)$$

Una vez determinadas estas cantidades para todos los péndulos, es relevante preguntarnos sobre los patrones que se generarán por la combinación de largos que componen este sistema de péndulos. Para esto, calculamos la diferencia de fase $\delta\phi$ entre dos péndulos adyacentes, ya que es lo que va a generar estos patrones. Dado que los péndulos tienen períodos distintos, la diferencia de fase va a variar a medida que aumente el tiempo. Esta se calcula de la siguiente forma

$$\delta\phi = (\omega_{n+1}t + \phi) - (\omega_n t + \phi) \quad (14)$$

Las fases iniciales ϕ son iguales ya que todos los péndulos tienen las mismas condiciones iniciales, por lo que podemos cancelarlas y llegar a la siguiente expresión

$$\delta\phi = \left[\frac{(N+n+1)2\pi}{\tau} - \frac{(N+n)2\pi}{\tau} \right] t = \frac{2\pi t}{\tau} \quad (15)$$

Así, para saber en qué momento los péndulos adyacentes estarán en fase, debemos plantear $\delta\phi = 2\pi$, es decir, todos los péndulos vuelven a su posición inicial en simultáneo. Despejando de la ecuación obtendremos $t = \tau$. En la figura figura 2 se observa el resultado de una simulación luego de transcurrido un tiempo τ luego de iniciado el movimiento (en la siguiente sección se mostrarán más resultados de simulaciones).

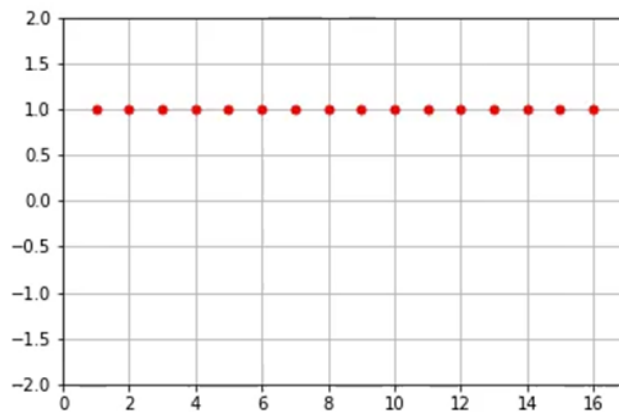


Figura 3: Posiciones de los péndulos (puntos rojos) en $t=\tau$, vista desde arriba.

Por otro lado, cuando imponemos $\delta\phi=\pi$, es decir, los péndulos adyacentes se encuentran en contrafase, llegamos a que $t=\tau/2$. En la figura 4 se observa el resultado de la simulación luego de transcurrido un tiempo $\tau/2$ del inicio del movimiento.

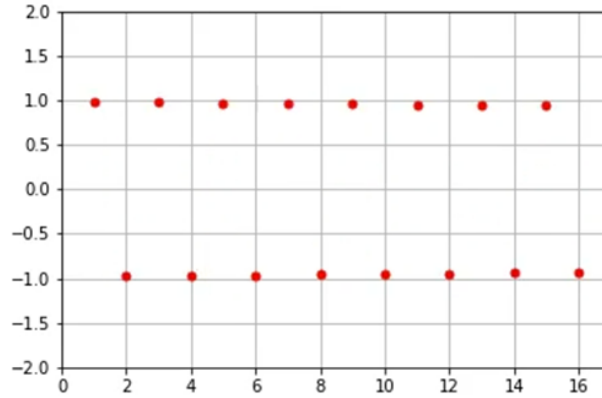


Figura 4: posiciones de los péndulos en $t = \frac{\tau}{2}$, vista desde arriba.

Cabe destacar que, a pesar de que los resultados se obtuvieron bajo la aproximación de pequeñas oscilaciones por simplicidad, este patrón ocurre de igual manera por fuera de esta aproximación. Para ver esto, se puede calcular el período de un péndulo por fuera del régimen de pequeñas oscilaciones. Haciendo esto, se llega a la integral

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos(\theta)}} d\theta, \quad (17)$$

la cual no tiene solución analítica. Sin embargo, uno debe observar que el resultado de dicha integral es una función de θ_0 , es decir, del ángulo inicial. Dado que para los resultados anteriores se había asumido que el ángulo inicial de todos los péndulos era el mismo, el período de cada péndulo será

$$T_i = \sqrt{\frac{l_i}{g}} \cdot f(\theta_0), \text{ por lo que se puede repetir el mismo argumento que se utilizó anteriormente.}$$

3 - Simulaciones

Empleando los modelos propuestos se realizaron simulaciones. Solo a modo ilustrativo se muestran dos de ellas:

En la primera, se observa una simulación para 100 péndulos con amplitud inicial de 90° respecto de la vertical, es decir, por fuera del límite de pequeñas oscilaciones. El resultado de las simulaciones se puede observar en tiempo real en este [link](https://editor.p5js.org/julianszere/full/rdAhPQb8S) (<https://editor.p5js.org/julianszere/full/rdAhPQb8S>), o en un video grabado en este [link](https://youtu.be/tzJITAj6AIE) (<https://youtu.be/tzJITAj6AIE>). Para esta simulación, se hizo que la danza entera tuviera una duración de 50 ciclos del péndulo más grande. Además, se resolvió numéricamente la ecuación diferencial (1), sin hacer aproximaciones de pequeñas oscilaciones. En la figura 5 se muestran algunas capturas de pantalla de la simulación.

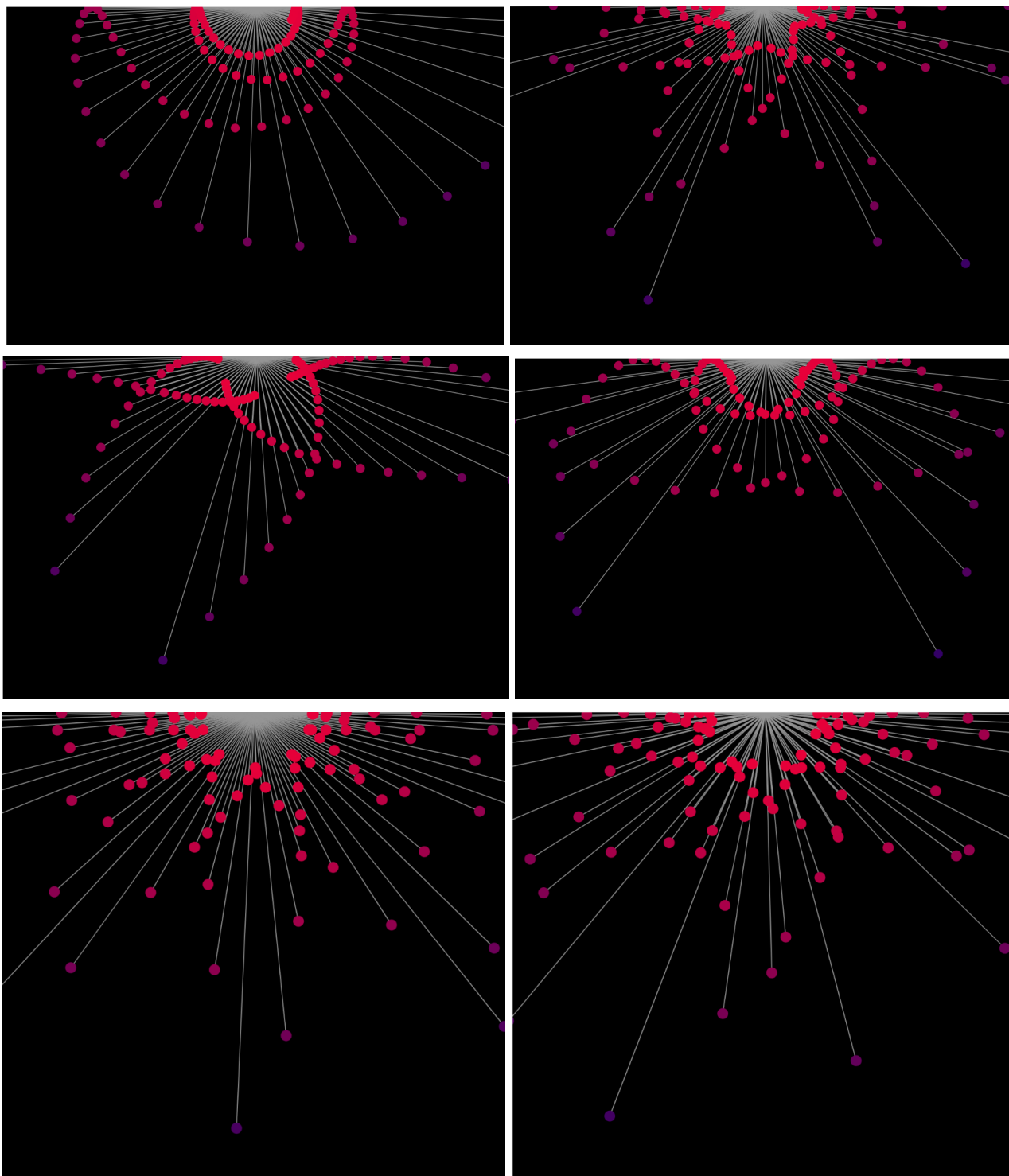


Figura 5: Ejemplos de patrones que forman los péndulos en distintos instantes, calculados a partir de la solución exacta (vista lateral).

En la segunda, se muestra una simulación de 16 péndulos vistos desde arriba. Este resultado también se puede encontrar en el canal de youtube de la materia (<https://youtu.be/DXHJfIN7h90>). En el video se pueden observar los péndulos que oscilan partiendo de la misma condición inicial. A medida que transcurre el tiempo, se observan los distintos patrones que se asemejan a distintos tipos de ondas: ondas estacionarias, propagantes, batidos, movimientos caóticos. El movimiento perdura hasta que todos los péndulos vuelven a su posición inicial, y comienza el ciclo nuevamente. En la figura 6 se muestran algunos resultados para esta simulación, mostrando los patrones formados en distintos tiempos.

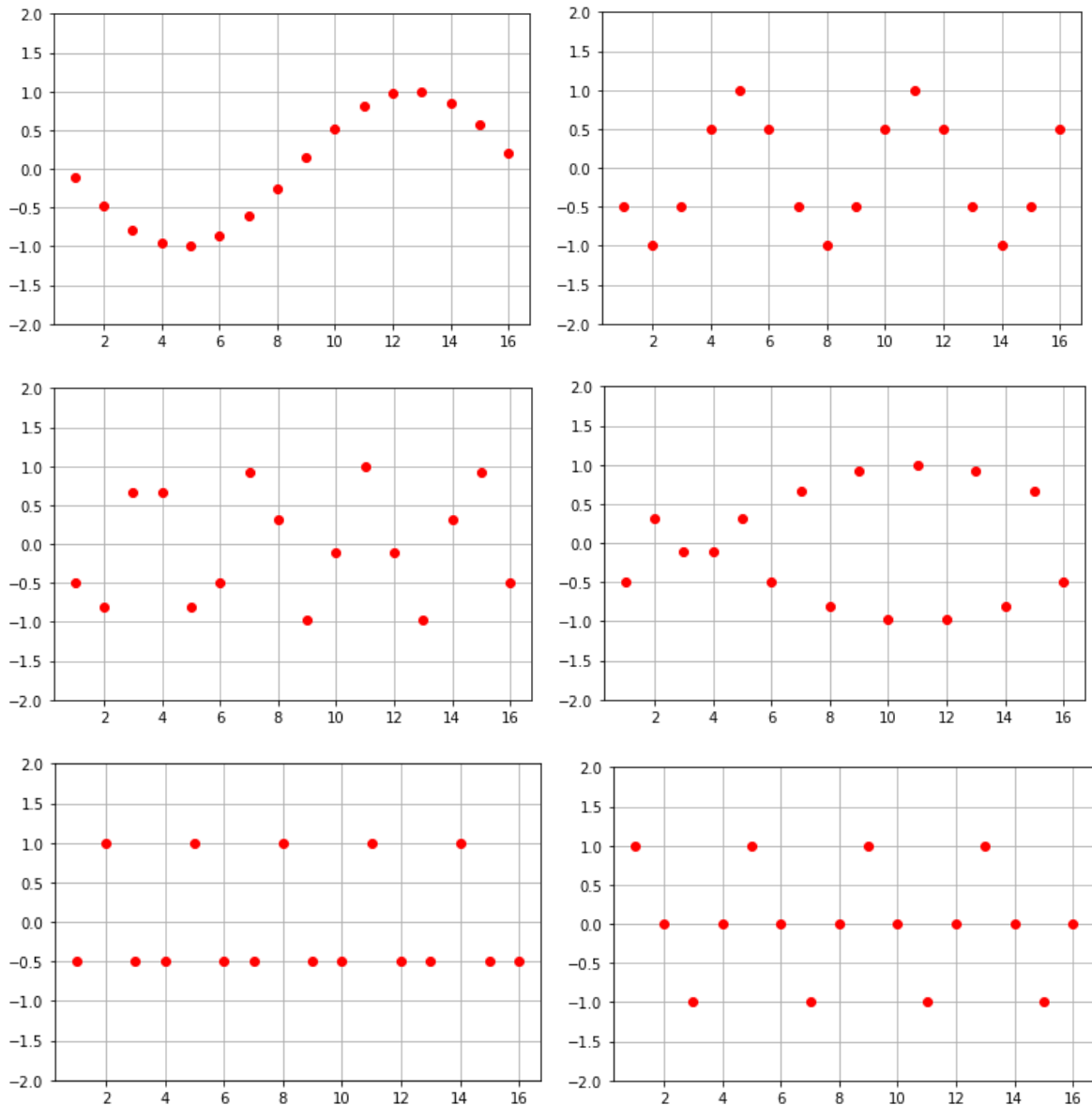


Figura 6: Ejemplos de patrones que forman los péndulos en distintos instantes, solución para pequeñas oscilaciones (vista superior).

Para observar las simulaciones en acción, se puede acceder al canal de youtube de la materia Laboratorio 2 <https://www.youtube.com/channel/UCMYy2CM-kUV-7-IHx8lcv1Q>.

4 - Diseño experimental

En esta sección se describe el diseño del sistema de péndulos, lo que incluye la estructura que los sostiene, los hilos y masas que se eligen, el sistema basado en celdas solares para iluminarlo. En la figura 7 se puede observar un esquema del diseño final, que será descrito en las siguientes secciones con mayor detalle.

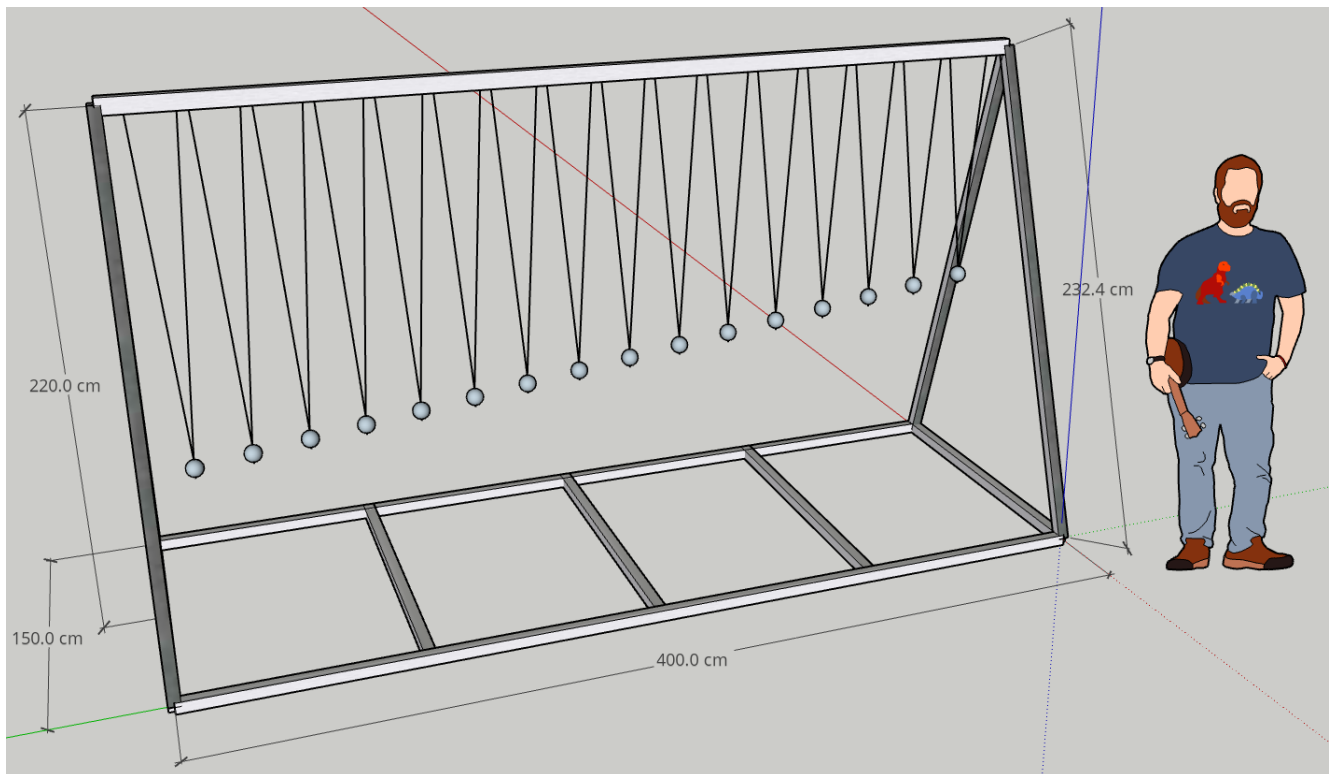


Figura 7: Esquema de la estructura que sostiene el sistema de péndulos.

4.1 Estructura y péndulos

En el diseño de la estructura se tuvo en cuenta su tamaño (para que resulte atractivo al observador), la durabilidad de los materiales y los costos. El dispositivo está constituido por una estructura soporte y los 16 péndulos con distintas longitudes que penden del travesaño de la estructura, tal como se muestra en la figura 5. Igualmente se siguen pensando ideas de como mejorar la rigidez del sistema sobre todo debido al largo del eje horizontal que al ser muy largo (4 metros) es propenso a deformarse.

La estructura debe ser de un material resistente y duradero, por lo que se descartó la madera, ya que se podría deformar por el peso de los péndulos y además echarse a perder fácilmente por los efectos climáticos como la exposición al sol y la lluvia. El plástico tiene el inconveniente de no ser muy resistente, excepto que se utilizaran plásticos reforzados, pero el costo de ellos es elevado. Contemplando estos factores se considera que una estructura metálica sería más resistente, duradera y rígida.

Para la forma de la estructura, se optó que sea como la de la figura 7, de tipo triangular, con barrales transversales en la base, para poder soportar todos los esfuerzos de torsión que provocan los péndulos al oscilar. Este tipo de estructuras es de fácil manufacturación, y altamente resistente para este caso. El travesaño superior es de caño estructural de 50 x 70 mm² de sección y 1.6 mm de espesor. El resto es de 50 x 50 mm² y del mismo espesor, todo soldado, pintado con convertidor de

óxido negro 3:1. Este tipo de estructura podría llegar a soportar el peso de una persona colgada de él. Para una estructura de estas características, se consiguió un presupuesto de \$59000 en Mundo Banco. El envío saldría \$10000, por lo que el costo final sería \$69000. Consideramos que este costo podría bajarse de poder hacer la estructura en el taller del Dto. de Física. Los materiales solamente cuestan \$40000 (caños) +\$1600 el convertidor de oxido negro.

En cuanto a las masas de los péndulos, consideramos que para generar un efecto llamativo de visualizar se debe tener en cuenta el tamaño de las masas en relación a las longitudes de los hilos que rondan entre 1 y 2 metros. Pensamos que bolas de 10 cm a 15 cm de diámetro serían ideales. Para que los efectos de rozamiento con el aire sean despreciables se debería usar un material pesado y esférico, como podrían ser las bolas de Bowling. Sin embargo, otros factores a tener en cuenta son que el peso total no exceda el peso que puede soportar la estructura y el costo (las bochas de Bowling son muy caras y una estructura que las soporte también sería costosa). Se determinó entonces que bochas de Hockey (figura 8) o de Polo, aunque de menor diámetro de lo deseado podrían cumplir la función. Las bochas de hockey tienen un diámetro de 7 cm y un peso de 160 g. Las bochas de polo son de plástico de alto impacto, tienen un diámetro de 7.6 cm a 8.9 cm y pesan entre 99 g y 130 g. Si se deseara achicar el presupuesto se podría hacer un molde y con él hacer bolas rellenas de cemento, que podrían hacerse siguiendo las características de las bolas de hockey.

Para vincular las bolas a los hilos se definió, que en el caso de utilizar bolas de hockey, se procedería a utilizar tornillos del tipo pitón con gancho cerrado, para luego atar el hilo al gancho del pitón. Dichos elementos pueden observarse en la figura 8.



Figura 8: Tornillo del tipo pitón con gancho cerrado (a la izquierda) y bocha de hockey (a la derecha).

Por otro lado, los hilos de los péndulos deben poder soportar el peso de las bolas sin deformarse por el peso de éstas, ya que deformaciones podrían causar cambios en su extensión que alteraría la “danza de los péndulos”. Esto es debido a que para que se genere dicho efecto, como se muestra en el marco teórico, la longitud de los péndulos es una magnitud relevante. Además, su masa tiene que ser despreciable con respecto a la de los péndulos, y nuevamente el costo económico fue un factor determinante.

Con el objetivo de limitar el movimiento a una dimensión se eligió usar una configuración de hilo doble en forma de triángulo isósceles, tal como se muestra en la figura 9. Para estimar la longitud total del hilo necesaria para montar a los péndulos vamos a considerar que el primer péndulo tenga 1.5 m de largo.

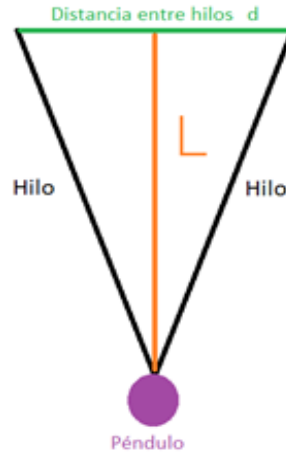


Figura 9: esquema de cómo quedaría un péndulo visto de costado de con la distancia entre la barra y el péndulo L .

Nos queda calcular la distancia entre hilos d tal que puedan entrar los 16 péndulos que deseamos colocar. Al calcular este valor tenemos que contemplar que la barra transversal va a ser de 4 metros, y en esa longitud tienen que estar contempladas también las uniones con los soportes. Por eso es que también hay que agregar la distancia entre hilos distintos que sostienen los péndulos. Teniendo estas consideraciones, decimos que la longitud que vamos a poder usar para colocar los péndulos es de 3.8 m, empezando a 0.1 m de un extremo de la barra y terminando también a 0.1 m del otro extremo. Además, a esta distancia d vamos a agregarle 0.02 m por la distancia entre hilos que sostienen distintos péndulos. Si bien esta distancia podría no estar en caso de que atemos los hilos consecutivos al mismo lugar u objeto (ya sea la barra o un gancho que agreguemos), nos parece buena idea contemplar la posibilidad de que tenga que existir dicha distancia, y definirlo al momento de construir el sistema.

Esta suma de 0.02 m de distancia nos da un total de 0.32 m más el error que tendrá correspondiente a la medición que se haga. Entonces, para obtener la distancia d , se plantea la siguiente ecuación:

$$16 \times (d + 0.02m) \leq 3.8m, \quad (18)$$

a partir de la cual se obtiene que $d \leq 0.2175 m$. Como en estas ecuaciones no estamos propagando errores porque aún no tenemos mediciones hechas, vamos a tomar $d = 0.2 m$. De esta manera la

longitud del hilo necesaria para el péndulo de mayor longitud es $H_1 = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + L_1^2}$ con $L_1 = 1.5 m$.

Haciendo un procedimiento análogo para todos los péndulos, se puede calcular la longitud total de hilo (H_{total}) que se necesitará para armar todo el sistema como la suma total de todas las longitudes de los péndulos individuales (H_n), como

$$H_{total} = \sum_{n=1}^{16} H_n = \sum_{n=1}^{16} 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + L_n^2} \quad (19)$$

siendo L_n la distancia de cada péndulo a la barra transversal. A este largo habría que sumarle lo necesario para hacer nudos para atar a los péndulos, posibles incertezas que se propaguen en el cálculo de la longitud, errores que podamos cometer al construir el dispositivo. Por estas razones es mejor calcular una cota superior para la longitud total del hilo, que nos permita poder contemplar los inconvenientes que pueden surgir. Para esto consideraremos que todos los péndulos tienen la longitud del péndulo más largo, es decir

$$H_{total} \leq 16 \times 2 \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + L_1^2} \sim 48 \text{ m} \quad (20)$$

Con estas consideraciones, proponemos comprar 50 m de hilo para hacer el montaje del experimento.

4.2 Iluminación

Existen dispositivos basados en celdas solares que permiten obtener iluminación durante la noche. Estos dispositivos se cargan durante las horas de luz y se encienden automáticamente cuando disminuye la iluminación que llega al panel. Los mismos pueden conseguirse comercialmente, por ejemplo en objetos de decoración, iluminación para camping, etc., pero tienen que ser adaptados adecuadamente al sistema de péndulos. Es por esto que proponemos dos opciones que difieren en su costo.

La primera es la más económica (~\$2000) y se basa en un sistema de iluminación para decoración que consiste en una celda solar pequeña, una batería, un sensor para detectar la luz, y del orden de 20 LEDs encapsulados. En la figura 10 se puede observar la foto del dispositivo. Este sistema puede adaptarse realizando nuevamente todo el cableado y usando un LED por péndulo. La desventaja del mismo es que su batería dura pocas horas (4 horas aproximadamente) y la luminosidad es baja.



Figura 10: Fotografía del dispositivo para iluminación decorativa de bajo costo y fácilmente adaptable.

La segunda opción consiste en construir el sistema de iluminación empleando paneles solares más eficientes. El esquema del diseño puede observarse en la figura 11. Este sistema permite obtener mayor luminosidad durante 7 horas, sin embargo, el costo es mucho más elevado (~20000\$). Este diseño se realizó con la colaboración de Damián Perez, técnico en los laboratorios de enseñanza del Departamento de Física.

En este diseño se emplea un panel solar de 10 Wp, un controlador de carga y una batería de 12 V como fuente de alimentación. El circuito para encender los LEDs durante la noche está basado en un sensor de luz LDR y un transistor. El transistor dejará pasar corriente o no según sea la iluminación sobre el sensor LDR. Se configura para que cuando no haya iluminación, circule corriente por los LEDs. Luego empleando un regulador *step down* LM2596 se lleva la tensión a 6.2 V, suficiente para alimentar los LEDs. Para iluminar se eligen LEDs de alta potencia en configuración estrella, dado que estos traen un disipador incorporado y se pueden montar fácilmente sobre las esferas usando un pequeño tornillo. Los LEDs se colocan en paralelo, puede colocarse dos por esfera fácilmente. La resistencia de $1\ \Omega$ se usa para que la corriente que pasa por cada LED sea igual a la del resto.

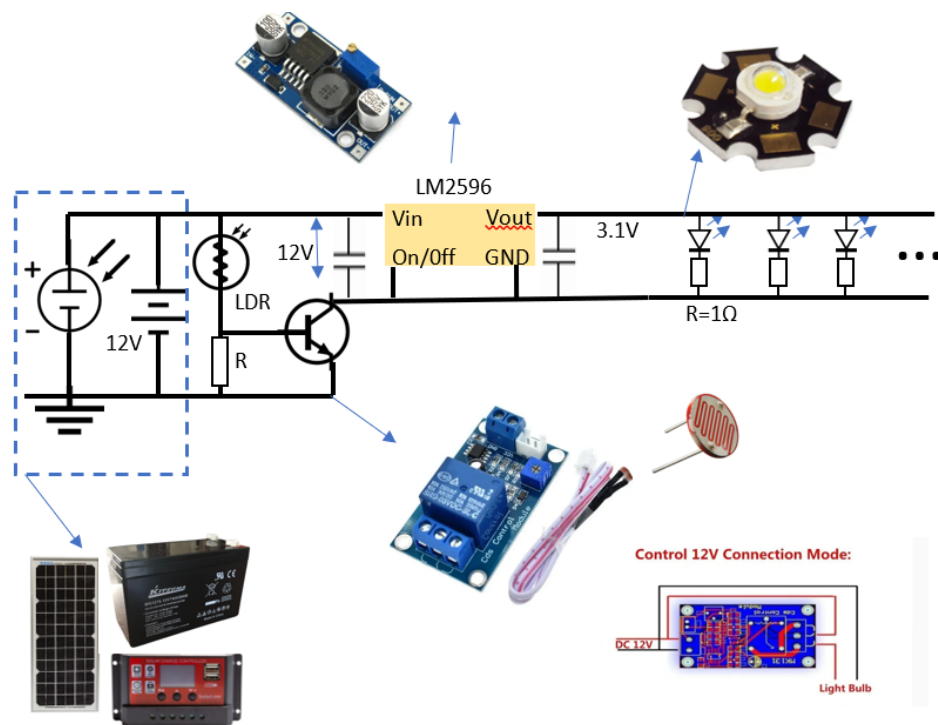


Figura 11: Esquema del dispositivo de iluminación diseñado para iluminación con mayor intensidad y durante más tiempo.

Tanto el controlador de carga, como la batería, el regulador de voltaje *step down* y el circuito de encendido automático, se colocarían dentro de una caja plástica estanca arriba del travesaño donde se cuelgan los péndulos. La celda solar, el LDR y los LEDs se cablean fuera de la caja, empleando cable unipolar extra flexible de $0.5\ \text{mm}^2$. Se extienden los cables hasta llegar a cada esfera, en cada una de ellas se pueden colocar dos LEDs en posiciones opuestas conectados en serie entre sí. En la figura 12 mostramos un esquema de cómo se haría el cableado en una de las esferas. En líneas naranjas se observan esquematizados los cables.

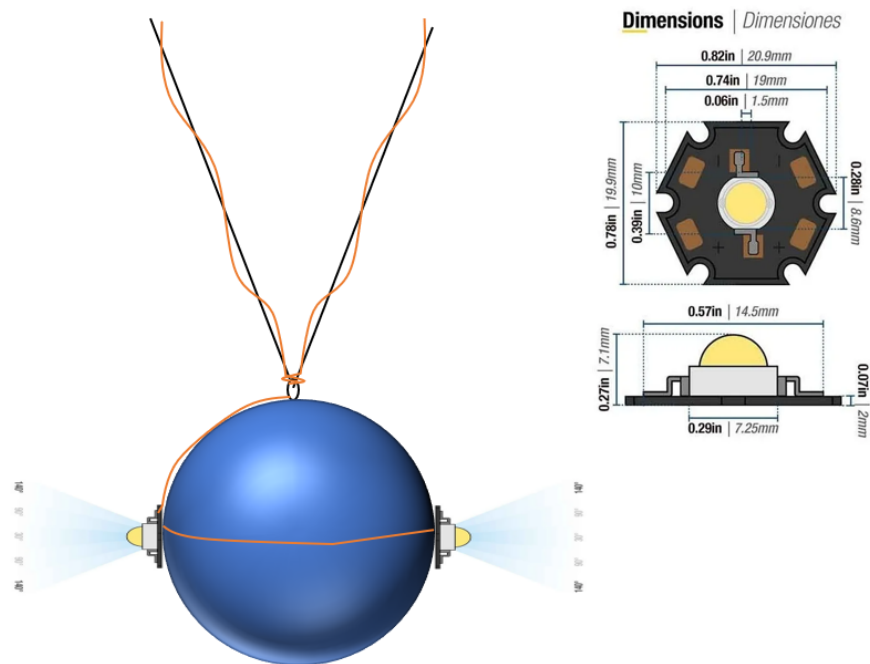


Figura 12: Esquema de montaje de los LEDs sobre una de las esferas. En el inset se observan las dimensiones de los LEDs. La esfera no está a escala.

4.3 Análisis del terreno

En la figura 13 se muestra una foto satelital tomada de *Google Maps* con las mediciones totales del terreno. Teniendo en cuenta el tamaño de la estructura, (4 m de largo x 1.5 m de ancho), la iluminación en las horas de sol, y su orientación para dar mayor visibilidad, se eligieron los siguientes sectores del parque:

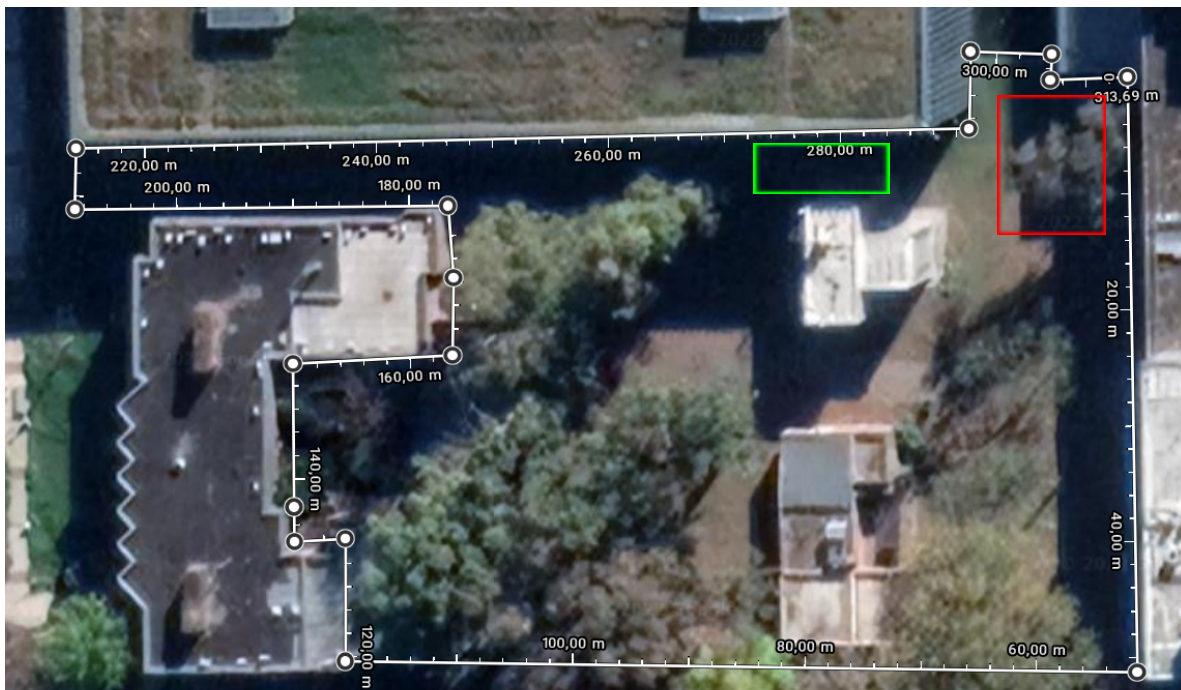


Figura 13: Mapa satelital extraído desde *Google Maps* del pulmón verde. El perímetro es aproximadamente de 320 m y la superficie es de 3300 m². Se indica con recuadros, posibles lugares para situar la estructura.

4.4 Análisis de errores por tener largos no precisos

El efecto que se quiere generar depende fuertemente de que el largo de los péndulos mantengan una relación entre sí. Siendo que el sistema es muy sensible ante este parámetro analizamos numéricamente la incidencia de un potencial error en el largo de cada péndulo en el movimiento colectivo de los mismos. Para eso se hizo una simulación en *Python*¹ del movimiento de los péndulos, permitiendo que el largo de cada péndulo tenga un error el cual se elige aleatoriamente dentro de un rango de tolerancia o error máximo.

En la Figura 14 se puede ver la posición de los péndulos después de haber transcurrido un tiempo suficiente como para que vuelvan a ponerse en fase. Se consideraron distintos valores para el error máximo en la longitud de cada péndulo (0.5 cm, 1 cm y 2 cm) y distintos ángulos iniciales (20° y 60°) desde donde se sueltan los péndulos. Se observa que a medida que aumenta el error, la dispersión en posiciones finales aumenta. Por ejemplo, para un error de 2 cm los péndulos terminan estando muy dispersos (puede verse un péndulo negro con media oscilación realizada). Por otro lado se observa que la influencia del error es menor en el caso de pequeñas oscilaciones. Por ejemplo, para un error de 1 cm y un ángulo inicial de 20° los péndulos están suficientemente juntos como para que pueda apreciarse bien el efecto. En conclusión, el análisis muestra que si cometemos un error menor a 1 cm en el largo de los péndulos el efecto puede apreciarse sin problemas. Dado que la medición del tiempo es más precisa que la de la longitud, consideraremos ajustar las longitudes midiendo el tiempo durante el armado del sistema.

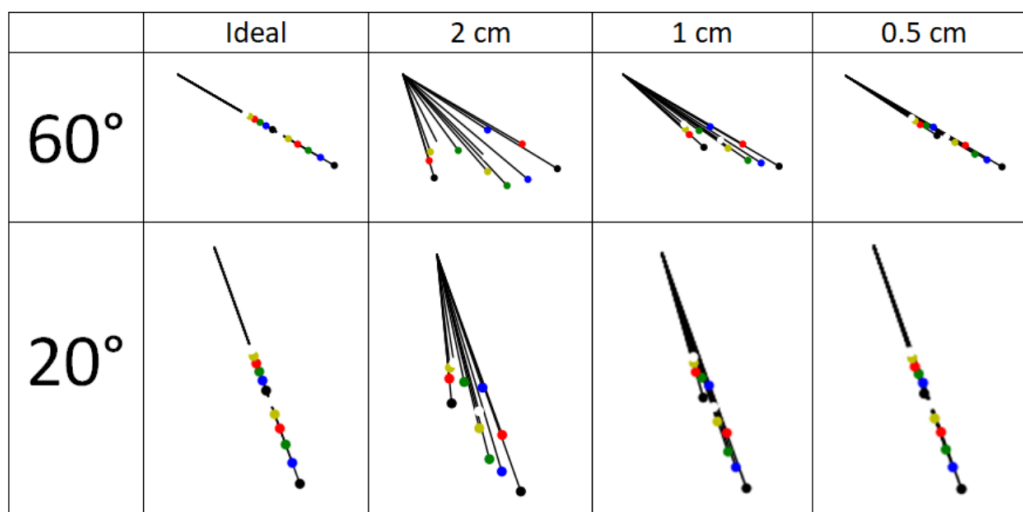


Figura 14: Posiciones de los péndulos obtenidas en la simulación. Los largos de los péndulos tienen un error aleatorio con un máximo variable. Pueden verse los ángulos finales para un error máximo de 0, 0.5, 1 y 2 cm y para una amplitud inicial de 20° y 60°.

4.5 Análisis de la fricción

Al preguntarnos cómo afectaría a nuestro sistema la presencia de fricción con el aire, nos propusimos responder varias cuestiones. En primer lugar, queremos saber si la fricción afecta a la solución de las ecuaciones del péndulo y si, debido a la baja magnitud de la fricción que se genera con el aire, la solución seguirá siendo oscilatoria. Por otro lado, queremos saber si los péndulos se desfazan o no debido a esta fuerza, y finalmente queremos saber a partir de cuánto tiempo de oscilación se pierde tanta amplitud que ya no haya un efecto visual apreciable.

¹ <https://github.com/FuegoDomato/DanzaDePendulosConError/blob/main/DanzaPendulos.py>

Para responder la primera pregunta, basta con ver que la solución del péndulo débilmente amortiguado es $\theta(t) = A e^{-\gamma t} \text{sen}(\omega t + \varphi)^{[4]}$, en la que γ es un coeficiente de decaimiento que depende del amortiguamiento. Si bien la frecuencia angular cambia con esta fricción, podemos suponer que este cambio es similar para todos los péndulos, al utilizar pesos similares para cada uno de ellos. Se puede concluir que la parte de la fase es la misma para todos los péndulos, y por lo tanto es evidente a la luz de esta ecuación que no hay desfase entre ellos.

En cuanto a la segunda pregunta, para ver qué tanto afecta la fricción a la amplitud del sistema, calculamos cuánto tiempo tiene que pasar de tal forma que el sistema pierda la mitad de su amplitud debido a esta fuerza. Para esto calculamos el rozamiento para una esfera de radio R rodeada por un fluido (aire) cuya viscosidad es η . Dicha fuerza se modela según la ley de Stokes como $F = -b \cdot v$, con v la velocidad del péndulo y $b = 6 \pi R \eta$. En estas condiciones, el coeficiente de decaimiento resulta ser $\gamma = b/2m$, con m la masa del péndulo. Entonces, tomando valores del orden de magnitud de los que esperamos para el sistema que nos vamos a procurar,

$$b = 6 \pi R \eta \approx 6 \times 3,14 \times 0,035 (m) \times 10^{-4} (kg/m \cdot s) \approx 6 \times 10^{-5} (kg/s),$$

donde para la viscosidad del aire se tomó un valor de $0.0001 Pa \cdot s$, unas 5 veces mayor a los valores tabulados a distintas condiciones de humedad, en condiciones normales de presión y temperatura. Se tomó como radio 3.5 cm, radio de las bochas de hockey anteriormente mencionadas. Para encontrar el momento en el que se pierde la mitad de la amplitud, igualamos el término extra que añade la fricción a la solución a 0.5 y despejamos t :

$$e^{-bt/2m} = 0.5 \rightarrow t \sim 3500 s \sim 1 \text{ hora},$$

donde estimamos el peso de cada bocha en aproximadamente 150 gramos.

Esto quiere decir que la fricción con el aire es despreciable para los tiempos en que se va a realizar la demostración y no nos tenemos que preocupar por ella. Hay otros factores que pueden frenar el movimiento de los péndulos, por ejemplo, el rozamiento de los hilos con las uniones al travesañ o a las mismas masas, la torsión que pueda generar el movimiento de los péndulos sobre la estructura que los sostiene o la rotación de los péndulos. Si bien no hay mucho para hacer con respecto a la rotación más que tener cuidado a la hora de darle la condición inicial al sistema, sí es posible hacer algo para evitar la torsión: al elegir una estructura de metal, se garantiza que en este material, por su rigidez, es despreciable cualquier efecto de esa índole que se podría producir. Este es, además de la durabilidad, uno de los principales motivos de la elección de la estructura: si fuera de madera, ya no serían despreciables los efectos de la torsión sobre ella.

4.6 Determinación de los largos exactos de cada péndulo

Decididas ciertas características del sistema de péndulos, el desarrollo teórico de la sección 2 puede interpretarse en términos de parámetros relevantes para el diseño y construcción de la estructura.

De la ecuación 5 sabemos que el período del primer péndulo está ligado a su largo, por lo que definir su longitud como 1.5 m nos fija su periodo a aproximadamente 2.46 segundos, el cual se halla dentro de un rango atractivo a la vista del público.

Por otro lado, de los razonamientos devenidos de la ecuación 15 se encuentra que el ciclo de la atracción tiene una duración de $\tau = N T_0$. Y este N puede determinarse a partir de las ecuaciones 12 y 8, al obtenerse la relación entre los largos del último y el primer péndulo. Si son 16 péndulos en total:

$$l_{15} = \frac{N^2}{(N+15)^2} l_0$$

Por ejemplo, si el último péndulo mide 0.75 m, despejando esta ecuación obtenemos que N es aproximadamente 36.2 y, en consecuencia al multiplicarlo por T_0 , τ resulta ser de unos 89 segundos. De la misma manera, si el último péndulo mide 1 m, entonces $N \sim 66.7$ y $\tau \sim 164$ s. Es decir que con péndulos de largos sensatos se obtiene una atracción que dura entre 1 y 3 minutos. Esta duración es lo suficientemente duradera como para brindar una explicación del fenómeno observado, y a la vez no tanto como para perder la atención del espectador.

Un código simple que realiza estos cálculos y determina la longitud exacta de cada péndulo puede encontrarse en:

https://colab.research.google.com/drive/12QPdRlnwZJSQcp9YDEXPk0Sx_gAw6En?usp=sharing

5. Presupuesto

El presupuesto total para armar el sistema de péndulos se encuentra entre \$87000 y \$110000 dependiendo las opciones que se describen en esta sección, pudiendo bajar los costos de realizar la estructura principal en el taller del Dto de Física. A continuación se dan valores específicos.

5.1 Estructura

Mundo banco: \$59000 para la estructura y \$10000 para el envío.

El travesaño de arriba es de caño estructural de 50 x 70 mm² de sección 1.6 mm de espesor. El resto 50x50 mm² y 1.6 mm espesor, todo soldado, pintado con convertidor de óxido negro 3:1. (Aguanta una persona que se trepa).

Sería posible reducir estos costos si el taller del Dto. de Física puede soldar la estructura.

5.2 Péndulos (hilos y esferas)

Costos de hilos a usar. Los hilos que consideramos para usar son:

- Cable de acero trenzado - 0.4 mm de grosor con un costo de \$50 por metro, que para el cálculo de metros a comprar nos daría un costo total de \$2000.
- Cable de acero trenzado con recubrimiento de plástico - 0.4 mm de grosor revestido con plástico con un costo de \$100 por metro, que para el cálculo de metros a comprar nos daría un costo de \$4000.
- Hilo de nylon multifilamento ~\$1500 (x 100 m).

Costo de los péndulos.

En el caso de que queramos usar bochas de hockey cuyo costo por unidad ronda los \$360, el costo total rondaría los \$5760. En caso que queramos usar bolas de plástico rellenas con cemento, el costo del cemento ronda los \$380 la bolsa y las pelotas \$120 la unidad, que nos daría un costo total

aproximado de \$2300. En el caso de que queramos usar bochas de polo, se venden en cajas por decena y la caja de 20 bochas ronda los \$9750.

Resumen total de costos. En naranja se indica la opción preferida.

	<i>pelotas rellenas de cemento</i>	<i>bochas hockey</i>	<i>bochas de polo</i>
<i>hilo trenzado de acero revestido, 0.4 mm</i>	\$6300	\$9760	\$13750
<i>hilo trenzado de acero sin revestir, 0.4 mm</i>	\$3300	\$6760	\$11750
<i>hilo de nylon multifilamento</i>	\$3800	\$7260	\$11250

Tabla 1: Resumen de costos para las bolas y los hilos que conforman los péndulos, en naranja se indica la opción preferida.

5.3 Iluminación

A continuación se presenta una lista de precios de los elementos necesarios para iluminar a los péndulos. Recordar que hay una opción barata (sistema comercial más cables ~\$5000\$), y la opción que brinda mayor iluminación y durante más tiempo, que se detallan en la tabla 2.

Opción económica	
sistema comercial + cables	~\$5000
Opción con mayor rendimiento	
Alimentación	
Panel solar 10Wp + controlador regulador	\$5950
Bateria 1V 7h	\$2520
Regulador LM2596	\$500
Encendido automático	
Módulo Relay Sensor de Luz Fotocontrol LDR	\$627
LEDs y Cables	
LED estrella X 20	\$3480
cable unipolar 0.5 mm ² (x100)	\$2250
Resistencias 1Ω x (20)	\$238
Otros	
Caja plástica estanca	\$3000

caño PVC (para cubrir la electrónica)	\$225
Fastix	\$1000
Total	~\$ 20000

Tabla 2: Resumen de costos para el sistema de iluminación.

5.4 Otros materiales

Para el armado del sistema de péndulos también se necesitarán tornillos gancho cerrado, del orden de 80 tornillos, lo que implica un costo de ~\$1000. Además, se necesitarán bisagras cuyo costo es de ~\$1000.

6. Conclusiones

En este trabajo se presentó el proyecto “La danza de los péndulos”, que involucra el diseño de un sistema de péndulos acoplados a ser dispuestos en el pulmón verde de Ciudad Universitaria. Se presentaron, por un lado, los fenómenos físicos involucrados en el sistema que hacen de interés. A partir de estos, se propuso un modelo para describir el efecto visual deseado y se corroboró la validez del mismo mediante simulaciones.

Por otro lado, se discutió sobre la construcción del sistema de péndulos y se presentó un presupuesto detallado, en el cual se incluyen todas las opciones consideradas. En cuanto a la construcción de la estructura, se buscó que la misma fuera de un material resistente y rígido, de manera que el dispositivo resulte duradero. Es por esto que se concluyó que el material a utilizar para la estructura debe ser metálico. Asimismo, se propuso que la estructura tenga marcos triangulares a los costados, a fin de asegurar una óptima rigidez estructural. Se prevé continuar realizando mejoras en el diseño para que sea más robusto.

Además de la estructura, se discutió el diseño de los péndulos (materiales de hilos y masas). Se propuso como principal opción bochas de hockey o polo; aunque también se barajó la posibilidad de construir unas bolas a base de cemento en caso de ser necesario para reducir costos. Éstas masas tendrían un gancho pitón cerrado, mediante el cual se las ataría al hilo a utilizar. Este último sería, preferentemente, un hilo de acero revestido para asegurar la inextensibilidad y la durabilidad de los mismos. Se estimó que de este hilo deberían comprarse 50 metros, dejando un margen de error.

A su vez, se consideró la idea de agregar leds al sistema de forma de hacerlo más atractivo y visible en horario nocturno. Para alimentar estos LEDs se utilizarían paneles solares para fomentar e incentivar el cuidado del medio ambiente y la elección de energías renovables.

La realización de este proyecto conlleva un gran aporte en vistas a futuras actividades divulgativas y a la vida cotidiana en general de los alumnos en la facultad, ya que la belleza del proyecto despierta los más profundos y ocultos intereses de éstos, y cualquier persona que pase cerca de los péndulos tendrá la oportunidad de vincularse con ellos.

Referencias

[1] Baird, C. S. (19 de febrero de 2014). What is the speed of electricity? Science questions with surprising answers.

<https://www.wtamu.edu/~cbaird/sq/2014/02/19/what-is-the-speed-of-electricity/index.html>

[2] Berg R. E., *Pendulum waves: A demonstration of wave motion using pendula*, Am J Phys 59(2), 186-187 (1991).

[3] Flaten J. A. and Parendo J. A., *Pendulum waves a lesson in aliasing* Am J Phys 69(7), 778-782 (2001).

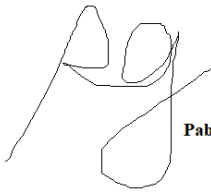
[4] Kittel D., Knight, W.D. and Ruderman, M.A., *Mecánica* (Editorial Reverté, 2º Edición, 2005), 225-227

FIRMAS DOCENTES Y ALUMNOS:

(aclaren con nombre y apellido así sabemos de quienes son!)



Sabrina



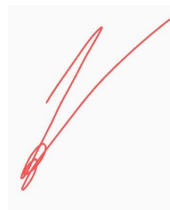
Pablo Gaztañaga



SEBASTIÁN
BORDAKEVICH








Iñaki González Vandom

Cruano
MARTINA RUANO

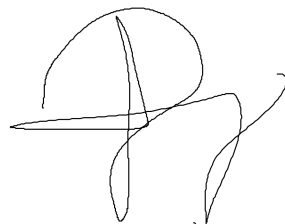
Elion Orubey



Delfina Pérez.

Ignacio

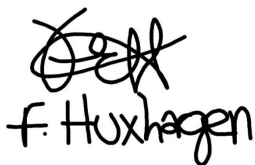
IGNACIO ANDERSEN



Miguel Anila



Federico Guglielmucci
Nayar



F. Huxhagen

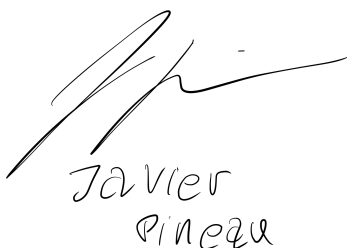
n g Bruck



Román
Schiaffino



Manuel
Venegas



Javier
Pinera

Dan Catz



Agustín
Gonzalez