

Estructura 3

TEMA 17. Un fotón aparece. Bremsstrahlung

J. E. Miraglia,

*Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Argentina.*

(Dated: June 30, 2015)

Abstract

HOJA DE RUTA Identificación del proceso. Regla de oro de Fermi. Densidad de estados finales e integración. Reducción del elemento de matriz.

CALCULO EN PRIMER ORDEN PERTURBATIVO. Formula diferenciales. Ecuacion de Bethe Heitler.

IMPLICANCIAS FISICAS

APPENDICE. ESTIMACION DEL ELEMENTO DE MATRIZ

falta dibujos , espanol y bibliografia. Seria conveniente hacer un nuevo item que incluya creación y aniquilación y relacionarlo con bremsstrahlung y compton. Incorporar calculo de creacion de pares.

PACS numbers:

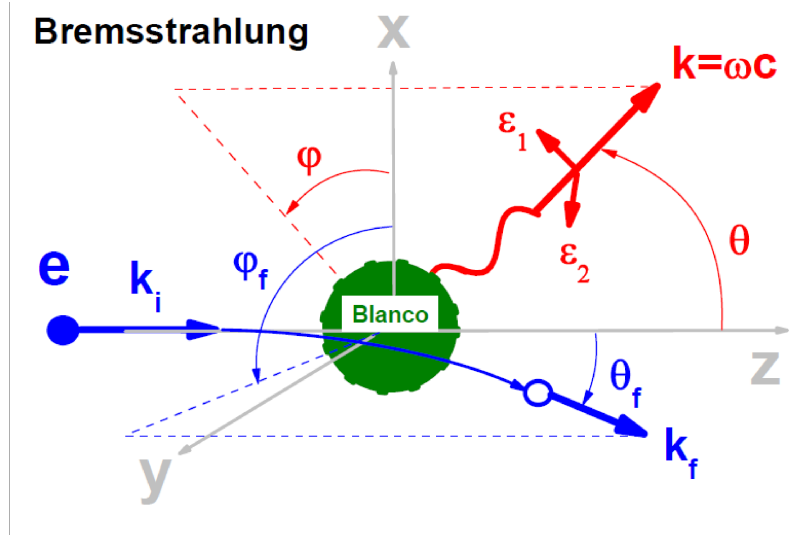


FIG. 1:

I. HOJA DE RUTA

Siguiendo los mismos items que las notas anteriores.

Identificación del proceso. La captura o recombinación radiativa considera que el estado inicial está en el continuo (incide un electrón) y finalmente queda atrapado en un estado ligado de blanco. El bremsstrahlung (o radiación de frenado) es un proceso equivalente que involucra dos estados del continuo -el inicial y el final. Esquemáticamente (ver dibujo)

$$\text{Proyectil} + \text{Blanco} \rightarrow \text{Proyectil} + \text{Blanco} + \hbar\omega, \quad (1)$$

$$\text{Proyectil} = e, e^+, H^+, \bar{p}, \text{iones}[He^{++}, He^+(1s)], \text{etc} \quad (2)$$

$$\text{Blanco} = \text{átomos, moléculas, iones, etc.} \quad (3)$$

O sea ambos, el blanco y el proyectil mantienen su identidad (no hay reordenamiento electrónico) y la energía del fotón con vector \hat{k} y polarización $\hat{\epsilon}_{\lambda\vec{k}}$ es posible a expensas de la energía cinética del proyectil. Como siempre el que determina la energía del fotón saliente es la ley de conservación, $E_i = E_f$,

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{(\hbar k_i)^2}{2m} =, \\ E_f &= \frac{(\hbar k_f)^2}{2m} + \hbar\omega, \end{aligned} \quad (4)$$

y aquí hay un espacio adicional \vec{k}_f (con su densidad de estados $d\vec{k}_f$) que permite un abanico de posibilidades de $\hbar\omega$. A diferencia de la captura radiativa y la emisión espontánea

que producían espectros de **líneas**, el bremsstrahlung produce un espectro de **radiación continua**.

El elemento de matriz es

$$\left\langle 1_{\lambda \vec{k}} \psi_{\vec{k}_f}^- | H_{\lambda \vec{k}}^+ | 0_{\lambda \vec{k}} \psi_{\vec{k}_i}^+ \right\rangle = -\frac{q}{m} A_1 \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \quad (5)$$

Nos concentraremos en el caso de impacto electrónico (la generalización a iones pesados es inmediata). Tenemos entonces

$$\begin{cases} \psi_{\vec{k}_i}^+, & \text{función del continuo inicial} \\ \psi_{\vec{k}_f}^-, & \text{función del continuo final, que verifican} \\ \left\langle \psi_{\vec{k}_f}^\pm | \psi_{\vec{k}_i}^\pm \right\rangle = \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_f), & \text{ortonormalidad,} \end{cases} \quad (6)$$

donde $\psi_{\vec{k}_{i/f}}^{+/-}$ son estados del continuo en el potencial de blanco: átomo, ión, o molécula, ó lo que sea.

Regla de oro de Fermi. El proceso físico es muy similar al de captura radiativa. La única diferencia es que ahora el estado final es el continuo. Siguiendo la misma notación y suponiendo que no hay fotones en el medio, la expresión de partida es exactamente la misma, con la diferencia que ahora hay un elemento continuo-continuo (*free-free*),

$$\frac{d W_{i \rightarrow f}^+}{dt d \vec{f}} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta[E_i - E_f] \left| \left\langle 1_{\lambda \vec{k}} \psi_{\vec{k}_f}^- | H_{\lambda \vec{k}}^+ | 0_{\lambda \vec{k}} \psi_{\vec{k}_i}^+ \right\rangle \right|^2, \quad (7)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \delta \left[\frac{(\hbar k_i)^2}{2m} - \frac{(\hbar k_f)^2}{2m} - \hbar \omega \right] \frac{e^2}{m^2} A_1^2 \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2. \quad (8)$$

Densidad de estados finales e integración. Aquí comienza la diferencia con la captura radiativa que hace más complejo este proceso y es debido al estado final. En la captura radiativa teníamos en el canal final solamente el espacio de los fotones. En bremsstrahlung tenemos además el espacio de los electrones dispersados $d \vec{k}_f$, esto es

$$d \vec{f} = \underbrace{\frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} d \vec{k}}_{\text{fotón}} \underbrace{d \vec{k}_f}_{\text{electrón}}, \quad (9)$$

donde con $d \vec{k}$ indicamos el espacio de posibilidades del fotón, y con $d \vec{k}_f$ la del electrón dispersado. Esto suma 3 dimensiones más al problema que lo hace más tedioso: además de los elementos de matriz que involucra funciones hipergeométricas en el mejor de los casos, que complican su cálculo.

Acá tenemos dos alternativas para proceder a calcular la probabilidad. O estamos interesados en el electrón dispersado ó en el espectro fotónico (ó en ambos, llegado el caso). Nos concentraremos en el espectro fotónico, que es mucho mas interesante, por lo que debemos integrar el todo el espacio electrónico,

$$\int d\vec{k}_f \delta[E_i - E_f] = \int d\vec{k}_f \delta\left[\frac{(\hbar k_i)^2}{2m} - \frac{(\hbar k_f)^2}{2m} - \hbar\omega\right], \quad (10)$$

$$= \int d\Omega_f \int dk_f k_f^2 \delta\left[\frac{\hbar^2}{2m}(k_f^2 - k_{f\omega}^2)\right], \quad \text{con,} \quad (11)$$

$$k_{f\omega} = k_f(\omega) = \sqrt{k_i^2 - \frac{2m}{\hbar}\omega} \quad (12)$$

$$\int d\vec{k}_f \delta[E_i - E_f] = \int d\Omega_f \frac{2m}{\hbar^2} \frac{k_{f\omega}^2}{2k_{f\omega}} = \int d\Omega_f \frac{m}{\hbar^2} k_{f\omega} = \int d\Omega_f \rho_f(\omega) \quad (13)$$

$$\rho_f(\omega) = \frac{m}{\hbar^2} k_{f\omega} = \frac{m}{\hbar^2} \sqrt{k_i^2 - \frac{2m}{\hbar}\omega} \quad (14)$$

Notese que ahora $k_{f\omega} = k_f(\omega)$, lo que indica que la energía de salida del electrón depende de la del fotón! (o viceversa) Reemplazando en la probabilidad, tenemos

$$\frac{d W_{i \rightarrow f}^+}{dt d\Omega_f d\vec{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{\hbar^2} k_{f\omega}\right) \frac{e^2}{m^2} A_1^2 \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{p} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2 \quad (15)$$

haciendo $\vec{\omega} = c \vec{k}$,

$$\frac{d W_{i \rightarrow f}^+}{dt d\Omega_f d\vec{\omega}} = \frac{1}{(2\pi)^2 (\hbar c)^3} \mathcal{V} \frac{k_{f\omega} q^2}{m} \frac{A_1^2}{2\epsilon_0 \omega \mathcal{V}} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{p} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2, \quad (16)$$

$$= \frac{k_{f\omega}}{2\pi} \frac{q^2}{\hbar^2 c^3 \omega m} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{p} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2, \quad (17)$$

y como siempre se simplificó en volumen de la caja \mathcal{V} .

Sección eficaz. En estos casos, la magnitud de interés es la sección eficaz, con lo que debemos obtenerla, como siempre, dividiendo la probabilidad por el flujo incidente de electrones J_{in}

$$\frac{d \sigma}{d\Omega_f d\vec{\omega}} = \frac{d W_{i \rightarrow f}^+}{dt d\Omega_f d\vec{\omega}} \frac{1}{J_{in}}, \quad \text{con} \quad (18)$$

$$J_{in} = \frac{\hbar k_i}{(2\pi)^3 m} \quad (19)$$

por lo que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f d\omega} = \frac{(2\pi)^3 m}{\hbar k_i} \frac{k_{f\omega}}{2\pi \hbar^2 c^3 \omega m} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2, \quad (20)$$

$$= (2\pi)^2 \frac{k_{f\omega}}{k_i} \frac{1}{\omega \hbar^3 c^3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2. \quad (21)$$

Ahora pasamos a unidades atómicas que resulta con $q = \pm e$, $\hbar = m = e^2/4\pi\epsilon_0 = 1$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f d\omega} = \frac{(2\pi)^2 k_{f\omega}}{\omega c^3 k_i} \sum_{\lambda} \left| \hat{\epsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2. \quad (22)$$

y de aquí sale todo.

Reducción del elemento de matriz. Para el caso mas general de potencial central $V(r)$, el elemento de matriz $\left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+}$ requiere una fuerte dosis de algebra. El término a calcular es

$$\left\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \widehat{\vec{p}} \right\rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \int d\vec{r} \psi_{\vec{k}_{f\omega}}^{-*}(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right) \psi_{\vec{k}_i}^+(\vec{r}). \quad (23)$$

Para potenciales centrales no Coulombianos, el cálculo requiere de elementos de matriz *free-free* que involucran integrales complicadas.

Si tuviesemos sólo interacción coulombiana, el blanco es una carga puntual, tenemos

$$q_{k_i}^{\pm} + Z^+ \rightarrow q_{k_{f\omega}}^{\pm} + Z^+ + \hbar\omega, \quad (24)$$

donde indicamos con Z es la carga nuclear y q en general indica la carga del proyectil. En el caso de tener electrones incidentes, tenemos $q = -e$. Las funciones de onda del continuo en este caso son conocidas, las de siempre, o sea (repito lo mismo)

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{\vec{k}_i}^+(\vec{r}) = \psi_{\vec{k}_i}^-(\vec{r}) D^+(a_i, \vec{k}_i | \vec{r}), \quad \text{continuo Coulombiano} \\ \psi_{\vec{k}_{f\omega}}^-(\vec{r}) = \psi_{\vec{k}_{f\omega}}^+(\vec{r}) D^-(a_f, \vec{k}_{f\omega} | \vec{r}), \quad \text{continuo Coulombiano} \\ \psi_{\vec{k}}^-(\vec{r}) = \frac{\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})}{(2\pi)^{3/2}}, \quad \text{onda plana} \\ D^{\pm}(a, \vec{k} | \vec{r}) = \exp(a\pi/2) \Gamma(1 \mp ia) {}_1F_1(\pm ia; 1; \pm ikr - i\vec{k} \cdot \vec{r}), \\ a_i = \frac{Zeqm}{\hbar^2 k_i} \quad a_f = \frac{Zeqm}{\hbar^2 k_{f\omega}}, \quad \text{parametros de Sommerfeld} \end{array} \right. \quad (25)$$

y m es la masa reducida de los sistemas colisionantes. Los elementos de matriz son analíticos y son las integrales de Nordsieck (ver apendice de Tema 2). En la siguiente sección haremos una aproximación muy usada. Seguimos en unidades atómicas.

A. CALCULO EN PRIMER ORDEN PERTURBATIVO

En el Apéndice demostramos que a primer orden perturbativo el elemento $\langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+}$ esta dado por

$$\langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \vec{k}_i \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) + \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\tilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega})}{k_{f\omega}^2 - k_i^2 + i\epsilon} (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) + O(V^2), \quad (26)$$

donde ya hemos hecho la aproximación dipolar $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 1$. La primera e interesante conclusión es que el primer termino $O(V^0)$ es la conservación del momento con lo cual impone $\vec{k}_i = \vec{k}_{f\omega}$ pero contradice la conservación de la energía y por lo tanto debe ser nulo. O más precisamente si $\vec{k}_i = \vec{k}_f$ tenemos una colisión elástica y no hay energía cedida al fotón. Físicamente nos dice algo muy importante: una partícula libre (ausencia de potencial $V = 0$) no puede emitir fotones. Lo que resulta lógico.

Lo interesante del desarrollo que hemos hecho es que no necesariamente nos debemos circunscribir a la interacción culombiana: puede tener cualquier forma . Esto da lugar a modelizar átomos

$$e_{\vec{k}_i}^- + \text{Atomo} \rightarrow e_{\vec{k}_{f\omega}}^- + \text{Atomo} + \hbar\omega. \quad (27)$$

Vamos a considerar un potencial del tipo de Yukawa para tener una idea del comportamiento de un blanco atómico neutro

$$V(r) = -Z \frac{\exp(-\lambda r)}{r}, \quad \text{y por lo tanto,} \quad (28)$$

$$\tilde{V}(\vec{u}) = -Z \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{u^2 + \lambda^2}, \quad (29)$$

donde Z sería la carga nuclear del átomo. El caso Culombiano se reduce a $\lambda = 0$. Reemplazando la Eq.(29) en (26), y removiendo $+i\epsilon$ ya que sabemos siempre $k_i^2 > k_{f\omega}^2$ resulta

$$\sum_{\lambda} \left| \widehat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot \langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_{f\omega}^- \leftarrow \vec{k}_i^+} \right|^2 = \frac{2^2}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{V}^2(\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega})}{(k_{f\omega}^2 - k_i^2)^2} \sum_{\lambda} \left| \widehat{\varepsilon}_{\lambda \vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right|^2, \quad (30)$$

donde hemos hecho la aproximación dipolar $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 1$. Y ahora nos queda definir los versores. Seguimos el mismo criterio de siempre

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{k}_i = (0, 0, 1), & \text{electrón incidente} \\ \hat{k}_f = (\sin \theta_f \cos \varphi_f, \sin \theta_f \sin \varphi_f, \cos \theta_f), & \text{electrón dispersado} \\ \hat{k} = (\sin \theta, 0, \cos \theta), & \text{fotón saliente} \\ \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} = (0, 1, 0), & \text{versor de polarización} \\ \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} = (\cos \theta, 0, -\sin \theta), & \text{versor de polarización} \\ \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} \times \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} = \hat{k}, \quad \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} \cdot \hat{k} = \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} \cdot \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} = \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} \cdot \hat{k} = 0, & \end{array} \right. \quad (31)$$

entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega} = (-k_{f\omega} \sin \theta_f \cos \varphi_f, -k_{f\omega} \sin \theta_f \sin \varphi_f, k_i - k_{f\omega} \cos \theta_f) \\ \hat{\varepsilon}_{1\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) = -k_{f\omega} \sin \theta_f \sin \varphi_f, \\ \hat{\varepsilon}_{2\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) = -k_i \sin \theta - k_{f\omega} \cos \theta \sin \theta_f \cos \varphi_f + k_{f\omega} \sin \theta \cos \theta_f, \end{array} \right. \quad (32)$$

Por lo que la sección eficaz multiple diferencial es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f \underbrace{d\vec{\omega}}_{\omega^2 d\omega d\Omega_\omega}} = \frac{(2\pi)^2 k_{f\omega}}{\omega c^3 k_i} \frac{2^2}{(2\pi)^3 (k_{f\omega}^2 - k_i^2)^2} \quad (33)$$

$$\times \left[\tilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right]^2 \sum_\lambda \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right|^2 \quad (34)$$

$$\sum_\lambda \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right|^2 = [(k_{f\omega} \sin \theta_f \sin \varphi_f)^2 + (-k_i \sin \theta - k_{f\omega} \cos \theta \sin \theta_f \cos \varphi_f + k_{f\omega} \sin \theta \cos \theta_f)^2]$$

Para ahorrar esfuerzo, a esta altura nos conviene recurrir a un programa de álgebra y escribir directamente el resultado de la integración

$$I_\Omega = \int \underbrace{d\Omega_\omega}_{\text{fotón}} \int \underbrace{d\Omega_f}_{\text{electrón}} \left[\tilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right]^2 \sum_\lambda \left| \hat{\varepsilon}_{\lambda\vec{k}} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_{f\omega}) \right|^2, \quad (35)$$

$$d\Omega_\omega = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (36)$$

$$d\Omega_f = \sin \theta_f d\theta_f d\varphi_f \quad (37)$$

que nos da, siempre para el potencial de Yukawa (29),

$$I_\Omega = \frac{16\pi Z^2}{3k_f k_i} (L - X), \quad (38)$$

$$L = \log \frac{(k_i + k_{f\omega})^2 + \lambda^2}{(k_i - k_{f\omega})^2 + \lambda^2}, \quad (39)$$

$$X = \frac{4 k_i k_{f\omega} \lambda^2}{(k_i^2 - k_{f\omega}^2)^2 + 2\lambda^2(k_i^2 + k_{f\omega}^2) + \lambda^4}. \quad (40)$$

Reemplazando, tenemos

$$\frac{d\sigma}{\omega^2 d\omega} = \frac{(2\pi)^2 k_{f\omega}}{\omega c^3 k_i} \frac{2^2}{(2\pi)^3 (k_{f\omega}^2 - k_i^2)^2} \overbrace{\frac{16\pi Z^2}{3k_i k_{f\omega}} (L - X)}^{I_\Omega} \quad (41)$$

$$= \frac{32 Z^2}{3\omega c^3 k_i^2} \frac{1}{(2\omega)^2} (L - X) \quad (42)$$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{8 Z^2}{3\omega c^3 k_i^2} (L - X) \quad (43)$$

A primer orden perturbativo en Z hemos resuelto analíticamente el problema, repito para el caso del potencial de Yukawa.

Obviamente la conservación de la energía impone $k_{f\omega} = \sqrt{k_i^2 - 2\omega}$ con lo que la máxima energía ω_{\max} sera cuando

$$k_{f\omega}^2 = k_i^2 - 2\omega_{\max} > 0, \quad (44)$$

$$\omega_{\max} < \frac{k_i^2}{2}. \quad (45)$$

El caso extremo en que $\omega = k_i^2/2$, nos indica que se transformó toda la energía cinetica del electrón incidente en la del fotón y finalmente quedo "quieto", $k_f = 0$

Pero esta no es la ecuación mas famosa. Si consideramos k_i muy grandes, $k_i \gg \lambda$, y para bajos valores de ω entonces podemos aproximar

$$\lambda \ll k_{f\omega} = \sqrt{k_i^2 - 2\omega} \approx k_i - \frac{\omega}{k_i} + \dots \quad (46)$$

con lo que

$$X = \frac{4k_i k_{f\omega} \lambda^2}{\underbrace{(k_i^2 - k_{f\omega}^2)^2}_{(2\omega)^2} + \underbrace{2\lambda^2(k_i^2 + k_{f\omega}^2)}_{\sim 4k_i^2 \lambda^2} + \lambda^4} \simeq 1, \quad (47)$$

$$L = \log \frac{(k_i + k_{f\omega})^2 + \lambda^2}{(k_i - k_{f\omega})^2 + \lambda^2} \simeq \log \frac{4k_i^2}{(\frac{\omega}{k_i})^2} \simeq 2 \log \frac{2k_i^2}{\omega}. \quad (48)$$

Entonces $d\sigma/d\omega$ se reduce a

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \simeq \frac{16 Z^2}{3\omega c^3 k_i^2} \left(\log \frac{2k_i^2}{\omega} - \frac{1}{2} \right), \quad (49)$$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \simeq \frac{16 Z^2}{3\omega c^3 k_i^2} \log \frac{2k_i^2}{\alpha\omega}, \quad (50)$$

donde α es un valor digamos cercano a \sqrt{e} . Y esta es la famosa **ecuación de Bethe Heitler** que merece al mayor de mis respetos.

II. IMPLICANCIAS FISICAS

De aquí podemos decir:

i) Lo hicimos para impacto de electrones donde $m = 1$ en unidades atómicas. Si el proyectil tuviese una masa M (protones por ejemplo $M = 1836$) La Eq.(50) debería dividirse por M^2 .

ii) Si el proyectil tuviese una carga qe , (por ejemplo $q = 2$ para He^{++}) entonces la Eq.(50) debería multiplicarse por q^2 (como cualquier primer orden perturbativo).

iii) Su valor es pequeño ($\propto c^{-3}$) pero es un mecanismo que sobrevive en el rango de rayos X, ya que $\propto 1/\omega$

4i) Notesé que la ecuación de Bethe Heitler no contiene λ . Lo que se explica que el bremsstrahlung tiene lugar a pequeñas distancias $\ll 1/\lambda$, de modo tal que el potencial

$$V(r) = -Z \frac{\exp(-\lambda r)}{r} \simeq -\frac{Z}{r} (1 - \lambda r + \dots) \Big|_{r \ll \lambda^{-1}} \simeq -\frac{Z}{r} \quad (51)$$

con lo que, en el límite de Bethe Heitler, sobrevive sólo el término Culombiano.

5i) En este límite ($\lambda \ll k_i - \omega/k_i$), $d\sigma/d\omega$ posee a una divergencia cuando $\omega \rightarrow 0$, y en esa región es muy parecida a $1/\omega$ (en realidad esta divergencia es un artefacto de la aproximaciones usadas).

6i) En relación a la Eq.(50), recordemos que $k_i = v$ =velocidad en unidades atómicas. Hay muchísimas formas de escribirla (el Jackson tiene un capítulo dedicado a este tema)

7i) El frenamiento de iones en la materia debida al bremsstrahlung es muy importante a altas energías de impacto. Su importancia es capital en ciencia básica (estrellas, plasma de fusión, PIXE, creación de pares). Y esta presente en muchos aparatos tecnológicos, (generador de rayos X, radiación contaminante, reactores de fusión y fisión, etc)

Hay fenómenos interesantes tales como, stripping, bremsstrahlung internuclear, PIXE. Da una dimensión distinta a los procesos dinámicos.

III. APPENDICE. ESTIMACION DEL ELEMENTO DE MATRIZ

Hagamos una aproximacion. Partiendo del elemento de matriz (23)

$$\langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_f \omega \leftarrow \vec{k}_i^+} = \int d\vec{r} \psi_{\vec{k}_f}^{-*}(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right) \psi_{\vec{k}_i}^+(\vec{r}), \quad (52)$$

usando la aproximación dipolar $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \simeq 1$, y la transformada de Fourier

$$f(\vec{r}) = \int d\vec{u} \frac{\exp(i\vec{u}\cdot\vec{r})}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{f}(\vec{u}), \quad (53)$$

de las funciones del continuo, llegamos a $\langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \hbar I$, con

$$I = \int d\vec{u} \widetilde{\psi}_{\vec{k}_f}^*(\vec{u}) (\vec{u}) \widetilde{\psi}_{\vec{k}_i}^+(\vec{u}), \quad (54)$$

Ahora podemos expandir las funciones en continuo en forma perturbativa a partir de la onda plana tal como vimos en las primeras clases (serie perturbativa de Lippman-Schwinger)

$$\widetilde{\psi}_{\vec{k}_i}^+(\vec{u}) = \delta(\vec{k}_i - \vec{u}) + \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_i - \vec{u})}{k_i^2 - u^2 + i\epsilon}, \quad (55)$$

$$\widetilde{\psi}_{\vec{k}_f}^-(\vec{u}) = \delta(\vec{k}_f - \vec{u}) + \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_f - \vec{u})}{k_f^2 - u^2 - i\epsilon}. \quad (56)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_{\vec{k}_f}^*(\vec{u}) \widetilde{\psi}_{\vec{k}_i}^+(\vec{u}) &= \delta(\vec{k}_i - \vec{u}) \delta(\vec{k}_f - \vec{u}) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_f)}{k_i^2 - k_f^2 + i\epsilon} \delta(\vec{k}_f - \vec{u}) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_f - \vec{k}_i)}{k_f^2 - k_i^2 + i\epsilon} \delta(\vec{k}_i - \vec{u}) + O(V^2), \end{aligned} \quad (57)$$

Reemplazando en la Eq.(54), resulta

$$\langle \widehat{p} \rangle_{\vec{k}_f^- \leftarrow \vec{k}_i^+} = \hbar \vec{k}_i \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_f) + \frac{2\hbar}{(2\pi)^{3/2}} (\vec{k}_i - \vec{k}_f) \frac{\widetilde{V}(\vec{k}_i - \vec{k}_f)}{k_f^2 - k_i^2 + i\epsilon} + O(V^2). \quad (58)$$

que es la ecuación que usamos.