

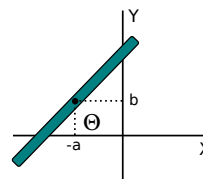
Estadística en Física Experimental (1^{er} Cuatrimestre 2025)

Guía de Problemas N° 3 | Variables aleatorias continuas – Cambio de variables

- La altura de la población masculina tiene distribución normal $N(175 \text{ cm}, 8 \text{ cm})$. Sabiendo que los colectivos tienen una altura de 1.95 m, ¿qué fracción puede viajar parada sin necesidad de reclinarse? [Rta: 0.9938]
- Se pretende medir una magnitud A con un detector bien calibrado cuya precisión es σ . Considerando que el valor medio de A es x , se desea informar un rango que tenga un 90% de probabilidad de incluir la medición de A .
 - ¿Qué rango $x \pm a$ podemos informar con lo que sabemos? *Ayuda: Desigualdad de Chebyshev.* [Rta: $x \pm 3.162\sigma$]
 - ¿Y si nos dicen que además la distribución que caracteriza la respuesta del detector es unimodal? *Ayuda: Desigualdad de Vysochanskij–Petunin.* [Rta: $x \pm 2.10\sigma$]
 - ¿Y si ahora agregan la información de que la distribución es gaussiana?, [Rta: $x \pm 1.645\sigma$]
- Una fuente radiactiva de actividad λ (decaimientos por unidad de tiempo) se ubica frente a un detector de eficiencia perfecta. Asuma que en cada decaimiento se emite una sola partícula.
 - Muestre que X , el tiempo transcurrido hasta la detección de la primera partícula, tiene distribución exponencial $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Proceda de dos maneras alternativas, discutiendo la validez de cada paso:
 - Obtenga primero $F_X(t) = P(X \leq t)$ como el complemento del suceso “el primer decaimiento ocurre a tiempo mayor que t ”, y luego por derivación, la densidad de probabilidad $f_X(t)$.
 - Escriba directamente $f_X(t)$ como el producto de la probabilidad de que no haya ningún decaimiento entre 0 y t , y que haya un decaimiento justo en el dt siguiente.
 - Se dice que una distribución no tiene memoria si cumple $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$.
 - ¿Por qué a esto se lo llama así?
 - Convénzase de que la exponencial es la única distribución de variable continua que posee esta propiedad (intente usando otras distribuciones). Relaciónelo con las hipótesis que llevan a la distribución de Poisson.

Nota: para variables aleatorias discretas se define la condición como: $P(X > n+m | X \geq n) = P(X > m)$

 - Se tiene una fuente de 1 Bq (Becquerel $\equiv$ 1 decaimiento s^{-1}).
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el primer decaimiento ocurra recién después de 5 segundos? [Rta: 0.0067]
 - Calcule la probabilidad de que el primer decaimiento ocurra dentro del primer segundo. Repita el cálculo para el tercer segundo (i.e. el primer decaimiento ocurre entre el 2^{do} y 3^{er} segundo). ¿Contradice esto la “falta de memoria”? [Rta: 0.6321 y 0.0855]
 - ¿Cuánto tiempo debe esperarse para que haya al menos un decaimiento, con una probabilidad del 99%? [Rta: 4.61 s]
 - Si el detector tuviera perfecta eficiencia intrínseca (mide todo lo que le llega) pero cubre un ángulo sólido Ω visto desde la fuente, ¿cómo se modifica $f_X(t)$ si las partículas son emitidas en todas direcciones con igual probabilidad?
 - Mencione otros tres ejemplos de procesos que tengan distribución exponencial.
- Si X tiene distribución normal estándar,
 - ¿Qué distribución tiene $Y = aX + b$?
 - ¿Cómo implementaría un generador de números al azar $N(\mu, \sigma)$ a partir de uno $N(0,1)$?
- Una barra gira alrededor del punto $(-a, b)$, hasta detenerse al azar formando un ángulo Θ con el eje x , ($\Theta \in [-\pi/2, \pi/2]$), como muestra la figura. La recta que contiene a la barra corta al eje de ordenadas en un punto Y . Encuentre la función de distribución $F_\Theta(t)$, y a partir de ésta muestre que Y tiene densidad de probabilidad de Cauchy, $f_Y(t) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (t-b)^2}$. Encuentre su esperanza.



Notar que la esperanza de una variable aleatoria con distribución de Cauchy no está definida, ya que la primitiva de $x/(1+x^2)$ es divergente (su *valor principal* sí está definido y es cero por simetría).

6. Muestre que la densidad de probabilidad de $Y=X^2$ se obtiene a partir de la de X como $f_Y(t) = [f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})]/2\sqrt{t}$. Halle $f_Y(t)$ si
- X es uniforme en $[0,1]$ [Rta: $f_Y = (2\sqrt{y})^{-1}(0 < t < 1)$]
 - X es normal $N(0,1)$ (esta f_Y se denomina χ_1^2 , chi² con un grado de libertad). [Rta: $f_Y = (1/\sqrt{2\pi t}) \exp(-t/2)$, con $t > 0$]
7. Muestre que $Y = e^X$ (siendo X una variable aleatoria con distribución uniforme) tiene distribución $f_Y(t) = 1/t, 1 \leq t \leq e$. Note que esto permite escribir una rutina que genere números con distribución $1/x$. ¿Cómo haría para generar números al azar con distribución exponencial?
8. Se va a realizar una serie de mediciones *independientes* $\{x_1, \dots, x_n\}$, de una variable aleatoria X con distribución acumulativa $F_X(x)$ y densidad de probabilidad $F'_X(x) = f_X(x)$.
- Demuestre que la densidad de probabilidad del máximo de todas las mediciones $U=\max\{X_1, \dots, X_n\}$ es $f_U(x) = n f_X(x) [F_X(x)]^{n-1}$.
 - Probar que la densidad de probabilidad del mínimo de todas las mediciones $V=\min\{X_1, \dots, X_n\}$ es $f_V(x) = n f_X(x) [1 - F_X(x)]^{n-1}$.
 - Ciertas lámparas en uso continuo tienen una vida útil con distribución exponencial de 20 días. Una habitación usa para su iluminación tres de estas lámparas. Utilice el resultado de alguno de los ítems anteriores para determinar la distribución del tiempo transcurrido hasta que se deba cambiar una lámpara.
 - Proponga una pregunta que requiera emplear la otra fórmula, es decir, la que no usó para resolver el ítem anterior.
9. Si X es una variable aleatoria continua con densidad de probabilidad $f_X(t)$ y función de distribución acumulada $F_X(t)$ invertible, muestre que la variable

$$Y \equiv \int_{-\infty}^X f_X(t) dt \equiv F_X(X)$$

tiene distribución uniforme en $[0, 1]$.

Ayuda: calcule $F_Y(t)$.

Este ejercicio lo vamos a retomar en la guía 9 (test de hipótesis).

Nota: esta se conoce como la transformación de la integral de probabilidad, que fue introducida por Fisher en 1932.

Ejercicio computacional

Método de Monte Carlo (conocido como aceptación-rechazo): Para generar números pseudoaleatorios con una distribución arbitraria $f(t)$, en un dominio $[a, b]$ en el que f está acotada (siendo f_m su valor máximo), se puede proceder de la siguiente manera:

- Se generan dos números al azar y y z con distribución uniforme en $[0, 1]$.
- A partir de y y z se determinan:
 - $u = a + (b - a)y$,
 - $v = f_m z$.
- Si $v \leq f(u)$, se incluye $x = u$ en la muestra de números generados, en otro caso se descarta.
- Se repiten estos pasos hasta obtener la cantidad deseada de números aceptados.

Utilizando el resultado del problema 5, genere con la computadora 10000 números al azar que sigan la distribución de Cauchy a partir de una uniforme $[0, 1]$. Presente los datos en un histograma y grafique sobre éstos la predicción teórica. Repita usando el Método Monte Carlo. Discuta los pros y contras de cada método.