Estructura de la materia 3

TEMA 12. REPASO. OPERADORES DE CREACION Y DESTRUCCION

J. E. Miraglia

Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Argentina.

(Dated: February 29, 2016)

Abstract

faltas dibujos , espanol y bibliografia.

PACS numbers:

I. REPASO

El hamiltoniano en una dimensión para el oscilador armónico es

$$H = \frac{1}{2m}\widehat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{1}$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$ y $\widehat{p} = (\hbar/i)\ d/dx$. Las autofunciones son $H\psi_n = E_n\psi_n$

$$\begin{aligned}
\psi_n &= A_n \exp(-X^2/2) H_n(X), \qquad & E_n = \hbar\omega(n+1/2), \\
X &= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \ , & A_n = 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}},
\end{aligned} \tag{2}$$

y H_n son los polinomios de Hermitte. Nos conviene escribir el Hamiltoniano en su forma cuadrática

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(\widehat{P}^2 + X^2), \quad \text{con} \tag{3}$$

$$\widehat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\widehat{p}. \tag{4}$$

Notar que el commutador

$$[X, \widehat{P}] = [\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\widehat{p}] = \frac{1}{\hbar}[x,p] = \frac{1}{\hbar}\hbar i = i. \tag{5}$$

Defino los operadores escaleras (*ladder*)

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + i\widehat{P}) \ , \qquad \textit{annihilation, ó lowering operator}, \tag{6}$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{X} - i\widehat{P}) = a^*, \qquad \textit{creation, ó raising operator.} \tag{7}$$

Vale entonces

$$aa^\dagger = \frac{1}{2}(P^2 + X^2) + \frac{1}{2}, \tag{8}$$

$$a^\dagger a = \frac{1}{2}(P^2 + X^2) - \frac{1}{2}, \tag{9}$$

con lo que los operadores no conmutan.

$$[a, a^\dagger] = 1, \qquad [a^\dagger, a] = -1. \tag{10}$$

Reemplazando en H resulta

$$\begin{aligned}
H &= \hbar\omega \overbrace{\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)}^{\frac{1}{2}(P^2+X^2)} = \hbar\omega \ \left(\widehat{N} + \frac{1}{2}\right), \\
N &= \widehat{N} = a^\dagger a = \text{ operador de número de partículas,}
\end{aligned} \tag{11}$$

aunque en realidad hasta ahora representa el número de nodos, como veremos. De acuerdo a la convención de signos resulta que (compactando $|\psi_n\rangle = |n\rangle$ y $|\psi_{n+1}\rangle = |n+1\rangle$)

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \tag{12}$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad \text{por lo tanto} \qquad a|0\rangle = 0|-1\rangle, \tag{13}$$

$$\langle n|a^\dagger = (a|n\rangle)^\dagger = (\sqrt{n}|n-1\rangle)^\dagger = \langle n-1|\sqrt{n}, \tag{14}$$

$$\langle n|a = (a^\dagger|n\rangle)^\dagger = (\sqrt{n+1}|n+1\rangle)^\dagger = \langle n+1|\sqrt{n+1}. \tag{15}$$

En realidad toda esta forma operacional esta mimetizando la propiedad de los polinomios de Hermite: $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$.Podemos decir que

$$.\mathbf{construye} \longleftarrow \hookleftarrow \quad a \quad \hookrightarrow \longrightarrow \mathbf{destruye}, \tag{16}$$

$$.\mathbf{destruye} \longleftarrow \hookleftarrow \quad a^\dagger \quad \hookrightarrow \longrightarrow \mathbf{construye}. \tag{17}$$

Se llama operador número ya que

$$\begin{aligned} N|n\rangle &= a^\dagger a|n\rangle = a^\dagger\sqrt{n}|n-1\rangle, \\ &= \sqrt{n}\sqrt{(n-1)+1}|n\rangle = n|n\rangle. \end{aligned} \tag{18}$$

El operador N es hermítico ya que

$$N^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger a^{\dagger^\dagger} = a^\dagger a = N. \tag{19}$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} a^\dagger|0\rangle &= \sqrt{1}|1\rangle, \\ a^\dagger a^\dagger|0\rangle &= \sqrt{1}\sqrt{2}|2\rangle = \sqrt{2}|2\rangle, \\ a^\dagger a^\dagger a^\dagger|0\rangle &= \sqrt{1}\sqrt{2}\sqrt{3}|3\rangle = \sqrt{3!}|3\rangle, \\ & \text{en general,} \\ (a^\dagger)^n|0\rangle &= \sqrt{n!}|n\rangle, \qquad \text{o también,} \\ |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\langle n'|a|n\rangle = \langle n'|\sqrt{n}|n-1\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1}, \tag{21}$$

$$\langle n'|a^\dagger|n\rangle = \langle n'|\sqrt{n+1}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}. \tag{22}$$

De (6) y 7 podemos escribir

$$\widehat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a), \quad \text{y} \tag{23}$$

$$\widehat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a), \tag{24}$$

que nos permite realizar una serie de elementos de matriz sin recurrir a la tabla de integrales. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
\langle n|X^2|n\rangle &= \langle n|\frac{1}{2}(a^\dagger + a)^2|n\rangle, \\
&= \frac{1}{2}\langle n|\underbrace{a^\dagger a^\dagger}_{0} + a^\dagger a + aa^\dagger + \underbrace{aa}_{0}|n\rangle, \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{n}\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\sqrt{n+1})\langle n|n\rangle, \\
&= \frac{1}{2}(n + n + 1) = \frac{1}{2}(2n+1),
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\langle n|\widehat{P}^2|n\rangle &= \langle n|\frac{i^2}{2}(a^\dagger - a)^2|n\rangle, \\
&= -\frac{1}{2}\langle n|\underbrace{a^\dagger a^\dagger}_{0} - a^\dagger a - aa^\dagger + \underbrace{aa}_{0}|n\rangle, \\
&= -\frac{1}{2}(-\sqrt{n}\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\sqrt{n+1})\langle n|n\rangle, \\
&= \frac{1}{2}(+n + n + 1) = \frac{1}{2}(2n+1),
\end{aligned} \tag{26}$$

y esto tiene que ver con el teorema del virial (equiparticion de energía cinética y potencial). Sigue

$$\begin{aligned}
\langle n|H|n\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2}\langle n|\widehat{P}^2 + X^2|n\rangle, \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}2\frac{(2n+1)}{2}, \\
&= \hbar\omega(n + \frac{1}{2}),
\end{aligned} \tag{27}$$

que es el resultado conocido. Es interesante describir las representaciones espectrales en la base $O_{n',n} = \langle n'|O|n\rangle$ de los diferentes operadores. Por ejemplo

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 2 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 3 & . \\ . & . & . & . & .. \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & . \\ . & . & . & .. & . \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & .. & . \end{pmatrix}, \tag{30}$$

y

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} \text{ n-esima posic.,} \qquad \langle n| = \begin{pmatrix} 0 & .. & 1 & .. & 0 \end{pmatrix}$$

y se interpreta todo como producto matricial por ejemplo $a^\dagger|2\rangle = \sqrt{3}|3\rangle$

$$\boxed{a^\dagger|2\rangle = \sqrt{3}|1\rangle} \qquad \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \end{pmatrix}\right\} |2\rangle$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & . \\ . & . & . & .. & . \end{pmatrix}}_{a^\dagger} \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ . \end{pmatrix}\right\} \sqrt{3}|3\rangle \qquad , \tag{31}$$

y $\langle 2|a^\dagger = \sqrt{2}\langle 1|$

$$\boxed{\langle 2|a^\dagger = \sqrt{2}\langle 1|} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & .. \end{pmatrix}}_{\langle 2|} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & . \\ . & . & . & .. & . \end{pmatrix}}^{a^\dagger} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & .. \end{pmatrix}}_{\sqrt{2}\langle 1|} . \tag{32}$$