El péndulo (otra vez)
Parcial Computacional - MEFE 2025

Entrega

Subir al campus:

- Un informe en formato PDF.
- El código con el que generó los gráficos y resultados.

En ambos archivos, indicar el nombre, apellido y número de libreta o DNI. La página del curso es: https://campus.exactas.uba.ar/course/view.php?id=362. Si aún no habían entrado, la clave de automatriculación es: `completar`

Sobre el informe:

- **Largo:** aproximadamente 1 hoja de texto (500 palabras o 3000 caracteres) + figuras.
- Dar una descripción clara y precisa de la metodología utilizada.
- Mostrar todos los gráficos que considere necesarios y los resultados esperados.
- ¿Cuál es la conclusión?

Importante: este problema tiene **1 parte obligatoria** (sección 1), y **3 partes opcionales** (secciones 2, 3 y 4). Hay que **elegir al menos 1 de las partes opcionales**.

Enunciado

Para estudiar la relación entre el periodo T y el largo L de un péndulo y estimar la aceleración de la gravedad g, se realizaron N pares de mediciones (L_i, T_i) (**datos**). Para L, se consideró que su incerteza es despreciable. Para T, se asumió que el error de medición del periodo σ_T no depende del valor del periodo y se estimó a partir de la desviación estándar de 30 mediciones del periodo para un largo fijo.

Bajo la aproximación de ángulos pequeños para la oscilación del péndulo, se tiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1}$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

1. Ajuste por cuadrados mínimos y test de χ^2

Se define la variable aleatoria $S(a)$ como:

$$S(a) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{T_i - af(L_i)}{\sigma_T} \right)^2 \tag{2}$$

donde $f(L) = 2\pi\sqrt{L}$ y $a = \frac{1}{\sqrt{g}}$, que vienen dadas por la relación esperada para el péndulo. $S(a)$ es mayor cuanto más difieran las mediciones T_i de la relación esperada $f(L_i)$. Además, si los T_i tienen distribución normal $N\big(af(L_i), \sigma_T\big)$ y se obtiene $\hat{a}$ minimizando $S(a)$, se tiene que:

- $S(a)$ tiene distribución χ^2_N de N grados de libertad,
- $S(\hat{a})$ tiene distribución χ^2_{N-k} con $k = 1$, la cantidad de parámetros estimados,
- $\hat{a}$ tiene distribución $N(a, \sigma_{\hat{a}})$.

Que los T_i tengan distribución normal $N\big(af(L_i), \sigma_T\big)$ no solo implica que sean gaussianos, sino también que conocemos el modelo correcto, $af(L)$, y tenemos bien estimados los errores, σ_T.

1. Dados los L_i medidos y asumiendo $g = 9{,}8$ m/s^2, obtenga los T_i^0 esperados (¡no los medidos!). Con estos, simule una medición de los $T_i \sim N\Big(T_i^0, \sigma_T\Big)$. Luego, realice un ajuste por cuadrados mínimos a estos datos simulados y calcule S.
2. Repita múltiples veces el punto 1 y arme un histograma de los S obtenidos. Superponga el gráfico de la distribución χ^2_{N-k}.
3. Tanto a partir de los datos simulados como de la distribución χ^2_{N-k}, obtenga el valor crítico S_c tal que rechace la hipótesis de S es χ^2_{N-k} con una probabilidad $\alpha = 0{,}05$.
4. Ahora, ajuste los datos experimentales y calcule S. ¿Rechaza la hipótesis? ¿Qué conclusión puede sacar de este resultado?
5. Para el S obtenido a partir de los datos experimentales, ¿cuál es su p-valor? ¿Cuál es el suceso representado por dicha probabilidad?
6. ¿Obtuvo el valor de g que esperaba?

2. Errores subestimados o no gaussianos

Una de las hipótesis del test de χ^2 es que los errores son gaussianos y que están bien estimados. Anteriormente, para calibrar el error de medición del periodo σ_T, se habían realizado 30 mediciones del periodo para un largo fijo, con las que calculó la desviación estándar. Ahora, repitió la calibración y dispone de 500 mediciones del periodo para la misma longitud (**datos**). Estos no parecen seguir una distribución gaussiana sino una distribución de Laplace (doble exponencial).

1. Repita los puntos anteriores utilizando:

   a) la distribución de Laplace para simular los errores, estimando el parámetro de la distribución a partir de estos datos,

   b) la distribución normal para simular los errores, pero utilizando la desviación estándar de esta nueva calibración.

2. Si fija un nivel de significancia en $\alpha = 0{,}95$, ¿cuál la probabilidad de rechazar el test de χ^2 bajo la hipótesis de errores gaussianos, cuándo la aceptaría bajo la hipótesis de errores laplacianos?

3. En general, ¿considera que el test de χ^2 es un buen estadístico para discriminar entre errores gaussianos o laplacianos?

3. Modelo incorrecto y el F-test

Otra de las hipótesis del test de χ^2 es que el modelo es el correcto. Es decir, que estamos estimando correctamente el μ de la gaussiana.

El modelo del péndulo asume que medimos correctamente su "largo"L, desde el punto fijo donde cuelga hasta su centro de masa. Generalmente, se suele cometer un .$^{\mathrm{er}}$ror sistemático"(en el sentido de *equivocación*, ¡no incerteza!) al medir este largo que se puede ajustar agregando un parámetro L_0 al modelo:

$$f_B(L; a, L_0) = 2\pi a\sqrt{L - L_0} \tag{3}$$

Sin embargo, cuando agregamos parámetros a un ajuste siempre obtenemos un χ^2 menor. Para saber si este parámetro está aportando algo o .$^{\mathrm{a}}$justandoruido, se puede utilizar el *F-test*. Este se utiliza para comparar dos modelos anidados, es decir, cuando uno de los modelos, f_B, tiene más parámetros y es una extensión del otro, $f_A(L; a) = f_B(L; a, L_0 = 0)$. Permite evaluar si la mejora en el ajuste al agregar parámetros adicionales es estadísticamente significativa o si puede atribuirse al azar.

El estadístico F se define a partir de los valores de χ^2 de ambos modelos y sus respectivos números de parámetros p como:

$$F = \left(\frac{\chi^2_A}{\chi^2_B} - 1\right)\frac{n - p_B}{p_B - p_A} \tag{4}$$

1. Para los L_i medidos, simule una medición de los periodos T_i utilizando el modelo f_A y errores gaussianos. Luego, ajuste los modelos f_A y f_B y calcule χ^2_A, χ^2_B y F.

2. Repita multiples veces y realice histogramas de estas variables comparando con su distribución esperada.

3. Calcule el poder del test para la hipótesis alternativa $f_B(L; a, L_0 = 0{,}05)$.

4. Aplique el test F a los datos medidos. ¿Qué concluye?

4. Un test complementario: el test de rachas (*runs*)

Cuando no conocemos las incertezas σ_T de las mediciones, podemos estimarlas a partir de los residuos del ajuste (si tenemos el modelo correcto). En ese caso, no podemos utilizar el test de χ^2 para evaluar si el ajuste es bueno. Para ello, podemos utilizar un test complementario que mira los signos de los residuos (diferencia entre el modelo y el ajuste) en lugar de mirar las sus distancias.

El test de runs de Wald–Wolfowitz es un test no paramétrico (es decir, no asume una distribución particular) para evaluar si los elementos de una secuencia son mutuamente independientes. Una racha (*run*) de una secuencia es un segmento máximo no vacío de la secuencia formado por elementos adyacentes iguales. Por ejemplo, la secuencia de $N = 21$ elementos:

$$\underbrace{++++}_{4}\ \underbrace{---}_{3}\ \underbrace{+++}_{3}\ \underbrace{-}_{1}\ \underbrace{++++++}_{6}\ \underbrace{----}_{4} \tag{5}$$

consiste de $N_+ = 13$ elementos positivos, $N_- = 8$ elementos negativos, y $R = 6$ rachas, con longitudes 4, 3, 3, 1, 6 y 4. Otra forma de decirlo: el número de rachas es uno (1) más que la cantidad de veces que cambia de signo (5) la secuencia.

Bajo la hipótesis nula de que estos están tomados de la misma distribución, el número de rachas R se puede aproximar por una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ con

$$\mu = 2\frac{N_+ N_-}{N} + 1 \tag{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{N-1} \tag{7}$$

Para utilizar este test para evaluar la bondad de ajuste, se puede considerar la secuencia de signos de los residuos r_i del ajuste.

1. Para los L_i medidos, simule una medición de los periodos T_i con errores gaussianos. Ajuste por cuadrados mínimos y calcule la cantidad de *runs*.

2. Repita múltiples veces y grafique la distribución de *runs*. Compare con la distribución esperada.

3. Repita para otras distribuciones de errores, como exponencial o Laplace. ¿Cambia la distribución de *runs*?

4. Calcule el test de *runs* para los datos medidos. ¿Cuál es el p-valor? ¿Qué concluye?