Mapas caóticos y embebidos: guía numérica.

Mapa logístico y mapa de Henon.

Dado el mapa $x_{n+1} = g_a(x)= a x_n (1 – x_n)$,

1. Calcule analíticamente los valores del parámetro *a* para los que el mapa sufre las primeras duplicaciones de período. Grafique la segunda iteración de $g_a(x)$ y encuentre gráficamente los puntos fijos para distintos valores de *a*. Muestre la aparición del período 2 y grafique la solución.
2. Escriba un código para generar las soluciones con una computadora y construya el diagrama de bifurcaciones del sistema: para cada valor de *a*, elija un valor al azar para x_1 en [0,1], calcule la órbita de x bajo la acción del mapa, ignore los primeros 100 puntos y grafique la órbita a partir de ese valor. Repita el procedimiento para distintos valores de *a*. Debe obtener un gráfico como el de la Figura 1.
3. Verifique los valores analíticos encontrados para las primeras duplicaciones de período. Estime el valor a partir del cual las soluciones son caóticas.
4. Describa qué pasa para *a*>4.
5. Elija un subintervalo de longitud 0.01 en el parámetro *a* que parezca contener atractores caóticos (por ejemplo, en [3.9,4.0]). Magnifique la región hasta que aparezca una ventana con soluciones de periodicidad bien definida.
6. Elija un punto *p* en el atractor para *a*=3.9.

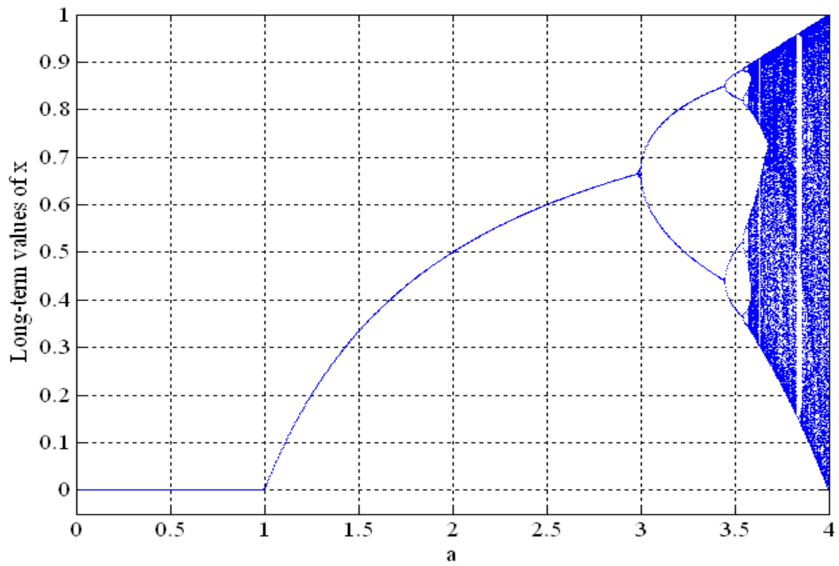

Figura 1: Diagrama de bifurcaciones para el mapa logístico. El punto fijo que existe para valores pequeños del parámetro da origen a una órbita de período 2 en *a*=3, que luego da origen a sucesivas bifurcaciones.

Ahora considere el mapa de Henon $f(x,y) = (a-x^2+by, x)$.

1. Calcule analíticamente los puntos fijos y su estabilidad en función de los parámetros (*a*,*b*).
2. Calcule el determinante Jacobiano y muestre que la imagen de cualquier región se comprime.
3. Use las herramientas gráficas utilizadas en el caso anterior para visualizar distintas soluciones del mapa de Henon. Grafique el atractor caótico para (*a*, *b*) = (1.4, 0.3).

4. Este es uno de los más simples mapas que captura la dinámica de estirado y plegado de los sistemas caóticos. Busque pruebas para la siguiente afirmación: en el mapa de Henon, el parámetro *a* controla la cantidad de estiramiento, y el parámetro *b* el espesor del plegado.

Embebidos.

Casi nunca disponemos de toda la información de un dado sistema para estudiarlo. Muchas veces, en efecto, solamente tenemos a disposición una serie temporal: la altura de la marea, la temperatura ambiente, un electrocardiograma.
¿Podemos contestar preguntas acerca de la dinámica del sistema subyacente sin entender todos los detalles de las ecuaciones?
Una forma de contestar algunas preguntas sobre el sistema que da origen a una dada serie temporal consiste en realizar embebidos.
Para ver cómo funciona esto:

1. Integre las ecuaciones que ya utilizó en la guía de introducción al caos para el sistema de Rossler y guarde la serie temporal de una de sus variables. Haga lo mismo para el oscilador lineal forzado.
2. A partir de esas series, construya un 'embebido' en el espacio tridimensional usando coordenadas retardadas: si la serie original es c(t), construya la serie temporal tridimensional (c(t), c(t-T), c(c-2T)).
3. Encuentre un valor de T adecuado que le permita visualizar el atractor original.
4. En el caso del oscilador forzado, haga un embebido en dos dimensiones para la serie temporal en dos casos: en uno incluya el transitorio y en otro no. ¿Qué diferencias nota en los embebidos? ¿Puede concluir algo sobre la dimensionalidad del sistema en ambos casos?