Estructura de la materia 3

TEMA 11. REPASO. CAMPOS CLASICOS Y PRIMERA CUANTIFICACION

J. Miraglia

Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Argentina.

(Dated: May 31, 2015)

Abstract

Primera cuantificación. Estados de Volkov. Invariancia de gauge. Repaso. Radiación electromagnética clásica. Campos eléctricos y magnéticos. Densidad de energía. Vector de Poynting. Aproximación dipolar. Trabajando en una caja y la densidad de estados.

falta dibujos , espanol y bibliografía**.**

(seria interesante re-llamar $\lambda \overrightarrow{k}$ -> $\underrightarrow{k}$ ahorraría mucho espacio)

PACS numbers:

I. PRIMERA CUANTIFICACIÓN

El Hamiltoniano de una partícula de carga q sujeto al potencial V y al campo electromagnético caracterizado por el potencial vector $\overrightarrow{A}$ esta dado por (Goldstein p. 256)

$$H = \frac{1}{2m}(\overrightarrow{p} - q\overrightarrow{A})^2 + qV, \tag{1}$$

Y este es el punto de partida. La Eq(1) nos permite cuantificar el movimiento de una partícula según las reglas de la (primera) cuantificación (habra una segunda), que asume

$$\begin{cases} \overrightarrow{p} \rightarrow \widehat{\overrightarrow{p}} = \frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}}, \\ \overrightarrow{r} \rightarrow \overrightarrow{r}, \\ H \rightarrow \widehat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \end{cases} . \tag{2}$$

luego

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\overrightarrow{r},t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} - q\overrightarrow{A}\right)^2 + qV\right]\Psi(\overrightarrow{r},t). \tag{3}$$

Desarrollando el cuadrado

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} - q\overrightarrow{A}\right)^2 &= \left(\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}}\right)^2 - \frac{\hbar}{i}q\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} + \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}}\overrightarrow{A}\right) + q^2A^2, \\ &= -\hbar^2\nabla^2_{\overrightarrow{r}} - 2q\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla}_r + q^2A^2, \end{aligned} \tag{4}$$

donde hemos hecho

$$\overrightarrow{\nabla}_r\ \left(\overrightarrow{A}\Psi\right) = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}}\ \Psi + \underbrace{\left(\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}}\cdot\ \overrightarrow{A}\right)}_{=0 \text{ gauge de Coulomb!}}\Psi \quad . \tag{5}$$

Finalmente podemos reescribir la ecuación de Schrödinger así

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\overrightarrow{r},t) = [H_0 + H' + H'']\ \Psi(\overrightarrow{r},t), \tag{6}$$

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\overrightarrow{r}} + qV = \text{Hamiltoniano mecánico o de la materia}, \tag{7}$$

$$H' = -\frac{q}{m}\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}_r = \text{interacción materia-radiación}, \tag{8}$$

$$H'' = \frac{q^2}{2m}A^2 = \quad \text{energía ponderomotriz}, \tag{9}$$

Este es el Hamiltoniano semiclásico en el sentido que las magnitudes $\overrightarrow{A}$ y V son clásicas y el electrón es puramente cuántico.

A. Estados de Volkov (1935)

Supongamos una partícula libre ($V = 0$), cuya solución es la conocida onda plana

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r},t) &= H_0\psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\overrightarrow{r}}\psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r},t), &(10)\\ \psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r},t) &= \psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r})\exp(-it\varepsilon_k/\hbar), &(11)\\ \psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r}) &= \frac{\exp(i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})}{(2\pi)^{3/2}}, \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_k = \frac{\hbar^2k^2}{2m} &(12)\end{aligned}$$

Supongamos que a partir de $t = t_0$, aparece en todo el espacio un potencial vector $\overrightarrow{A}(t)$ (pero $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})$, o sea **independiente** de la posición!). Entonces la solución del hamiltoniano son los llamados estados de Volkov :

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\overrightarrow{r},t) &= \left(\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} - q\overrightarrow{A}\right)^2\Psi(\overrightarrow{r},t) &(13)\\ \Psi(\overrightarrow{r},t) &= \psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r})\exp(-iS(t)/\hbar), &(14)\\ S(t) &= \frac{1}{2m}\int_{t_0}^{t}dt\ \left(\hbar\overrightarrow{k} - q\overrightarrow{A}(t)\right)^2, &(15)\end{aligned}$$

donde hemos supesto que $V = 0$. Luego veremos que V y $\overrightarrow{A}(t)$ están conectados via un *gauge* determinado. La verificación es obvia. El LHS de (13)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\overrightarrow{r},t) = \Psi(\overrightarrow{r},t)\underbrace{i\hbar\left(\frac{-i}{\hbar}\right)}_{1}\frac{1}{2m}\left(\hbar\overrightarrow{k} - q\overrightarrow{A}(t)\right)^2, \qquad (16)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} H_0\Psi(\overrightarrow{r},t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\overrightarrow{r}}\Psi(\overrightarrow{r},t) = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\Psi(\overrightarrow{r},t), &(17)\\ H'\Psi(\overrightarrow{r},t) &= -\frac{q}{m}\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}_r\Psi(\overrightarrow{r},t) = -\frac{q}{m}\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{A}\cdot i\overrightarrow{k}\Psi(\overrightarrow{r},t), &(18)\\ H''\Psi(\overrightarrow{r},t) &= \frac{q^2}{2m}A^2\Psi(\overrightarrow{r},t). &(19)\end{aligned}$$

Vemos que la suma de las Eqs.(17), (18) y (19) y sabiendo que $H = H_0 + H' + H''$, nos da el RHS Eq.(13)

B. Invariancia de gauge

En el curso básico de electricidad se vió que los campos eléctrico $\overrightarrow{E}$ y magnetico $\overrightarrow{B}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &= -\overrightarrow{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} &(20)\\ \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A} &(21)\end{aligned}$$

quedan inalterados si se cambia

$$\begin{aligned}\vec{A} &\rightarrow \vec{A'} = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \qquad (22)\\ V &\rightarrow V' = V - \frac{\partial}{\partial t}\chi,\end{aligned}$$

donde $\chi(\vec{r}, t)$ es una función arbitraria. En efecto, recordemos

$$\vec{E'} = -\vec{\nabla}V' - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A'} = -\vec{\nabla}\left(V - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\chi}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla}\chi}\right) = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \vec{E}, \qquad (23)$$

$$\vec{B'} = \vec{\nabla} \times \vec{A'} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi}_{0} = \vec{B}. \qquad (24)$$

Por lo tanto hay un espacio infinito de soluciones $\chi(\vec{r}, t)$ tal que permiten hacer en el gauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A'} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi\right) = 0 \quad \text{con lo que,} \qquad (25)$$

$$\nabla^2\chi = 0 \qquad \text{condición de } \chi\ , \qquad (26)$$

que es un excelente elección para tratar campos de radiación (luz) (A veces al *gauge* de Coulomb se los llama también *transverse gauge*). Sin embargo hay muchísmas posibilidades aún en el gauge de Coulomb Nos queda ver que impacto tiene la introducción de $\chi(\vec{r}, t)$ en la ecuación de Schrödinger.

<u>Problema</u>. Nos preguntamos: *Si* $\Psi(\vec{r}, t)$ *es la autofunción de la ecuación de Schródinger cuando tenemos A, como es la solución* $\Psi'(\vec{r}, t)$ *cuando hacemos* $\vec{A'} = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ *y* $V' = V - \frac{\partial}{\partial t}\chi$? Reemplazandolo $\vec{A'}$ en la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi'(\vec{r}, t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_{\vec{r}} - q\underbrace{[\vec{A} + \vec{\nabla}\chi]}_{\vec{A'}}\right)^2 + q\underbrace{[V - \frac{\partial}{\partial t}\chi]}_{V'}\right]\Psi'(\vec{r}, t). \qquad (27)$$

Puede demostrarse que (queda para la práctica)

$$\Psi'(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t)\exp[iq\chi(\vec{r}, t)/\hbar]. \qquad (28)$$

O sea la inclusión de $\chi(\vec{r}, t)$ conlleva simplemente a una rotación de la función de onda. Tenemos libertad para elejir $\chi(\vec{r}, t)$. Por ejemplo si elijo

$$\chi(\vec{r}, t) = -\vec{A}(t) \cdot \vec{r}, \quad \text{que verifica,} \qquad (29)$$

$$\nabla^2\chi(\vec{r}, t) = 0, \qquad (30)$$

y por lo tanto satisface el *gauge* de Coulomb de acuerdo a la Eq.(26). Los términos de interés en la Eq.(28)

$$\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\chi = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}(-\overrightarrow{A}.\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{A} = 0, \tag{31}$$

$$V' = V - \frac{\partial}{\partial t}\chi = 0 - \frac{\partial}{\partial t}(-\overrightarrow{A}.\overrightarrow{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}\right).\overrightarrow{r} = -\overrightarrow{E}(t).\overrightarrow{r}, \tag{32}$$

donde hemos usado el hecho que $.\overrightarrow{E}(t) = -\partial\overrightarrow{A}(t)/\partial t$. Reemplazando en la Eq.(27), resulta

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi'(\overrightarrow{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\overrightarrow{r}} - q\overrightarrow{E}(t).\overrightarrow{r}\right]\Psi'(\overrightarrow{r},t), \tag{33}$$

que se llama forma de la **longitud**, mientras que la Eq(3) se la conoce como la forma de la **velocidad.** Hay una tercera forma que involucra a una expresión determinada del Hamiltoniano que se llama forma de la **aceleración o fuerza** que veremos mas adelante, si tenemos tiempo.

Como trabajamos en MKS, podemos ver que la dimensión es correcta, $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}(r)$ es la fuerza que realiza el campo sobre la carga y $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{r}$ es la energía que se suma a la energía cinética. Mas aún, podríamos haber introducido directamenet el Hamiltoniano Eq(33) de la misma manera que se trabajó cuando se vió el **efecto Stark** en teoría de perturbaciones.

C. Radiación electromagnética clásica

Repasemos la radiacón electromagnética. Las 4 ecuaciónes de Maxwell en el vacio son

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = \rho/\varepsilon_0 & \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} \\ \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B} = 0 & \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases}, \tag{34}$$

y los potenciales

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}, \tag{35}$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}. \tag{36}$$

En el **gauge de Coulomb (temporal)** los potenciales satisfacen

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{37}$$

por lo que las ecuaciónes para $\overrightarrow{A}$ y V se reducen a

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{38}$$

$$\nabla^2\overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overrightarrow{A} = -\mu_0\overrightarrow{J}, \tag{39}$$

En ausencia de cargas ($\rho = 0$) y corrientes eléctricas ($\overrightarrow{J} = 0$), o sea lejos de la fuente, las soluciónes de $\overrightarrow{A}$ en una caja en el vacio de un campo de luz clásico de frecuencias ω, es

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{A}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega,\overrightarrow{r},t) &= \overrightarrow{\mathcal{A}}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega,\overrightarrow{r},t) + \overrightarrow{\mathcal{A}}^{*}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega,\overrightarrow{r},t), && (40)\\
\overrightarrow{\mathcal{A}}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega,\overrightarrow{r},t) &= \widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}}\ A_N \exp[i\,\overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{r} - i\omega t + i\delta_\omega], && (41)\\
\overrightarrow{\mathcal{A}}^{*}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega,\overrightarrow{r},t) &= \widehat{\varepsilon}^{*}_{\lambda\overrightarrow{k}}\ A^{*}_N \exp[-i\,\overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{r} + i\omega t - i\delta_\omega], && (42)\\
V &= 0. && (43)
\end{aligned}
$$

Como pedimos que $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} = 0$ (de (37) con $V = 0$), resulta que $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} \propto \widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}}\cdot\widehat{k}$ con lo que el *gauge* de Coulomb se satisface ya que los dos versores de polarización son ortogonales a $\overrightarrow{k}$

$$\widehat{\varepsilon}_{1\overrightarrow{k}}\cdot\widehat{k} = \widehat{\varepsilon}_{2\overrightarrow{k}}\cdot\widehat{k} = \widehat{\varepsilon}_{1\overrightarrow{k}}\cdot\widehat{\varepsilon}_{2\overrightarrow{k}} = 0, \tag{44}$$

y los tres forman una terna ortonormal. Si pedimos que $\overrightarrow{A}_{\lambda\overrightarrow{k}}$ satisfaga la Eq.(39) entonces

$$\omega = c\ k, \tag{45}$$

c es la velocidad de la luz, [c]=metro/segundo, k es el número de onda ([k]=1/metro), y $\omega = 2\pi\nu$, ν es la frecuencia $[\omega] = [\nu]$=1/segundo, de modo tal que la energía de lo que se denominará fotón es

$$E = \hbar\omega = h(\omega/2\pi) = h\nu. \tag{46}$$

En general la función $\omega = \omega(k)$ representa una relación de dispersión, y conocemos algunos casos particulares

$$
\begin{cases}
\text{fotones,} & \hbar\omega = \hbar c\ k, \quad \text{lineal en } k,\\
\text{partículas} & \hbar\omega = \hbar^2\ k^2/2m, \quad \text{cuadrático en } k,\\
\text{plasmones} & \hbar\omega \simeq cte, \quad \text{independiente de } k,\\
\text{fonones} & \hbar\omega \simeq 0, \quad \text{nulo,}
\end{cases} \tag{47}
$$

Físicamente, podemos decir esquemáticamente que

$$
\begin{cases}
\widehat{\varepsilon}_{1\overrightarrow{k}} \text{ y } \widehat{\varepsilon}_{2\overrightarrow{k}}, & \text{son versores de polarización}\\
\omega \text{ ó } \ k \text{ ó } \nu, & \text{representa la energía ó color ,}\\
\delta_\omega, & \text{es la fase aleatoria (si la luz es no ,}\\
 & \text{coherente debería ser promediada)}
\end{cases} \tag{48}
$$

Nos queda definir el valor de A_N que resultará ser

$$A_N = A_N(\omega) = \sqrt{\frac{\langle\rho(\omega)\rangle}{2\varepsilon_0\omega^2}} = \sqrt{\frac{\hbar N(\omega)}{2\varepsilon_0\omega V}}, \tag{49}$$

$$\langle\rho(\omega)\rangle = \frac{\hbar\omega}{V}N(\omega) = \text{ valor medio de la densidad de energía} \tag{50}$$

$$N(\omega) = \text{ numero de fotones con energía } \hbar\omega, \tag{51}$$

$$V = \text{ volumen de la caja de cuantificación,} \tag{52}$$

que demostraremos en la próxima sección. De acuerdo a las expresiones (40) y (41) $\overrightarrow{A}_{\lambda\overrightarrow{k}}$ es real y vale

$$\overrightarrow{A}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = \widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}}\ 2A_N\cos[\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - \omega t + \delta_\omega]. \tag{53}$$

El espacio de todos los posible estados será

$$\overrightarrow{A} = \sum_{\lambda\overrightarrow{k}} \overrightarrow{A}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t), \tag{54}$$

que tienen en cuenta todas los posibles $\overrightarrow{k}$ y $\widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}}$. Es una base.

D. Campos eléctricos y magnéticos

Una vez que está determinada la magnitud $\overrightarrow{A}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t)$ nos queda calcular los campos eléctricos y magnéticos de acuerdo a sus definiciónes.

a) El **campo eléctrico** es de (35)

$$\overrightarrow{E}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = -\widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}}\ 2\omega A_N\sin[\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - \omega t + \delta_\omega]. \tag{55}$$

Re-identificamos entonces a $\widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}}$ como la dirección del campo eléctrico (algo bien conocido en Optica, el sentido de que la polarización de los fotones corresponde a la del campo eléctrico).

b) El **campo magnético** requiere del rotor

$$\overrightarrow{B}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = -(\overrightarrow{k}\times\widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}})\ 2A_N\sin[\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - \omega t + \delta_\omega], \tag{56}$$

donde hemos usado la identidad

$$\overrightarrow{\nabla}\times\widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}}\exp(i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}) = i(\overrightarrow{k}\times\widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}})\exp(i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}). \tag{57}$$

Confirmamos entonces que la dirección del campo magnético es perpendicular a la del campo eléctrico, y que ambas **están en fase** en el tiempo (estamos en el vacio!). Notemos además que $\overrightarrow{E}_{\lambda\overrightarrow{k}} \propto \omega$, mientras que $\overrightarrow{B}_{\lambda\overrightarrow{k}} \propto k$ con lo que se encuentra que en módulo

$$E_{\lambda\overrightarrow{k}} = cB_{\lambda\overrightarrow{k}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} B_{\lambda\overrightarrow{k}} \tag{58}$$

c) De la física elemental se vio que la **densidad de energía** o sea la energía U de un campo electromagnético por unidad de volumen V era

$$\rho(\omega) = \frac{U_{\lambda\overrightarrow{k}}}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\overrightarrow{E}_{\lambda\overrightarrow{k}}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\overrightarrow{B}_{\lambda\overrightarrow{k}}|^2. \tag{59}$$

Reemplazando los campos obtenidos en las Eqs.(55) y (58), tenemos

$$\rho(\omega) = \varepsilon_0|\overrightarrow{E}_{\lambda\overrightarrow{k}}|^2 = 4\varepsilon_0\omega^2 A_N^2 \sin^2[\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - \omega t + \delta_\omega], \tag{60}$$

y es una expresión que depende del tiempo. Se toma el valor medio que se define

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt, \qquad \text{entonces,} \tag{61}$$

$$\langle \sin^2(\alpha - \omega t)\rangle = \langle \cos^2(\alpha - \omega t)\rangle = \frac{1}{2}. \tag{62}$$

La densidad de energía promediada queda entonces

$$\langle \rho(\omega)\rangle = 2\varepsilon_0\omega^2 A_N^2. \tag{63}$$

Ahora estamos en condiciones de determinar el valor de $A_N(\omega)$. Si en el volumen V hay $N(\omega)$ fotones con energías $\hbar\omega$ (argumento cuántico!) entonces obviamente la densidad de energía es

$$\langle \rho(\omega)\rangle = \frac{\hbar\omega}{V} N(\omega). \tag{64}$$

Igualando ecuaciones (63) y (64) podemos determinar el valor de A_N que anticipamos en la Eq.(49)

$$A_N = A_N(\omega) = \sqrt{\frac{\hbar N(\omega)}{2\varepsilon_0\omega V}} = \sqrt{\frac{\langle\rho(\omega)\rangle}{2\varepsilon_0\omega^2}} \tag{65}$$

Estamos trabajando en el sistema MKS. Pero en muchos libros americanos (el Jackson por ejemplo) se usa el sistema gaussiano, en ese caso hacemos $4\pi\varepsilon_0 \equiv 1$ y entonces se escribe

$$A_N = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}. \tag{66}$$

d) Una magnitud interesante que se usa para determinar el flujos de la radiación, es el <u>**vector de Poynting,**</u> que se define

$$\overrightarrow{S} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}. \tag{67}$$

veamos primero las unidades

$$[S] = \frac{\text{Ampere}}{\text{Tesla} \times \text{metro}}\frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}}\text{Tesla} = = \frac{\text{Joule}}{\text{metro}^2 \times \text{segundo}}, \tag{68}$$

o sea es el flujo de energía por unidad de tiempo y área. (para tener una idea, el vector de Poynting debido al sol sobre la tierra es 1.4 kiloWatt/m^2, sumando toda las frecuencias). Reemplazando Eqs(55) y (58) en la Eq.(67) resulta

$$\overrightarrow{S} = \frac{\widehat{k}}{\mu_0}E\overbrace{B}^{E/c} = \widehat{k}\varepsilon_0 c E^2 = \widehat{k}\ 4c\varepsilon_0\omega^2 A_N^2 \sin^2[\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - \omega t + \delta_\omega]. \tag{69}$$

donde hemos usado el hecho que

$$\widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}} \times (\overrightarrow{k} \times \widehat{\varepsilon}_{\lambda\overrightarrow{k}}) = \overrightarrow{k}, \tag{70}$$

Haciendo el promedio temporal, como siempre, resulta

$$\langle\overrightarrow{S}\rangle = \overrightarrow{k}\ c\ 2\varepsilon_0\omega^2 A_N^2, \tag{71}$$

Hay otra forma mas compacta de escribirla y es reemplazar $\langle\rho(\omega)\rangle = 2\varepsilon_0\omega^2 A_N^2(\omega)$ lo que resulta

$$\langle\overrightarrow{S}\rangle = \overrightarrow{k}\ c\,\langle\rho(\omega)\rangle\ , \tag{72}$$

Y esta es la forma clásica (precuántica!) de determinar A_N. via la determinación de $\langle\rho(\omega)\rangle$ que se puede determinar con algúa metodo clásico (por ejemplo calorimetría). Notemos la analogía de (72) con el flujo de un fluido (flujo=velocidad×densidad).

d) Recordemos que $\overrightarrow{S}$ nos da el flujo energético. Si estamos interesados en el flujo sólo esto es el <u>**número de partículas**</u> por unidad de tiempo y area $\langle\overrightarrow{F}\rangle$, tenemos que dividir $\langle\overrightarrow{S}\rangle$ por $(\hbar\omega)$, o sea por la energía de las partículas, y nos da

$$\langle\overrightarrow{F}\rangle = \frac{\langle\overrightarrow{S}\rangle}{\hbar\omega} = \frac{\widehat{k}}{\hbar}\langle\rho(\omega)\rangle\,. \tag{73}$$

e) Se define la <u>**presión**</u> de la radiación :

$$\overrightarrow{P} = \frac{1}{c}\overrightarrow{S} = \widehat{k}\ \langle\rho(\omega)\rangle\ .,$$

cuyas unidades son:

$$[P] = \frac{Joule}{m^2 \times seg} \times \frac{seg}{m} = \frac{Newton}{m^2} = [\text{presión}]. \tag{74}$$

(Para tener una idea, la presión del sol a la altura de la Tierra es $5{\times}10^{-6} Nw/m^2$, y toda la tierra recibe una fuerza de 10^8Newtons. Despreciable). También se define el **momento lineal** y para *twisted light* tambien el **momento angular.**

E. Aproximación dipolar

Como vimos $\overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}} \propto \exp(\pm i \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})$, donde $k = \omega/c = 2\pi\nu/c$. Debido a que c es muy grande, el momento del fotón k puede despreciarse. Por ejemplo: luz amarilla $\nu = 0.5 \times 10^{15}$1/seg, $k = 2\pi\nu/c \simeq 0.0005$, por lo que $\exp(i0.0005) \simeq 1$. Y en general vale para todo el espectro de luz visible, ultravioleta e inclusive X blandos.

El valor de k será importante cuando $kr \gtrsim 1$, o sea $\omega r > c$, o $(2\pi\nu)r > c$, o $\nu > c/(2\pi r)$. para dimensiones atómicas $r \simeq a_0 = 5 \times 10^{-11}$ metros, $c = 3 \times 10^8$ metros/segundos, con lo que $\nu > 10^{20}$ 1/segundo. Que corresponde a los rayos X duros. Si estamos trabajando a nivel de física nuclear, los valores de r son digamos 1000 veces mas chicos con lo que la radiación limite corresponde a los rayos gamma.

Usando la aproximación dipolar el vector $\overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}}$ se reduce a

$$\overrightarrow{A}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{\mathcal{A}}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) + \overrightarrow{\mathcal{A}}^*_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t), \tag{75}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{A}}_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = \widehat{\varepsilon}_{\lambda \overrightarrow{k}} \; A_N \exp[-i\omega t + i\delta_\omega], \tag{76}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{A}}^*_{\lambda \overrightarrow{k}}(\omega, \overrightarrow{r}, t) = \widehat{\varepsilon}^*_{\lambda \overrightarrow{k}} \; A^*_N \exp[+i\omega t - i\delta_\omega], \tag{77}$$

entonces el **fotón** se interpreta como una partícula **con energía pero sin momento**. En la mayoría de los casos el desfasaje δ_ω no interviene por lo que puede eliminarse de vamos.

F. Trabajando en una caja y la densidad de estados del foton

Cuando teníamos partículas libres, las ondas planas **en todo el espacio** se normalizaba a la delta de Dirac, esto es

$$\int d\overrightarrow{r} \underbrace{\frac{\exp(-i\overrightarrow{k'}.\overrightarrow{r})}{(2\pi)^{3/2}}}_{\psi^*_{\overrightarrow{k'}}(\overrightarrow{r})} \underbrace{\frac{\exp(-i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})}{(2\pi)^{3/2}}}_{\psi_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{r})} = \delta(\overrightarrow{k'} - \overrightarrow{k}). \tag{78}$$

Cuando se trabaja con fotones se trabaja **en una caja**, como ya lo hicimos con electrones en Thomas Fermi. Es conceptualmente lo mismo. El volumen aquí es el **todo** espacio de interés y se supone que L = longitud de la caja debería ser tendido a infinito al final del cálculo.(En Thomas Fermi nos quedamos sólo con la densidad) Se espera que el resultado no dependa del volumen. Y si uno es cuidadoso, efectivamente no depende, a tal punto que se pone $V = 1$ directamente. Las ondas planas aqui se refieren a las exponenciales $\exp(\pm i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})$ que aparecen en las definición de $\overrightarrow{A}_{\lambda\overrightarrow{k}}(\omega,\overrightarrow{r},t)$. Cuando tenemos una caja los valores de k no se consideran continuos sino que estan -digamos- numerizados por la caja. Como pasamos de uno a otro?. Tomemos una dimensión, haciendo

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x, \quad \text{resulta} \tag{79}$$

$$\exp(ik_x x) = \cos\left(\frac{2\pi}{L}n_x x\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{L}n_x x\right), \tag{80}$$

y asi con todas las dimensiones. De esta manera numerizamos todos los "colores" posibles, La suma $\sum_{\lambda\overrightarrow{k}}$ en Eq.(54) ahora se reduce a $\sum_{\lambda,\ n_x,n_y,n_z}$ Las deltas de Dirac se transforman en deltas de Kronecker. Veamoslo, en una dimensión. Se puede reescribir todo en terminos de $n_x = n_x$y n'_x sabiendo que $k_x = k_x(n_x) = 2\pi n_x/L$, y $k'_x = k'_x(n'_x) = 2\pi n'_x/L$

$$\int_{-L/2}^{+L/2} dx \frac{\exp(-i\overbrace{2\pi n'_x/L}^{k'_x}\ x)}{(2\pi)^{1/2}}\frac{\exp(-i\overbrace{2\pi n_x/L}^{k_x}\ x)}{(2\pi)^{1/2}} = \frac{L}{2\pi}\delta_{n_x,n'_x},$$
$$\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dx}{L}\exp[-i2\pi n'_x x/L]\exp[-ik2\pi n_x x/L] = \delta_{n_x,n'_x}, \tag{81}$$

y todo quedo en términos de n'_x y n_x. En tres dimensiones resulta, compactandolo

$$\int_{Caja}\frac{d\overrightarrow{r}}{V}\exp[-i\overrightarrow{k'}(\overrightarrow{n'}).\overrightarrow{r}]\exp[-i\overrightarrow{k}(\overrightarrow{n}).\overrightarrow{r}] = \delta_{\overrightarrow{n'},\ \overrightarrow{n}}. \tag{82}$$

Entonces el Volumen V reemplaza a $(2\pi)^3$ y la delta de Kronecker $\delta_{\overrightarrow{n'},\ \overrightarrow{n}}$ a la de Dirac $\delta(\overrightarrow{k'} - \overrightarrow{k})$ ya que $\overrightarrow{n'}$ y $\overrightarrow{n}$ son ahoras las variables. La relación es simplemente

$$\int_{Caja}\frac{d\overrightarrow{r}}{V} \to \int_{el\ \substack{todo\\ espacio}}\frac{d\overrightarrow{r}}{(2\pi)^{3/2}} \tag{83}$$

Una cantidad muy importante era la **densidad de estados**, y esta resulta de la Eq.(79),.

$$dn_x = \frac{L}{2\pi}dk_x, \qquad dn_y = \frac{L}{2\pi}dk_y, \qquad dn_z = \frac{L}{2\pi}dk_z, \tag{84}$$

$$d\overrightarrow{n} = \frac{V d\overrightarrow{k}}{(2\pi)^3}, \quad \text{alternativamente si} \quad k = \omega/c, \tag{85}$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3 c^3} d\overrightarrow{\omega} = \frac{V}{(2\pi)^3 c^3}\omega^2 d\omega d\Omega_\omega. \tag{86}$$

Esta cantidad la usaremos mucho cuando usemos la densidad de estados del fotón.