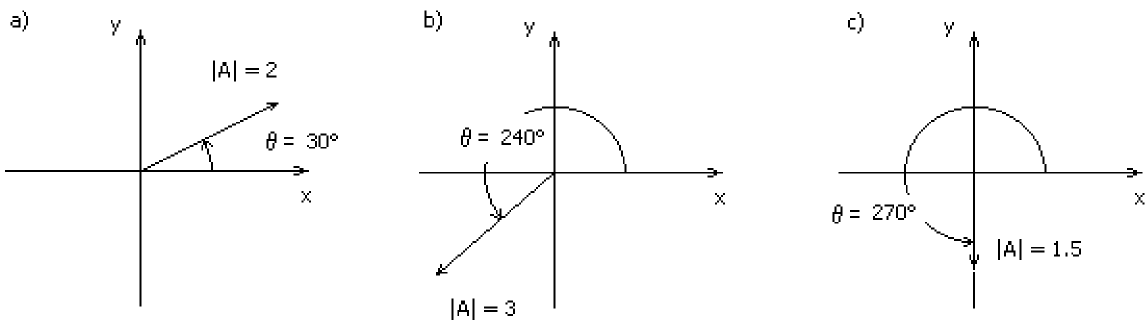
Guía 0. Matematica

I. Vectores

1) Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Represéntelos gráficamente.
   a) **A**= (-4; 3) b) **B** = (2; 0) c) **C** = -2$\hat{x}$ − 3$\hat{y}$ d) **D** = 0$\hat{x}$ − 5$\hat{y}$

2) Halle las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



3) Dados los vectores **A** y **B** indicados, halle gráficamente su suma.

   a) **A** = (-3; 2) **B** = (-2; 5)

   b) **A** tal que |**A**| = 2 , θ = 240 ° **B** tal que |**B**|= 3 , θ = 135 °

   c) **A** = (-2; 0) **B** = (0; 4)

4) Sean **A** y **B** los vectores dados en el ejercicio anterior. Halle analíticamente las componentes cartesianas y polares del vector **A** + **B**, y del **A** – **B**. ¿El módulo del vector suma, **C =** **A** + **B**, es igual a la suma de los módulos de **A** y de **B**?

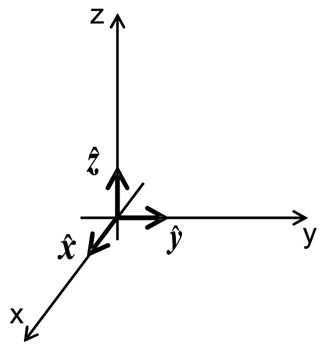
5) Halle el vector que tiene origen en el punto **A** y extremo en el punto **B** en los siguientes casos:
   a) **A**=(2; -1) y **B**=(-5; -2).
   b) **A** =(2; -5; 8) y **B**=(-4; -3; 2).

6) Dados los vectores:
   A = (3$\hat{x}$ + 2$\hat{y}$ + 3$\hat{z}$) **B** = (4$\hat{x}$ − 3$\hat{y}$ + 2$\hat{z}$) **C** = (-2$\hat{y}$ − 5$\hat{z}$)
   efectúe las siguientes operaciones:
   a) (**A** – **B**)/|**C**| + **C**
   b) 5**A** - 2**C**
   c) –2 **A** + **B** – **C**/5

Se define el **producto escalar** de dos vectores como **A . B =** $|A||B|\cos\theta$ **,** donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.

---

7) Sean $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura.



$\hat{x}$ = (1;0;0) $\hat{y}$ = (0;1;0) $\hat{z}$ = (0;0;1)

Calcule $\hat{x}\cdot\hat{x}$, $\hat{x}\cdot\hat{y}$, $\hat{x}\cdot\hat{z}$, $\hat{y}\cdot\hat{x}$, $\hat{y}\cdot\hat{y}$, $\hat{y}\cdot\hat{z}$, $\hat{z}\cdot\hat{x}$, $\hat{z}\cdot\hat{y}$, $\hat{z}\cdot\hat{z}$

8) Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si

A = $A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z}$ **B** = $B_x\,\hat{x} + B_y\,\hat{y} + B_z\,\hat{z}$

entonces

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

9) Efectúe el producto escalar de los vectores **A** y **B** y diga si en algún caso **A** es perpendicular a **B**.

a) **A** = $3\hat{x} - 2\hat{j} + \hat{z}$ **B** = $-\hat{x} + 3\hat{z}$

b) **A** = (2; 3; -1) **B** = (6; -5; 2)

c) |**A**| = 3 |**B**| = 2 θ = 60° (θ: ángulo entre **A** y **B**)

Se define el **producto vectorial** como **A** x **B** =**C** tal que

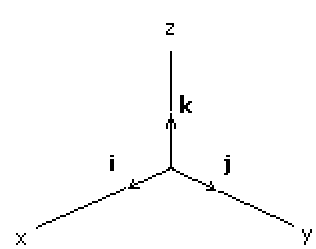
a) $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\,\mathrm{sen}\,\theta$, donde θ es el ángulo que forman los dos vectores

b) **C** tiene dirección perpendicular al plano determinado por **A** y **B**

c) El sentido es tal que **A**, **B** y **C** tengan la misma orientación en el espacio

---

10) Sean $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$, los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura



Calcule $\hat{i}\times\hat{i}$, $\hat{i}\times\hat{j}$, $\hat{i}\times\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{i}$, $\hat{j}\times\hat{j}$, $\hat{j}\times\hat{k}$, $\hat{k}\times\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{j}$, $\hat{k}\times\hat{k}$.

11) Usando la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si:

A = Ax $\hat{i}$ + Ay $\hat{j}$ + Az $\hat{k}$ **B** = Bx $\hat{i}$ + By $\hat{j}$ + Bz $\hat{k}$

entonces **A** x **B** = (Ay Bz - Az By ; Az Bx - Ax Bz ; Ax By - Ay Bx)

12) Sean los vectores **A** = (3; 2; 1) **B** = (1; 0;-1) **C** = (0;-2; 4) calcule:

a) **B** x **C**
b) -4(**B** x **B**) - **A**
c) (**A** + **B**) x **C**
d) (**A** x **B**).**C**

II. Ecuaciones Diferenciales

13) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Es decir, encuentra las funciones y(t). En todos los casos, y_0 es una constante.

(a) $\frac{dy}{dt} = 2\ ;\ y(0) = 0$ (b) $\frac{dy}{dt} = a\ ;\ y(0) = y_0$

(c) $\frac{dy}{dt} = e^t + 2\ ;\ y(0) = y_0$ (d) $\frac{dy}{dt} - \sin(3t) = 0\ ;\ y(0) = y_0$

(e) $\frac{dy}{dt} = 2y\ ;\ y(1) = y_0$ (f) $t\frac{dy}{dt} = 1;\ y(1) = y_0$

14) Resuelva estas ecuaciones diferenciales de segundo orden. Tome como condición inicial en todos los casos $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$ (F y A son dos constantes)

a) m $x'' = F$; b) $x'' = A.t$ c) $x'' = e^t$

Ayuda: Muchas veces, para resolver una de segundo orden, conviene primero asignarle un nuevo nombre a la derivada primera. Por ejemplo, en lugar de x″, usar x′=v y x″=v′.

Notación: $x' = \frac{dx}{dt}$ y $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$

15) Probar que $x = \cos(3t)$ es una solución de la ecuación $x'' = -9.x$

16) Encontrar una solución para las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas

a) $x'' = -4.x$; $x(0) = 3$; $x'(0) = 0$
b) $x'' = -4.x$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 6$
c) $x'' = -4.x - 12$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 0$