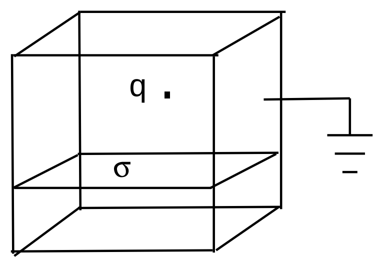
Física Teórica 1

Catedra: Fernando Lombardo

Primer cuatrimestre 2006

Método de Separación de Variables.

1. Se tiene un cubo conductor de lado a conectado a tierra. En su interior hay un plano con densidad superficial uniforme σ y una carga puntual, como indica la figura. Calcule el potencial electrostático en todo punto del espacio.



2. Se coloca un alambre con densidad de carga constante λ equidistante a dos placas conductoras infinitas conectadas a tierra. Encuentre el potencial eléctrico en todo punto del espacio utilizando separación de variables. Para ello divida el problema en dos regiones de las siguientes formas:
   (a) Realice un corte vertical, perpendicular a los planos.
   (b) Realice un corte horizontal, paralelo a los planos. Compare los resultados obtenidos. ¿Son iguales ?

3.
   (a) Hallar el potencial y el campo electrostático en todo punto del espacio, producido por un cuadrado cargado con densidad uniforme σ.
   (b) Obtener la expresión para el potencial de una carga puntual desarrollado en serie de Fourier.
   (c) Utilizando el resultado anterior repita el problema 1 resolviendo directamente la ecuación de Poisson, planteando la solución particula (potencial producid por la carga puntual) desarrollada en autofunciones adecuadas a la geometría del problema, más la solución general de la ecuación de Laplace (homogénea).

4. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuyo casquete superior está conectado a un potencial V_1 y el inferior a V_2.

5. *IMAN ESFERICO:* Este problema es muy importante, pues permite entender analogía y diferencias con el caso eléctrico y aprender a pensar en términos de “cargas magnéticas”.
   (a) Se tiene una esfera uniformente magnetizada en volumen con densidad $\vec{M} = M_0\hat{z}$
      i. Calcular el momento dipolar de la esfera: 1) Integrando directamente la densidad de magnetización. 2) Utilizando los conceptos de cargas magnéticas y corrientes de magnetización.
      ii. Calcular los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ usando la integral de Poisson para el potencial escalar magnético. Identificar el problema eléctrico equivalente. Comparar el potencial en el exterior de la esfera con el que produciría un dipolo puntual igual al momento dipolar total de la esfera.
      iii. Calcular el potencial vectorial a partir de la corriente total.
   (b) Se tiene ahora la misma esfera situada en un medio lineal, isótropo y homogéneo de permeabilidad μ.
      i. Discutir cuidadosamente por qué los métodos utilizados en (ii) y (iii) no sirven para hallar $\vec{B}$ en este caso. Utilizar entonces el método de separación de variables. Verificar que si $\mu = 1$ se recupera el resultado anterior.
      ii. Hallar el momento dipolar total inducido en el medio exterior.

(c) Una esfera hueca cargada con densidad superficial σ, que rota con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$ constituye un problema equivalente al de la esfera con magnetización uniforme. Probarlo, y haciendo las identificaciones pertinentes, deducir el momento magnético total de la esfera rotante y los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ producidos por la misma.

6. Considere una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ε_1 sumergida en otro medio de permitividad ε_2. A una distancia $d < a$ del centro de la esfera se encuentra una carga q.

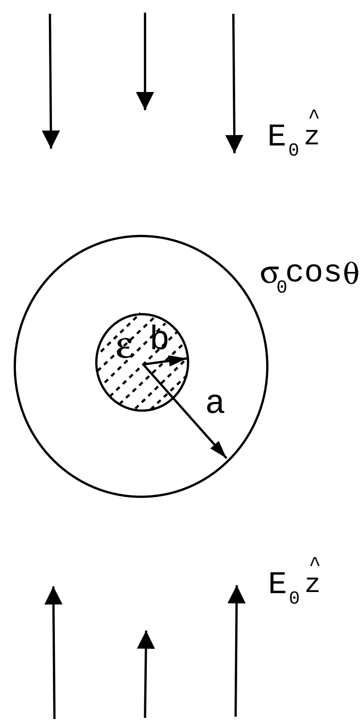
   (a) Halle el potencial electrostático en todo punto del espacio.

   (b) Halle las densidades de carga de polarización en volumen y superficie.

7. Se tiene una esfera homogénea de permitividad ε y radio b, concéntrica con una cáscara esférica con densidad de carga $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ y radio a, tal como se indica en la figura. El conjunto se halla sumergido en un campo eléctrico uniforme al infinito $\vec{E} = \vec{E}_0 \hat{z}$.

   (a) Calcular el potencial en todo punto del espacio.

   (b) Hallar la distribución de cargas inducidas en $r = b$. (*Sugerencia*: pensar que se puede resolver directamente la ecuación de Poisson o dividir la región en zonas).



8.

   (a) Resolver el problema de una carga puntual q entre dos cáscaras esféricas metálicas concéntricas conectada a tierra.

   (b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.

   (c) Observar qué sucede cuando se hace tender el radio de la esfera exterior a infinito ¿Cuánto valen las cargas totales inducidas en ese caso ?

   (d) Resolver el problema en el caso en que el potencial de las esferas se eleva a V_1 y V_2, respectivamente.

   (e) Cómo se resolvería el problema de una carga puntual entre dos cascaras esféricas conductoras aisladas con una carga total Q_1 y Q_2, respectivamente ?

   (f) Comparar con el resultado del problema correspondiente de la Guía de Green.

9.

(a) Una superficie cilíndrica de radio a y altura h, tiene su superficie lateral conectada a tierra, mientras que las tapas se mantienen a potencial V y $-V$. Hallar el potencial en todo punto interior al cilindro.

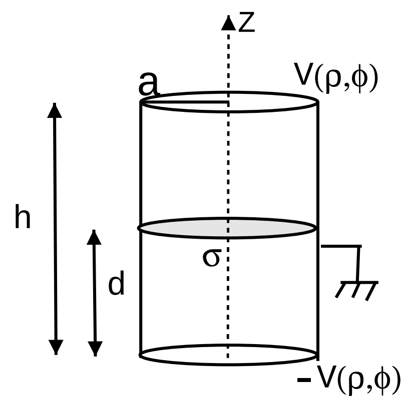
(b) Aplicar el resultado encontrado en el punto anterior para el caso en que el potencial lateral esté dado

$$V(\phi) = 2V\left[\frac{1}{2} - \Theta(\phi - \pi/2)\right], \qquad -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$$

10. Considere la figura (el cilindro es de sección circular). El borde lateral está a Tierra y las tapas superior e inferior a potencial V y $-V$ respectivamente, con $V(\rho,\phi) = v_0\rho\cos(\phi)$,$v_0$ una constante.

    (a) Calcule el potencial en la región interior.

    (b) ¿Cómo cambian las condiciones de empalme si se reemplaza el disco con σ por una densidad dipolar de magnitud D?



11.

    (a) Hallar el potencial y el campo electrostático en todo punto del espacio, producido por un disco cargado de radio a con densidad uniforme σ.

    (b) Verificar que, a través de límites adecuados, la expresión obtenida se reduce a las correspondientes a una carga puntual y a un plano infinito.

    (c) ¿El disco es conductor? ¿Por qué?

12. Hallar el potencial en todo punto del espacio producido por un disco conductor de radio a a potencial V. *Ayuda*:

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\alpha x)\sin(\beta x)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < \alpha < \beta \\ arccosec(\frac{\alpha}{\beta}) & \alpha > \beta \end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_0(\alpha x)\sin(\beta x)dx = \begin{cases} 0 & 0 < \beta < \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}} & 0 < \alpha < \beta \end{cases}$$

13. Calcular los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en todo punto del espacio producidos por:

    (a) Un imán cilíndrico, finito y permanente, caracterizado por una densidad de magnetización uniforme $\vec{M}$ paralela al eje del cilindro.

    (b) Un solenoide de las mismas dimensiones por el que circula una corriente I, y que tiene n espiras por unidad de longitud. *Sugerencia*. Usar el resultado del problema anterior y el principio de superposición.

14. Durante una experiencia de laboratorio, es necesario hacer pasar periódicamente un sensor por entre las caras polares de un imán. El sensor es filiforme, con un diámetro de $2\,mm$, una permeabilidad magnética cercana a 1, y no puede soportar campos magnéticos superiores a20 $gauss$. Diseñe un blindaje magnético que lo proteja de los 2000 $gauss$ que produce el imán cuyo campo atraviesa. *Sugerencias*: Reduzca el problema real a uno idealizado más simple, a través de suposiciones adecuadas. Plantee las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno para este problema idealizado. Utilize los resultados de la Sec. 5.12 del Jackson. Interprete los resultados.

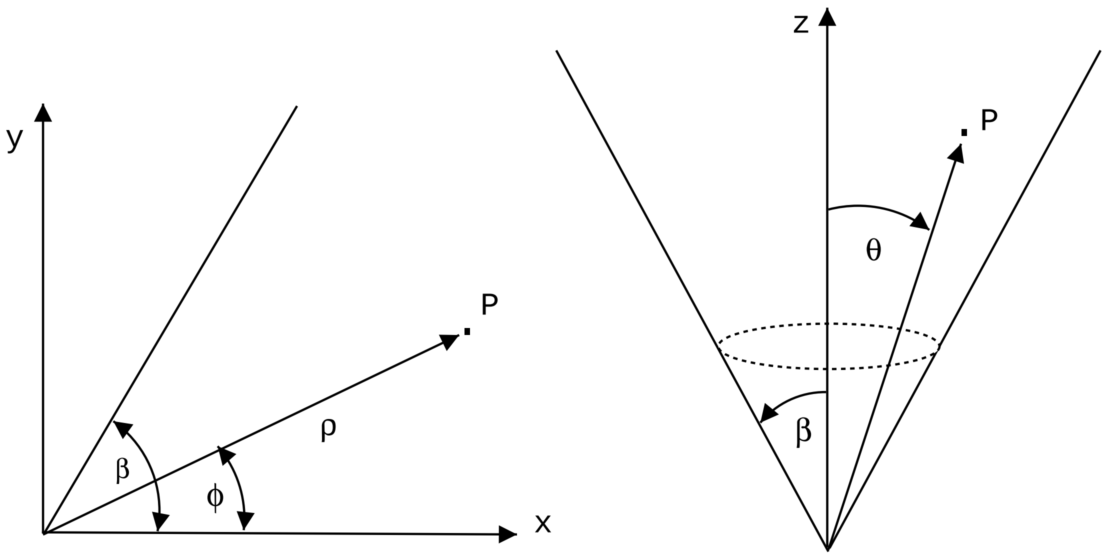
15. Se desea analizar la dependencia de la densidad de carga inducida en un conductor a potencial V con el ángulo que forman las superficies de éste (efecto de puntas). Para simplificar, es conveniente reducir el problema al caso bidimensional como se muestra en la figura, siguiendo los siguientes pasos:

    (a) Realizando separación de variables en coordenadas polares, encuentre la expresión general para el potencial en el espacio exterior al conductor.

    (b) Analizando la expresión para el potencial, obtenga la contribución más importante para el campo eléctrico en la zona cercana a la punta del conductor.

    (c) Encuentre una expresión aproximada para la densidad de carga superficial y analice su singularidad para ángulos β mayores que π (puntas agudas). Muestre que para un conductor delgado del ancho d, la densidad de carga en la punta es proporcional a $\rho^{-1/2}$.

    (d) Compare con el caso de una punta conica en tres dimensión. *Referencia:* ver Jackson capitulo 2 sección 2.11 y 3.4



16. Volver a la guía de Green y resolver los problemas incluidos en la sección *Problemas de Green relacionados con separación de variables.*

Preguntas Molestas

1. Explicar las diferencias entre una solución de la ecuación de Poisson (inhomogénea), de Laplace (dividiendo en zonas) y una solución hallada por superposición. ¿Qué pasa con las condiciones de contorno?

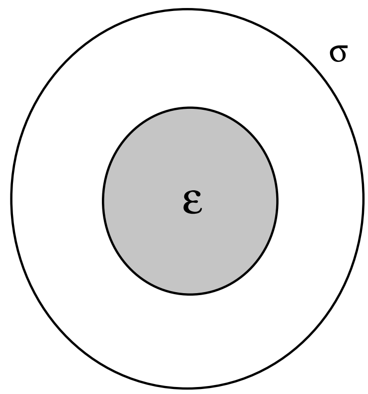
2. ¿Cómo puede calcularse el potencial producido por una carga puntual en el centro de un cilindro conductor de radio a y altura h a potencial V? ¿En cuántas variables se presenta problema de Sturm- Liouville?

3. Una carga puntual está ubicada en el origen de coordenadas, dentro de una caja cilíndrica a potencial cero. La caja está definida por $z = -h/2$, $z = h/2$ y $r = a$.

    (a) Se plantea la posibilidad de encarar el problema por dos métodos distintos: dividiendo en zonas y resolviendo Laplace o directamente por Poisson . Discutir por qué uno de ellos es muy poco práctico en este problema.

    (b) Se podría calcular el potencial planteando problema de Sturm-Liouville en cualquiera de las tres variables. Entonces, ¿no debería ser $\phi = 0$ la única solución?

4. ¿Cuál es el menor número de regiones en que puede dividirse el problema de la figura, para calcular el potencial por el método de separación de variables?



5. La solución del problema 9 (b) es:

$$\Phi\left(r,\phi,z\right)=\sum_{j,k}\frac{16V\left(-1\right)^{k}\cos\left[\left(2k+1\right)\phi\right]}{\pi^{2}\left(2j+1\right)\left(2k+1\right)}\sin\left[\left(2j+1\right)\frac{\pi z}{h}\right]\frac{I_{2k+1}\left[\left(2j+1\right)\pi r/h\right]}{I_{2k+1}\left[\left(2j+1\right)\pi a/h\right]}$$

Pero, entonces

$$\Phi\left(a\right)=\sum_{j,k}\frac{16V\left(-1\right)^{k}\cos\left[\left(2k+1\right)\phi\right]}{\pi^{2}\left(2j+1\right)\left(2k+1\right)}\sin\left[\left(2j+1\right)\frac{\pi z}{h}\right]$$

que depende de z. ¿Está bien hallada la solución? ¿Cumple la condición de contorno?