Física Teórica 1

Catedra: Fernando Lombardo

Primer cuatrimestre 2006

Método de Imágenes y Función de Green

1. Se tiene una esfera conductora de radio a conectada a potencial V, rodeada por una cáscara esférica de radio b cargada uniformemente con densidad σ.

   (a) Hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio mediante el método de imágenes, suponiendo conocido el problema de una carga puntual frente a una esfera conductora a tierra.

   (b) Identificar la distribución de cargas imagen y la carga total inducida sobre la esfera conductora.¿Es única la distribución de cargas imagen?

2.

   (a) Hallar el potencial electrostático de la distribución del problema anterior, utilizando el método de la función de Green.

   (b) Analizar la relación entre el método de imágenes y el de la función de Green. Identificar la procedencia de cada una de las tres contribuciones a la integral de Green.

3.

   (a) Se tiene una esfera de radio a conectada a tierra. A una distancia d del centro de la misma ($d > a$) hay un dipolo puntual $\vec{p} = p_0\hat{z}$. Calcular el potencial y el campo eléctrico en todo punto del espacio usando el método de la función de Green.

   (b) Idem que en (a) pero mediante el método de imágenes. Verificar que ambos resultados coinciden.

   (c) Calcular la densidad de carga inducida sobre la esfera.

   (d) Hallar los momentos multipolares hasta el cuadrupolar para esta configuración.

   (e) ¿Cómo serían el potencial y el campo si la esfera estuviera aislada y descargada.

4. Considere dos esferas concéntricas de radios a y b respectivamente.

   (a) Hallar la función de Green para condiciones de Dirichlet, para la región interna. Utilizar el método de imágenes.
   Sugerencia: Es necesario resolver a través de una serie infinita de imágenes. Hallar primero una relación de recurrencia para las ubicaciones y los módulos de las cargas imágenes. Construir luego la serie de potenciales.

   (b) Mostrar que, si se situa un acarga q entre las esferas, la carga total inducida sobre cada esfera esta dada por

$$Q(r = a) = -\frac{a}{R}\frac{(b-R)}{(b-a)}q$$

$$Q(r = b) = -\frac{b}{R}\frac{(R-a)}{(b-a)}q$$

   siendo $a < R < b$ la distancia de la carga al centro.
   Sugerencia: Prueben el teorema de reciprocidad de Green:

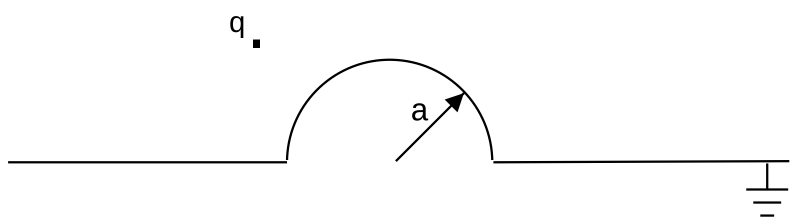
$$\int_V \rho\phi' + \int_S \sigma\phi' = \int_V \phi\rho' + \int_S \sigma'\phi$$

   y despues, utilizando como potenciales de prueba ϕ' una configuración simple con los mismos conductores como contornos, usenlo para calcular la carga sobre una esfera. ¿Cuál es la carga total del sistema?

5. Se tiene un contorno mixto que consiste en un plano y una semiesfera de radio a, conectado a tierra como muestra la figura.

    (a) Calcular la función de Green de esta configuración. ¿Qué método utilizaría? Identificar cada contribución a esta función.

    (b) Se coloca un dipolo puntual a una distancia d sobre la semiesfera, apuntando en la dirección perpendicular al plano. Hallar el potencial en el semiespacio donde se encuentra el dipolo, utilizando la función de Green hallada en el punto anterior.



6. *Problemas de Green relacionados con separación de variables.* Se conecta a tierra una esfera conductora de radio a. Concéntrico con ella se coloca un anillo de radio b ($b > a$), cargado uniformemente con carga total Q.

    (a) Calcular el potencial en todo punto del espacio, usando el método de la función de Green.

    (b) Calcular el potencial sobre el eje perpendicular al plano del anillo, utilizando el método de imágenes. Luego, extender la solución para todos los puntos exteriores a la esfera mediante prolongación analítica. Comparar con el resultado del punto a).

    (c) Hallar, por integración, la densidad de carga y la carga total inducida sobre la esfera. ¿Qué tiene esto que ver con el método de imágenes?

    (d) Separar en la expresión para el potencial la contribución debida al anillo cargado y a las cargas inducidas. Halle los momentos multipolares, hasta el orden cuadrupolar inclusive, del anillo cargado y de las cargas inducidas por separado.

    (e) ¿Cómo resolvería por el método de Green si la esfera estuviera aislada y descargada? ¿Cómo se modificarían los momentos calculados en (d) en este caso? Fórmulas \utiles:

$$
\begin{aligned}
P_{2n+1}(0) &= 0 \\
P_{2n}(0) &= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \\
P_0(0) &= 1
\end{aligned}
$$

7. Encontrar la función de Green para condiciones de Dirichlet, para el problema interno correspondiente a un cilindro conductor de radio a y longitud b.

8. Encontrar la función de Green para condiciones de Dirichlet, para problema interno correspondiente a una estructura con forma de cuarto de cilindro conductor infinito.

Preguntas Molestas

1. ¿Cuál es el significado físico de la función de Green?
2. ¿Qué relación hay entre el método de la función de Green y el método de imágenes?
3. ¿Cómo se complementan estos dos métodos en la resolución de los problemas?
4. ¿Cuál es la contribución de las cargas imágenes a los momentos multipolares de un problema interno?
5. ¿Dónde deben colocarse las cargas imágenes ?
6. Una vez colocadas las cargas imágenes, ¿qué sucede con los contornos?
7. ¿Qué relación hay entre la carga total de la distribución imagen y la carga inducida sobre el contorno?