

Estructura de la materia 3

TEMA 12. REPASO. OPERADORES DE CREACION Y DESTRUCCION

J. E. Miraglia

*Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Argentina.*

(Dated: May 31, 2015)

Abstract

faltas dibujos , espanol y bibliografia.

PACS numbers:

I. REPASO

El hamiltoniano en una dimensión para el oscilador armónico es

$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (1)$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$ y $\hat{p} = (\hbar/i) d/dx$. Las autofunciones son $H\psi_n = E_n\psi_n$

$$\begin{aligned} \psi_n &= A_n \exp(-X^2/2) H_n(X), & E_n &= \hbar\omega(n + 1/2), \\ X &= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, & A_n &= 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}, \end{aligned} \quad (2)$$

y H_n son los polinomios de Hermite. Nos conviene escribir el Hamiltoniano en su forma cuadrática

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{P}^2 + X^2), \quad \text{con} \quad (3)$$

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}. \quad (4)$$

Notar que el conmutador

$$[X, \hat{P}] = \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p} \right] = \frac{1}{\hbar} [x, p] = \frac{1}{\hbar} \hbar i = i. \quad (5)$$

Defino los operadores escaleras (*ladder*)

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + i\hat{P}), \quad \text{annihilation, ó lowering operator,} \quad (6)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) = a^*, \quad \text{creation, ó raising operator.} \quad (7)$$

Vale entonces

$$aa^\dagger = \frac{1}{2}(P^2 + X^2) + \frac{1}{2}, \quad (8)$$

$$a^\dagger a = \frac{1}{2}(P^2 + X^2) - \frac{1}{2}, \quad (9)$$

con lo que los operadores no conmutan.

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a^\dagger, a] = -1. \quad (10)$$

Reemplazando en H resulta

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right), \quad (11)$$

$$N = \hat{N} = a^\dagger a = \text{operador de número de partículas,}$$

aunque en realidad hasta ahora representa el número de nodos, como veremos. De acuerdo a la convención de signos resulta que (compactando $|\psi_n\rangle = |n\rangle$ y $|\psi_{n+1}\rangle = |n+1\rangle$)

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (12)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{por lo tanto} \quad a|0\rangle = 0| -1\rangle, \quad (13)$$

$$\langle n|a^\dagger = (a|n\rangle)^\dagger = (\sqrt{n}|n-1\rangle)^\dagger = \langle n-1|\sqrt{n}, \quad (14)$$

$$\langle n|a = (a^\dagger|n\rangle)^\dagger = (\sqrt{n+1}|n+1\rangle)^\dagger = \langle n+1|\sqrt{n+1}. \quad (15)$$

En realidad toda esta forma operacional esta mimetizando la propiedad de los polinomios de Hermite: $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$. Podemos decir que

$$\text{.construye} \leftarrow \leftrightarrow a \leftrightarrow \rightarrow \text{destruye}, \quad (16)$$

$$\text{.destruye} \leftarrow \leftrightarrow a^\dagger \leftrightarrow \rightarrow \text{construye}. \quad (17)$$

Se llama operador número ya que

$$\begin{aligned} N|n\rangle &= a^\dagger a|n\rangle = a^\dagger \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ &= \sqrt{n}\sqrt{(n-1)+1}|n\rangle = n|n\rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

El operador N es hermítico ya que

$$N^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger a^\dagger = a^\dagger a = N. \quad (19)$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} a^\dagger|0\rangle &= \sqrt{1}|1\rangle, \\ a^\dagger a^\dagger|0\rangle &= \sqrt{1}\sqrt{2}|2\rangle = \sqrt{2}|2\rangle, \\ a^\dagger a^\dagger a^\dagger|0\rangle &= \sqrt{1}\sqrt{2}\sqrt{3}|3\rangle = \sqrt{3!}|3\rangle, \\ &\text{en general,} \\ (a^\dagger)^n|0\rangle &= \sqrt{n!}|n\rangle, \quad \text{o también,} \\ |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\langle n'|a|n\rangle = \langle n'|\sqrt{n}|n-1\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1}, \quad (21)$$

$$\langle n'|a^\dagger|n\rangle = \langle n'|\sqrt{n+1}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}. \quad (22)$$

De (6) y 7 podemos escribir

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a), \quad y \quad (23)$$

$$\hat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a), \quad (24)$$

que nos permite realizar una serie de elementos de matriz sin recurrir a la tabla de integrales.

Por ejemplo

$$\begin{aligned} \langle n|X^2|n\rangle &= \langle n|\frac{1}{2}(a^\dagger + a)^2|n\rangle, \\ &= \frac{1}{2}\langle n|\underbrace{a^\dagger a^\dagger}_0 + a^\dagger a + a a^\dagger + \underbrace{a a}_0|n\rangle, \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{n}\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\sqrt{n+1})\langle n|n\rangle, \\ &= \frac{1}{2}(n + n + 1) = \frac{1}{2}(2n + 1), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{P}^2|n\rangle &= \langle n|\frac{i^2}{2}(a^\dagger - a)^2|n\rangle, \\ &= -\frac{1}{2}\langle n|\underbrace{a^\dagger a^\dagger}_0 - a^\dagger a - a a^\dagger + \underbrace{a a}_0|n\rangle, \\ &= -\frac{1}{2}(-\sqrt{n}\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\sqrt{n+1})\langle n|n\rangle, \\ &= \frac{1}{2}(+n + n + 1) = \frac{1}{2}(2n + 1), \end{aligned} \quad (26)$$

y esto tiene que ver con el teorema del virial (equiparticion de energía cinética y potencial).

Sigue

$$\begin{aligned} \langle n|H|n\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2}\langle n|\hat{P}^2 + X^2|n\rangle, \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}2\frac{(2n + 1)}{2}, \\ &= \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (27)$$

que es el resultado conocido. Es interesante describir las representaciones espectrales en la base $O_{n',n} = \langle n'|O|n\rangle$ de los diferentes operadores. Por ejemplo

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (30)$$

y

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ n-esima posic.}, \quad \langle n| = (0 \dots 1 \dots 0)$$

y se interpreta todo como producto matricial por ejemplo $a^\dagger|2\rangle = \sqrt{3}|3\rangle$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{a^\dagger} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$y \langle 2|a^\dagger = \sqrt{2}\langle 1|$$

$$\underbrace{\langle 2|a^\dagger = \sqrt{2}\langle 2|}_{\langle 2|} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{\sqrt{2}\langle 2|} \cdot \quad (32)$$

Miraglia. Estructura 3 (12.5). 1er Cuat. 2015