Intervalos de confianza frecuentista y bayesianos para H_0

Parcial Computacional - MEFE 2025

Entrega

Subir al campus:

- Un informe en formato PDF.
- El código con el que generó los gráficos y resultados.

En ambos archivos, indicar el nombre, apellido y número de libreta o DNI. La página del curso es: `https://campus.exactas.uba.ar/course/view.php?id=362`. Si aún no habían entrado, la clave de automatriculación es: `completar`

Sobre el informe:

- **Largo:** aproximadamente 1 hoja de texto (500 palabras o 3000 caracteres) + figuras.
- Dar una descripción clara y precisa de la metodología utilizada.
- Mostrar todos los gráficos que considere necesarios y los resultados esperados.
- ¿Cuál es la conclusión?

Enunciado

En este ejercicio, se busca construir intervalos de confianza frecuentistas y bayesianos para el parámetro H_0 utilizando datos de cronómetros cósmicos. Los datos a utilizar son de la forma $(z, H(z), \sigma_{H(z)})$, donde z es el corrimiento al rojo, $H(z)$ es la tasa de expansión del universo a ese corrimiento y $\sigma_{H(z)}$ es el error asociado a $H(z)$.

El modelo cosmológico utilizado es el modelo de ΛCDM (Lambda Cold Dark Matter), que describe la evolución del universo en términos de materia oscura fría y una constante cosmológica. Bajo este modelo, la tasa de expansión del universo se relaciona con el parámetro H_0 y la densidad de materia Ω_m a través de la siguiente relación:[1]

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1-\Omega_m)} \tag{1}$$

Los datos de cronómetros cósmicos se pueden encontrar en el archivo `datos_cronometros.txt`, que contiene columnas de z, $H(z)$ y $\sigma_{H(z)}$.

- Graficar los datos observacionales $H(z)$ vs. z, junto con un ajuste utilizando la expresión teórica de $H(z)$ 1.

[1] se desprecia la contribución de la radiación y la curvatura del universo, que son pequeñas a las escalas de tiempo actuales.

Intervalo de confianza frecuentista

A partir de aquí, puede fijar Ω_m a un valor razonable (por ejemplo $\Omega_m = 0{,}3$) y realizar el análisis que sigue para H_0.

1. Tomar M valores posibles de H_0 en el rango $[60, 80]$.

2. Para cada valor de H_0, simular N conjuntos de datos sintéticos. Para ello, usar los mismos valores de z_i y errores $\sigma_{H(z_i)}$ que los datos reales, generando datos sintéticos como:
$$H_i^{\text{sint}} = H_0\sqrt{\Omega_m(1+z_i)^3 + (1-\Omega_m)} + \epsilon_i$$
donde $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2_{H(z_i)})$. Se asume que los errores son gaussianos e independientes.

3. Para cada conjunto simulado, estimar el valor de $\hat{H}_0$ que maximiza la verosimilitud (equivalente a minimizar χ^2 en el caso gaussiano).

4. Con los N valores de $\hat{H}_0$ obtenidos, construir un histograma. A partir de esta distribución empírica, determinar los intervalos de confianza centrales al 68 % y al 95 %.

5. Repetir los pasos anteriores para cada uno de los M valores de H_0. Con los resultados obtenidos, utilizar el método de percentiles para construir un intervalo de confianza para el parámetro H_0. Sugerencia: puede ser útil hacerlo a partir de la distribución acumulada (CDF) y su conjugada (1-CDF).

Intervalo de credibilidad bayesiano

6. Escribir la expresión de la posterior para H_0 (fijando Ω_m), suponiendo errores gaussianos e independientes.

7. Calcular numéricamente el intervalo de credibilidad bayesiano al 68 % y al 95 % asumiendo:

   - Un prior uniforme para H_0 en el rango $[60, 80]$.
   - Un prior gaussiano centrado en 70 con una desviación estándar de 5.

   Comparar ambos resultados y discutir la influencia del prior.