

## Estructura 3

### TEMA 17. Un fotón aparece. Bremsstrahlung

J. E. Miraglia,

*Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas  
y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Argentina.*

(Dated: June 30, 2015)

#### Abstract

**HOJA DE RUTA** Identificación del proceso. Regla de oro de Fermi. Densidad de estados finales e integración. Reducción del elemento de matriz.

**CALCULO EN PRIMER ORDEN PERTURBATIVO.** Formula diferenciales. Ecuacion de Bethe Heitler.

#### **IMPLICANCIAS FISICAS**

#### **APPENDICE. ESTIMACION DEL ELEMENTO DE MATRIZ**

**falta** dibujos , espanol y bibliografia. Seria conveniente hacer un nuevo item que incluya creación y aniquilación y relacionarlo con bremsstrahlung y compton. Incorporar calculo de creacion de pares.

PACS numbers:

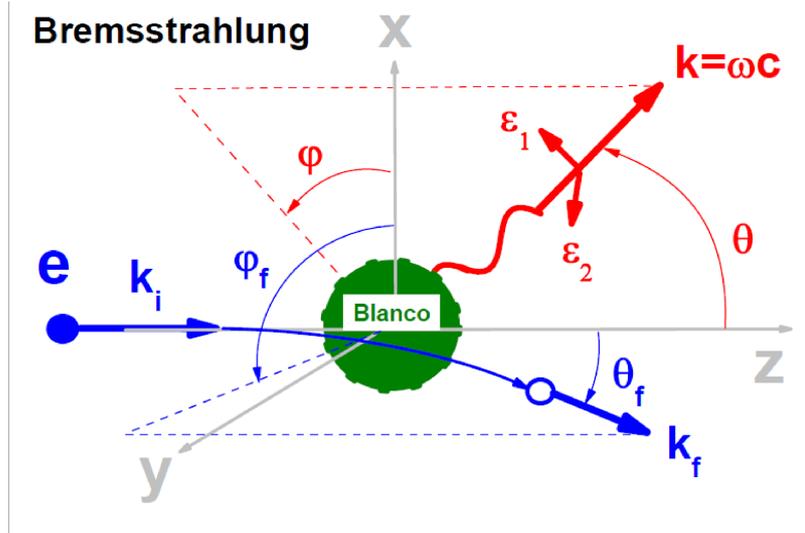


FIG. 1:

## I. HOJA DE RUTA

Siguiendo los mismos items que las notas anteriores.

**Identificación del proceso.** La captura o recombinación radiativa considera que el estado inicial está en el continuo (incide un electrón) y finalmente queda atrapado en un estado ligado de blanco. El bremsstrahlung (o radiación de frenado) es un proceso equivalente que involucra dos estados del continuo -el inicial y el final. Esquemáticamente (ver dibujo)

$$\text{Proyectil} + \text{Blanco} \rightarrow \text{Proyectil} + \text{Blanco} + \hbar\omega, \quad (1)$$

$$\text{Proyectil} = e, e^+, H^+, \bar{p}, \text{iones}[He^{++}, He^+(1s)], \text{ etc} \quad (2)$$

$$\text{Blanco} = \text{átomos, moléculas, iones, etc.} \quad (3)$$

O sea ambos, el blanco y el proyectil mantienen su identidad (no hay reordenamiento electrónico) y la energía del fotón con vector  $\hat{k}$  y polarización  $\hat{\epsilon}_{\lambda\vec{k}}$  es posible a expensas de la energía cinética del proyectil. Como siempre el que determina la energía del fotón saliente es la ley de conservación,  $E_i = E_f$ ,

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{(\hbar k_i)^2}{2m} =, \\ E_f &= \frac{(\hbar k_f)^2}{2m} + \hbar\omega, \end{aligned} \quad (4)$$

y aquí hay un espacio adicional  $\vec{k}_f$  (con su densidad de estados  $d\vec{k}_f$ ) que permite un abanico de posibilidades de  $\hbar\omega$ . A diferencia de la captura radiativa y la emisión espontánea

que producían espectros de **líneas**, el bremsstrahlung produce un espectro de **radiación continua**.

El elemento de matriz es

$$\left\langle 1_{\lambda \vec{k}} \psi_{\vec{k}_f}^- | H_{\lambda \vec{k}}^+ | 0_{\lambda \vec{k}} \psi_{\vec{k}_i}^+ \right\rangle = -\frac{q}{m} A_1 \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \quad (5)$$

Nos concentraremos en el caso de impacto electrónico (la generalización a iones pesados es inmediata). Tenemos entonces

$$\begin{cases} \psi_{\vec{k}_i}^+, & \text{función del continuo inicial} \\ \psi_{\vec{k}_f}^-, & \text{función del continuo final, que verifican} \\ \left\langle \psi_{\vec{k}_f}^\pm | \psi_{\vec{k}_i}^\pm \right\rangle = \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_f), & \text{ortonormalidad,} \end{cases} \quad (6)$$

donde  $\psi_{\vec{k}_{i/f}}^{+/-}$  son estados del continuo en el potencial de blanco: átomo, ión, o molécula, ó lo que sea.

**Regla de oro de Fermi.** El proceso físico es muy similar al de captura radiativa. La única diferencia es que ahora el estado final es el continuo. Siguiendo la misma notación y suponiendo que no hay fotones en el medio, la expresión de partida es exactamente la misma, con la diferencia que ahora hay un elemento continuo-continuo (*free-free*),

$$\frac{d W_{i \rightarrow f}^+}{dt d \vec{f}} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta[E_i - E_f] \left| \left\langle 1_{\lambda \vec{k}} \psi_{\vec{k}_f}^- | H_{\lambda \vec{k}}^+ | 0_{\lambda \vec{k}} \psi_{\vec{k}_i}^+ \right\rangle \right|^2, \quad (7)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \delta \left[ \frac{(\hbar k_i)^2}{2m} - \frac{(\hbar k_f)^2}{2m} - \hbar \omega \right] \frac{e^2}{m^2} A_1^2 \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2. \quad (8)$$

**Densidad de estados finales e integración.** Aquí comienza la diferencia con la captura radiativa que hace más complejo este proceso y es debido al estado final. En la captura radiativa teníamos en el canal final solamente el espacio de los fotones. En bremsstrahlung tenemos además el espacio de los electrones dispersados  $d \vec{k}_f$ , esto es

$$d \vec{f} = \underbrace{\frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} d \vec{k}}_{\text{fotón}} \underbrace{d \vec{k}_f}_{\text{electrón}}, \quad (9)$$

donde con  $d \vec{k}$  indicamos el espacio de posibilidades del fotón, y con  $d \vec{k}_f$  la del electrón dispersado. Esto suma 3 dimensiones más al problema que lo hace más tedioso: además de los elementos de matriz que involucra funciones hipergeométricas en el mejor de los casos, que complican su cálculo.

Acá tenemos dos alternativas para proceder a calcular la probabilidad. O estamos interesados en el electrón dispersado ó en el espectro fotónico (ó en ambos, llegado el caso). Nos concentraremos en el espectro fotónico, que es mucho mas interesante, por lo que debemos integrar el todo el espacio electrónico,

$$\int d\vec{k}_f \delta[E_i - E_f] = \int d\vec{k}_f \delta\left[\frac{(\hbar k_i)^2}{2m} - \frac{(\hbar k_f)^2}{2m} - \hbar\omega\right], \quad (10)$$

$$= \int d\Omega_f \int dk_f k_f^2 \delta\left[\frac{\hbar^2}{2m}(k_f^2 - k_{f\omega}^2)\right], \quad \text{con,} \quad (11)$$

$$k_{f\omega} = k_f(\omega) = \sqrt{k_i^2 - \frac{2m}{\hbar}\omega} \quad (12)$$

$$\int d\vec{k}_f \delta[E_i - E_f] = \int d\Omega_f \frac{2m}{\hbar^2} \frac{k_{f\omega}^2}{2k_{f\omega}} = \int d\Omega_f \frac{m}{\hbar^2} k_{f\omega} = \int d\Omega_f \rho_f(\omega) \quad (13)$$

$$\rho_f(\omega) = \frac{m}{\hbar^2} k_{f\omega} = \frac{m}{\hbar^2} \sqrt{k_i^2 - \frac{2m}{\hbar}\omega} \quad (14)$$

Notese que ahora  $k_{f\omega} = k_f(\omega)$ , lo que indica que la energía de salida del electrón depende de la del fotón! (o viceversa) Reemplazando en la probabilidad, tenemos

$$\frac{d W_{i \rightarrow f}^+}{dt d\Omega_f d\vec{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{\hbar^2} k_{f\omega}\right) \frac{e^2}{m^2} A_1^2 \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{p} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2 \quad (15)$$

haciendo  $\vec{\omega} = c \vec{k}$ ,

$$\frac{d W_{i \rightarrow f}^+}{dt d\Omega_f d\vec{\omega}} = \frac{1}{(2\pi)^2 (\hbar c)^3} \mathcal{V} \frac{k_{f\omega} q^2}{m} \frac{A_1^2}{2\epsilon_0 \omega \mathcal{V}} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{p} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2, \quad (16)$$

$$= \frac{k_{f\omega}}{2\pi \hbar^2 c^3 \omega m} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{p} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2, \quad (17)$$

y como siempre se simplificó en volumen de la caja  $\mathcal{V}$ .

**Sección eficaz.** En estos casos, la magnitud de interés es la sección eficaz, con lo que debemos obtenerla, como siempre, dividiendo la probabilidad por el flujo incidente de electrones  $J_{in}$

$$\frac{d \sigma}{d\Omega_f d\vec{\omega}} = \frac{d W_{i \rightarrow f}^+}{dt d\Omega_f d\vec{\omega}} \frac{1}{J_{in}}, \quad \text{con} \quad (18)$$

$$J_{in} = \frac{\hbar k_i}{(2\pi)^3 m} \quad (19)$$

por lo que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f d\omega} = \frac{(2\pi)^3 m}{\hbar k_i} \frac{k_{f\omega}}{2\pi \hbar^2 c^3 \omega m} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2, \quad (20)$$

$$= (2\pi)^2 \frac{k_{f\omega}}{k_i} \frac{1}{\omega \hbar^3 c^3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2. \quad (21)$$

Ahora pasamos a unidades atómicas que resulta con  $q = \pm e$ ,  $\hbar = m = e^2/4\pi\epsilon_0 = 1$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f d\omega} = \frac{(2\pi)^2}{\omega c^3} \frac{k_{f\omega}}{k_i} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2. \quad (22)$$

y de aquí sale todo.

**Reducción del elemento de matriz.** Para el caso mas general de potencial central  $V(r)$ , el elemento de matriz  $\left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+}$  requiere una fuerte dosis de algebra. El término a calcular es

$$\left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \int d\vec{r} \psi_{\vec{k}_{f\omega}}^{-*}(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right) \psi_{\vec{k}_i}^+(\vec{r}). \quad (23)$$

Para potenciales centrales no Coulombianos, el cálculo requiere de elementos de matriz *free-free* que involucran integrales complicadas.

Si tuviesemos sólo interacción coulombiana, el blanco es una carga puntual, tenemos

$$q_{k_i}^{\pm} + Z^+ \rightarrow q_{k_{f\omega}}^{\pm} + Z^+ + \hbar\omega, \quad (24)$$

donde indicamos con  $Z$  es la carga nuclear y  $q$  en general indica la carga del proyectil. En el caso de tener electrones incidentes, tenemos  $q = -e$ . Las funciones de onda del continuo en este caso son conocidas, las de siempre, o sea (repito lo mismo)

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{\vec{k}_i}^+(\vec{r}) = \psi_{\vec{k}_i}^{\rightarrow}(\vec{r}) D^+(a_i, \vec{k}_i | \vec{r}), \quad \text{continuo Coulombiano} \\ \psi_{\vec{k}_{f\omega}}^-(\vec{r}) = \psi_{\vec{k}_{f\omega}}^{\rightarrow}(\vec{r}) D^-(a_f, \vec{k}_{f\omega} | \vec{r}), \quad \text{continuo Coulombiano} \\ \psi_{\vec{k}}^-(\vec{r}) = \frac{\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})}{(2\pi)^{3/2}}, \quad \text{onda plana} \\ D^{\pm}(a, \vec{k} | \vec{r}) = \exp(a\pi/2) \Gamma(1 \mp ia) {}_1F_1(\pm ia; 1; \pm ikr - i\vec{k} \cdot \vec{r}), \\ a_i = \frac{Zeqm}{\hbar^2 k_i} \quad a_f = \frac{Zeqm}{\hbar^2 k_{f\omega}}, \quad \text{parametros de Sommerfeld} \end{array} \right. \quad (25)$$

y  $m$  es la masa reducida de los sistemas colisionantes. Los elementos de matriz son analíticos y son las integrales de Nordsieck (ver apendice de Tema 2). En la siguiente sección haremos una aproximación muy usada. Seguimos en unidades atómicas.

## A. CALCULO EN PRIMER ORDEN PERTURBATIVO

En el Apéndice demostramos que a primer orden perturbativo el elemento  $\langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+}$  esta dado por

$$\langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \vec{k}_i \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) + \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\tilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega})}{k_{f\omega}^2 - k_i^2 + i\epsilon} (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) + O(V^2), \quad (26)$$

donde ya hemos hecho la aproximación dipolar  $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 1$ . La primera e interesante conclusión es que el primer termino  $O(V^0)$  es la conservación del momento con lo cual impone  $\vec{k}_i = \vec{k}_{f\omega}$  pero contradice la conservación de la energía y por lo tanto debe ser nulo. O más precisamente si  $\vec{k}_i = \vec{k}_f$  tenemos una colisión elástica y no hay energía cedida al fotón. Físicamente nos dice algo muy importante: una partícula libre (ausencia de potencial  $V = 0$ ) no puede emitir fotones. Lo que resulta lógico.

Lo interesante del desarrollo que hemos hecho es que no necesariamente nos debemos circunscribir a la interacción culombiana: puede tener cualquier forma . Esto da lugar a modelizar átomos

$$e_{\vec{k}_i}^- + \text{Atomo} \rightarrow e_{\vec{k}_{f\omega}}^- + \text{Atomo} + \hbar\omega. \quad (27)$$

Vamos a considerar un potencial del tipo de Yukawa para tener una idea del comportamiento de un blanco atómico neutro

$$V(r) = -Z \frac{\exp(-\lambda r)}{r}, \quad \text{y por lo tanto,} \quad (28)$$

$$\tilde{V}(\vec{u}) = -Z \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{u^2 + \lambda^2}, \quad (29)$$

donde  $Z$  sería la carga nuclear del átomo. El caso Culombiano se reduce a  $\lambda = 0$ . Reemplazando la Eq.(29) en (26), y removiendo  $+i\epsilon$  ya que sabemos siempre  $k_i^2 > k_{f\omega}^2$  resulta

$$\sum_{\lambda} \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2 = \frac{2^2}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{V}^2(\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega})}{(k_{f\omega}^2 - k_i^2)^2} \sum_{\lambda} \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right|^2, \quad (30)$$

donde hemos hecho la aproximación dipolar  $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 1$ . Y ahora nos queda definir los versores. Seguimos el mismo criterio de siempre

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{k}_i = (0, 0, 1), & \text{electrón incidente} \\ \hat{k}_f = (\sin \theta_f \cos \varphi_f, \sin \theta_f \sin \varphi_f, \cos \theta_f), & \text{electrón dispersado} \\ \hat{k} = (\sin \theta, 0, \cos \theta), & \text{fotón saliente} \\ \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} = (0, 1, 0), & \text{versor de polarización} \\ \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} = (\cos \theta, 0, -\sin \theta), & \text{versor de polarización} \\ \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} \times \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} = \hat{k}, \quad \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} \cdot \hat{k} = \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} \cdot \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} = \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} \cdot \hat{k} = 0, & \end{array} \right. \quad (31)$$

entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega} = (-k_{f\omega} \sin \theta_f \cos \varphi_f, -k_{f\omega} \sin \theta_f \sin \varphi_f, k_i - k_{f\omega} \cos \theta_f) \\ \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) = -k_{f\omega} \sin \theta_f \sin \varphi_f, \\ \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) = -k_i \sin \theta - k_{f\omega} \cos \theta \sin \theta_f \cos \varphi_f + k_{f\omega} \sin \theta \cos \theta_f, \end{array} \right. \quad (32)$$

Por lo que la sección eficaz multiple diferencial es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f \underbrace{d\vec{\omega}}_{\omega^2 d\omega d\Omega_\omega}} = \frac{(2\pi)^2 k_{f\omega}}{\omega c^3 k_i} \frac{2^2}{(2\pi)^3 (k_{f\omega}^2 - k_i^2)^2} \quad (33)$$

$$\times \left[ \tilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right]^2 \sum_{\lambda} \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right|^2 \quad (34)$$

$$\sum_{\lambda} \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right|^2 = [(k_{f\omega} \sin \theta_f \sin \varphi_f)^2 + (-k_i \sin \theta - k_{f\omega} \cos \theta \sin \theta_f \cos \varphi_f + k_{f\omega} \sin \theta \cos \theta_f)^2]$$

Para ahorrar esfuerzo, a esta altura nos conviene recurrir a un programa de álgebra y escribir directamente el resultado de la integración

$$I_\Omega = \int \underbrace{d\Omega_\omega}_{\text{fotón}} \int \underbrace{d\Omega_f}_{\text{electrón}} \left[ \tilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right]^2 \sum_{\lambda} \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right|^2, \quad (35)$$

$$d\Omega_\omega = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (36)$$

$$d\Omega_f = \sin \theta_f d\theta_f d\varphi_f \quad (37)$$

que nos da, siempre para el potencial de Yukawa (29),

$$I_\Omega = \frac{16\pi Z^2}{3k_f k_i} (L - X), \quad (38)$$

$$L = \log \frac{(k_i + k_{f\omega})^2 + \lambda^2}{(k_i - k_{f\omega})^2 + \lambda^2}, \quad (39)$$

$$X = \frac{4 k_i k_{f\omega} \lambda^2}{(k_i^2 - k_{f\omega}^2)^2 + 2\lambda^2(k_i^2 + k_{f\omega}^2) + \lambda^4}. \quad (40)$$

Reemplazando, tenemos

$$\frac{d\sigma}{\omega^2 d\omega} = \frac{(2\pi)^2 k_{f\omega}}{\omega c^3 k_i} \frac{2^2}{(2\pi)^3 (k_{f\omega}^2 - k_i^2)^2} \overbrace{\frac{16\pi Z^2}{3k_i k_{f\omega}}}_{I_\Omega} (L - X) \quad (41)$$

$$= \frac{32 Z^2}{3\omega c^3 k_i^2} \frac{1}{(2\omega)^2} (L - X) \quad (42)$$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{8 Z^2}{3\omega c^3 k_i^2} (L - X) \quad (43)$$

A primer orden perturbativo en  $Z$  hemos resuelto analíticamente el problema, repito para el caso del potencial de Yukawa.

Obviamente la conservación de la energía impone  $k_{f\omega} = \sqrt{k_i^2 - 2\omega}$  con lo que la máxima energía  $\omega_{\max}$  sera cuando

$$k_{f\omega}^2 = k_i^2 - 2\omega_{\max} > 0, \quad (44)$$

$$\omega_{\max} < \frac{k_i^2}{2}. \quad (45)$$

El caso extremo en que  $\omega = k_i^2/2$ , nos indica que se transformó toda la energía cinetica del electrón incidente en la del fotón y finalmente quedo "quieto",  $k_f = 0$

Pero esta no es la ecuación mas famosa. Si consideramos  $k_i$  muy grandes,  $k_i \gg \lambda$ , y para bajos valores de  $\omega$  entonces podemos aproximar

$$\lambda \ll k_{f\omega} = \sqrt{k_i^2 - 2\omega} \approx k_i - \frac{\omega}{k_i} + \dots \quad (46)$$

con lo que

$$X = \frac{4k_i k_{f\omega} \lambda^2}{\underbrace{(k_i^2 - k_{f\omega}^2)^2}_{(2\omega)^2} + \underbrace{2\lambda^2(k_i^2 + k_{f\omega}^2)}_{\sim 4k_i^2 \lambda^2} + \lambda^4} \simeq 1, \quad (47)$$

$$L = \log \frac{(k_i + k_{f\omega})^2 + \lambda^2}{(k_i - k_{f\omega})^2 + \lambda^2} \simeq \log \frac{4k_i^2}{(\frac{\omega}{k_i})^2} \simeq 2 \log \frac{2k_i^2}{\omega}. \quad (48)$$

Entonces  $d\sigma/d\omega$  se reduce a

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \simeq \frac{16 Z^2}{3\omega c^3 k_i^2} \left( \log \frac{2k_i^2}{\omega} - \frac{1}{2} \right), \quad (49)$$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \simeq \frac{16 Z^2}{3\omega c^3 k_i^2} \log \frac{2k_i^2}{\alpha\omega}, \quad (50)$$

donde  $\alpha$  es un valor digamos cercano a  $\sqrt{e}$ . Y esta es la famosa **ecuación de Bethe Heitler** que merece al mayor de mis respetos.

## II. IMPLICANCIAS FISICAS

De aquí podemos decir:

i) Lo hicimos para impacto de electrones donde  $m = 1$  en unidades atómicas. Si el proyectil tuviese una masa  $M$  (protones por ejemplo  $M = 1836$ ) La Eq.(50) debería dividirse por  $M^2$ .

ii) Si el proyectil tuviese una carga  $qe$ , (por ejemplo  $q = 2$  para  $\text{He}^{++}$ ) entonces la Eq.(50) debería multiplicarse por  $q^2$  (como cualquier primer orden perturbativo).

iii) Su valor es pequeño ( $\propto c^{-3}$ ) pero es un mecanismo que sobrevive en el rango de rayos X, ya que  $\propto 1/\omega$

4i) Notesé que la ecuación de Bethe Heitler no contiene  $\lambda$ . Lo que se explica que el bremsstrahlung tiene lugar a pequeñas distancias  $\ll 1/\lambda$ , de modo tal que el potencial

$$V(r) = -Z \frac{\exp(-\lambda r)}{r} \simeq -\frac{Z}{r} (1 - \lambda r + \dots) \Big|_{r \ll \lambda^{-1}} \simeq -\frac{Z}{r} \quad (51)$$

con lo que, en el límite de Bethe Heitler, sobrevive sólo el término Culombiano.

5i) En este límite ( $\lambda \ll k_i - \omega/k_i$ ),  $d\sigma/d\omega$  posee a una divergencia cuando  $\omega \rightarrow 0$ , y en esa región es muy parecida a  $1/\omega$  (en realidad esta divergencia es un artefacto de la aproximaciones usadas).

6i) En relación a la Eq.(50), recordemos que  $k_i = v$  =velocidad en unidades atómicas. Hay muchísimas formas de escribirla (el Jackson tiene un capítulo dedicado a este tema)

7i) El frenamiento de iones en la materia debida al bremsstrahlung es muy importante a altas energías de impacto. Su importancia es capital en ciencia básica (estrellas, plasma de fusión, PIXE, creación de pares). Y esta presente en muchos aparatos tecnológicos, (generador de rayos X, radiación contaminante, reactores de fusión y fisión, etc)

Hay fenómenos interesantes tales como, stripping, bremsstrahlung internuclear, PIXE. Da una dimensión distinta a los procesos dinámicos.

## III. APPENDICE. ESTIMACION DEL ELEMENTO DE MATRIZ

Hagamos una aproximacion. Partiendo del elemento de matriz (23)

$$\langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_f \omega \leftarrow \vec{k}_i^+} = \int d\vec{r} \psi_{\vec{k}_f}^{-*}(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right) \psi_{\vec{k}_i}^+(\vec{r}), \quad (52)$$

usando la aproximación dipolar  $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \simeq 1$ , y la transformada de Fourier

$$f(\vec{r}) = \int d\vec{u} \frac{\exp(i\vec{u}\cdot\vec{r})}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{f}(\vec{u}), \quad (53)$$

de las funciones del continuo, llegamos a  $\langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \hbar I$ , con

$$I = \int d\vec{u} \widetilde{\psi_{\vec{k}_f}^-}^*(\vec{u}) (\vec{u}) \widetilde{\psi_{\vec{k}_i}^+}(\vec{u}), \quad (54)$$

Ahora podemos expandir las funciones en continuo en forma perturbativa a partir de la onda plana tal como vimos en las primeras clases (serie perturbativa de Lippman-Schwinger)

$$\widetilde{\psi_{\vec{k}_i}^+}(\vec{u}) = \delta(\vec{k}_i - \vec{u}) + \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_i - \vec{u})}{k_i^2 - u^2 + i\epsilon}, \quad (55)$$

$$\widetilde{\psi_{\vec{k}_f}^-}(\vec{u}) = \delta(\vec{k}_f - \vec{u}) + \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_f - \vec{u})}{k_f^2 - u^2 - i\epsilon}. \quad (56)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi_{\vec{k}_f}^-}^*(\vec{u}) \widetilde{\psi_{\vec{k}_i}^+}(\vec{u}) &= \delta(\vec{k}_i - \vec{u})\delta(\vec{k}_f - \vec{u}) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_f)}{k_i^2 - k_f^2 + i\epsilon} \delta(\vec{k}_f - \vec{u}) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_f - \vec{k}_i)}{k_f^2 - k_i^2 + i\epsilon} \delta(\vec{k}_i - \vec{u}) + O(V^2), \end{aligned} \quad (57)$$

Reemplazando en la Eq.(54), resulta

$$\langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \hbar \vec{k}_i \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_f) + \frac{2\hbar}{(2\pi)^{3/2}} (\vec{k}_i - \vec{k}_f) \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_f)}{k_f^2 - k_i^2 + i\epsilon} + O(V^2). \quad (58)$$

que es la ecuación que usamos.