Física Teórica 1

Catedra: Fernando Lombardo

Primer cuatrimestre 2006

Ondas Planas.

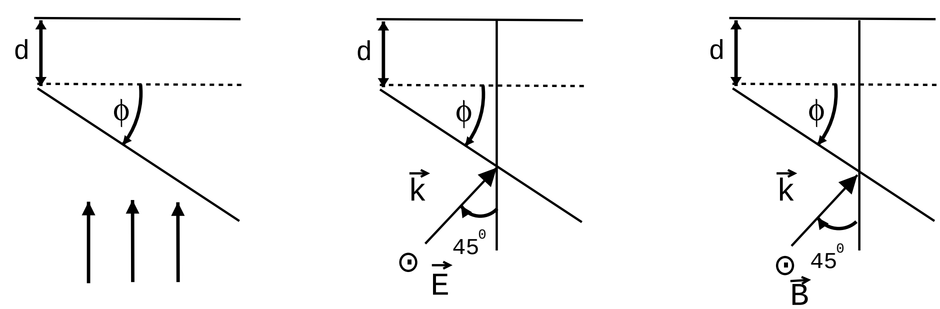
1. Una onda electromagnética plana polarizada a $45°$ respecto del plano de incidencia es totalmente reflejada en un prisma al cual entra y sale normalmente a las respectivas caras. Demostrar que la intensidad del rayo emergente es $16n^2/(1+n)^4$ veces la intensidad incidente, donde n es el índice de refracción del material del prisma. Demostrar que el rayo emergente está elípticamente polarizado, con un desfasaje entre las componentes linealmente polarizadas dado por $\tan(\phi/2) = \cos(\theta)\sin^{-2}\theta\left(\sin^2(\theta) - n^{-2}\right)^{1/2}$, donde θes el ángulo de incidencia en la cara posterior del prisma. No considerar reflexiones múltiples.

2. Una lámina dieléctrica de constante ε_2 y espesor d separa a dos medios de constantes ε_1 y ε_3, respectivamente (La permeabilidad magnética de los tres medios es igual a 1).

   (a) Obtenga qué condiciones deben cumplir d, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ε_3 para que no haya onda reflejada en el medio 1.

   (b) Calcule el vector de Poynting de la onda incidente y de la transmitida.

3. *Análisis de las experiencias de Wiener:* En 1890, Wiener realizó tres experiencias para demostrar la existencia de ondas electromagnéticas estacionarias y comprobar cuál de los dos campos (eléctrico o magnético) es el vector óptico (es decir, el causante de la sensación luminosa). Dichas experiencias consistieron en: *1)* Hacer incidir una onda plana plano polarizada normalmente sobre un espejo perfecto. 2) Hacer incidir una onda plana TE sobre un espejo perfecto con un ángulo de incidencia de $45°$. 3) Idem que el anterior, pero TM. En cada caso Wiener interpuso una película fotográfica muy delgada en la posición indicada en la figura: Wiener encontró que, al revelar la película, aparece un patrón de rayas negras (correspondientes a máximos de intensidad sobre el negativo de la película) diferente en cada caso. Predecir el espaciamiento entre las rayas negras despreciando atenuaciones o reflexiones en la película fotográfica. (Para más detalles, ver: Longhurst, {*Geometrical and Physical Optics*}, Longman, 21-10.)



4. Demostrar que una onda plana que incide sobre la superficie de separación de dos dieléctricos, ejerce una presión de radiación:

$$p_{rad} = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon_1\left[E_{inc}^2 + E_{ref}^2\right]\cos(\theta_{inc}) - \varepsilon_2 E_{trans}^2\cos^2(\theta_{trans})\right)$$

   donde ε_1 son las constantes del medio de incidencia, yε_2 son las constantes del medio refractante. *Sugerencias*: Plantear la conservación del impulso lineal en términos de promedios temporales. Para ello, es útil usar (y demostrar) que si dos campos vectoriales $\vec{A}(\vec{x},t)$ y $\vec{B}(\vec{x},t)$ son armónicos, el promedio temporal de su producto escalar es:

$$< Re[\vec{A}] \cdot Re[\vec{B}] >= \frac{1}{2} Re[\vec{A}\cdot\vec{B}^*]$$

   Por otro lado, como la presión de radiación no depende de la polarización de la onda incidente (¿por qué ?), puede hacerse el cálculo eligiendo polarización TE o TM.

5.

(a) Hallar la presión de radiación producida por una onda plana que incide normalmente sobre una superficie conductora. Tomar el límite para el caso de conductividad infinita, y verificar que en ese caso la presión de radiación es igual a la densidad de energía electromagnética de la onda.

(b) Demostrar que la densidad de energía y la presión ejercida son también iguales en el caso que la onda incide normalmente sobre una superficie totalmente absorbente.

(c) ¿Qué radio debe tener una esfera hecha de un material con densidad $1gr/cm^3$ que absorbe toda la luz que le llega, para que la presión de radiación de la luz solar compense la atracción gravitatoria del Sol? Aproximar la potencia de la radiación luminosa solar por $P = 4 \times 10^{26}$ Watts.

6. Cuando rayos X inciden sobre la superficie de un metal con un ángulo mayor que un cierto ángulo crítico θ_0 sufren reflexión total. Calcular θ_0 como función de la frecuencia de los rayos X para el caso de polarización en la dirección perpendicular al plano de incidencia (modo TE). Calcular la constante dieléctrica del metal aproximando a los electrones en su interior como libres, con una densidad $n \approx 10^{11} cm^{-3}$, y despreciando el efecto de los átomos, por ser éstos mucho más pesados.

7.

(a) Deducir la expresión para la longitud de atenuación de una onda electromagnética plana que se propaga en un medio conductor, en los casos límites de buen y mal conductor. Calcule la longitud de atenuación en cobre para una frecuencia de 60 Hz ($\sigma \approx 5 \times 10^{17} s^{-1}$), y para ondas de radio de $100kHz$en agua de mar ($\sigma \approx 5 \times 10^{10} s^{-1}$)

(b) Demostrar que para un buen conductor coeficiente de reflexión es aproximadamente $r \approx 1 - 2\delta\omega/c$ donde δ es la longitud de atenuación.

8. *Rotación de Faraday*: Un “plasma tenue” consiste en n cargas eléctricas libres por unidad de volumen, de masa m y carga e. Si se hacen incidir ondas electromagnéticas planas en el plasma, suponiendo que la densidad es uniforme y que las interacciones entre las cargas pueden despreciarse:

(a) Encontrar la conductividad σ en función de ω.

(b) Hallar la relación de dispersión (es decir, la relación entre k y ω).

(c) Calcular el índice de refracción en función de ω. ¿Qué sucede si $\omega < \omega_p$? (ω_p es la frecuencia de plasma, definida por $\omega_p \equiv \frac{4\pi n e^2}{m}$.

(d) \probleitem{d.} Supongamos ahora el mismo escenario en presencia de un campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$. Considerando ondas planas que se propagan en dirección paralela a $\vec{B}_{ext}$, mostrar que el índice de refracción es diferente para ondas polarizadas circularmente en dirección izquierda y derecha (asumir que el campo magnético de la onda plana es despreciable frente a $\vec{B}_{ext}$).

(e) Concluir del punto anterior que el plano de polarización de una onda plana linealmente polarizada propagándose en dirección paralela al campo magnético externo, rota en un ángulo proporcional a la distancia que viaja la onda. Calcular la constante de proporcionalidad.

(f) La rotación de Faraday que sufre la radiación de objetos extragalácticos en el rango de ondas de radio aporta evidencia de la existencia de un campo magnético en la Vía Láctea de aproximadamente $3\mu Gauss$, uniforme sobre distancias del orden de 1 kpc (1 pc= 3.26 años luz). Utilizar la fórmula deducida en el punto anterior para verificar que la rotación del plano de polarización en un campo de esa intensidad y extensión es de aproximadamente 15° para longitude de onda de 1 cm (suponer una densida de electrones libres de $3 \times 10^{-2} cm^{-3}$).

9. Calcule la relación de dispersión correspondiente al problema anterior. A partir del $\varepsilon(\omega)$, calcule la velocidad de grupo en el límite de frecuencias bajas. el modelo (en este límite), explica el fenómeno de los llamados ¨silbidos¨, el cual está presente en la propagación de ondas de baja frecuencia en la magnetosfera.

10. Estudie la propagación de un pulso en un medio dispersivo. Suponga que en el instante $t = 0$ se tiene un pulso oscilatorio modulado por una gaussiana :

$$u(x, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2L^2}\right) \cos k_0 x$$

Para facilitar los cálculos, suponga que la derivada parcial de $u(x,t)$ respecto de t, en $t = 0$, es cero (interprete qué quiere decir físicamente esta suposición). Halle la amplitud $u(x,t)$ en todo instante. En particular, determinar la ubicación del centro del paquete y su semiancho. Encuentre la velocidad con la que se desplaza el centro del paquete. Considere medios con los cuales:

(a) $\omega(k)$ es una función lineal. Demuestre que en este caso no hay dispersión.

(b) $\omega(k)$ es una función cuadrática. Demuestre que en este caso hay dispersión.

11. Muestran que en un medio conductor, las relaciones de Kramers-Kronig toman las siguientes formas

$$\begin{aligned} Re[\varepsilon(\omega)] &= \frac{1}{4\pi} + \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega' Im[\varepsilon(\omega')]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ Im[\varepsilon(\omega)] &= \frac{\sigma}{\omega} - \frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{Re[\varepsilon(\omega')] - 1/4\pi}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned}$$

donde P denota la parte principal de la integral. (ayuda: Consideran que $\varepsilon(\omega) - i\sigma/\omega$ es analítica para $Im[\omega] \geq 0$. Ver Jackson, capítulo 7 sección 7.10)

Preguntas Molestas

1. ¿En qué situaciones no son válidas las relaciones de Fresnel entre amplitudes incidente, reflejada y transmitida?
2. ¿Por qué la presión de radiación no depende de la polarización de la onda incidente?
3. Desde el punto de vista cuántico, la presión de radiación se calcula teniendo en cuenta el impulso lineal transportado por los fotones. Con esto en mente, ¿qué sugieren los resultados de los problemas sobre la relación entre la energía y el impulso de un fotón?
4. Las ondas electromagnéticas que se propagan en un medio de índice de refracción inhomogéneo, son transversales?